गणित

अभ्यासपुस्तिका

(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

वेद-भूषण - III वर्ष / प्रथमा - III वर्ष / कक्षा आठवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

समयोर्धनर्णयोरैक्यं खं शून्यं भवति।

विपरीतच्छेदगुणा राश्योश्छेदांशका: समच्छेदाः ।

सङ्कलितेंऽशा योज्या व्यवकलितेंऽशान्तरं कार्यम्॥

परिवर्त्य भागहारच्छेदांशौ छेदसंगुणच्छेद: ।

अंशोंऽशगुणो भाज्यस्य भागहार: सवर्णितयोः ॥

समद्विघात: कृति: उच्यते इति प्रथम: प्रकार: ।

समत्रिघातश्च घन: प्रदिष्ट: इति प्रथम: प्रकार: ।

योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च ।

षष्टिं सहस्राश्व्यस्यायुतासनमुष्ट्रानां विंशतिं शता।

दश श्यावीनां शता दश त्र्यरुषीणां दश गवां सहस्ता ॥

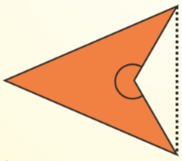
सदृशद्विवधो वर्गस्त्र्यादिवधस्तद् गतोऽन्यजातिवध:।

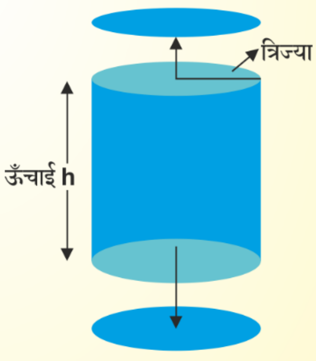
अन्योऽन्यवर्णघातो भावितकः पूर्ववच्छेषम्॥

खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा।

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धि: फलस्य तु।

व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदै: ॥





3 का वर्ग

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$3 = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9}$

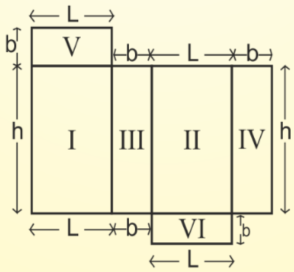
9 का वर्गमूल

2 का घन

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2 = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[3]{8}$

8 का घनमूल



सर्वसमिकाएँ

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = \text{मूलधन}\left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मूलधन}$$

ध्वजाङ्क: | विलोकनम् | आनुरूप्येण | ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् | निखिलं नवतश्चरमं दशत:

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

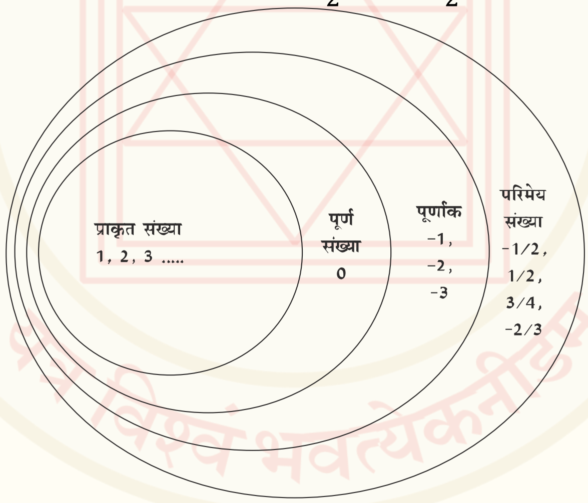
विषयानुक्रमणिका

अध्याय 1

परिमेय संख्या

➢ परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। जहाँ p व q पूर्णाङ्क हैं। तथा $q \neq 0$

1. प्राकृत संख्या (N) = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...
2. पूर्ण संख्या (W) = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...
3. पूर्णाङ्क संख्या = ... –3 , –2 , –1 , 0 , 1 , 2 , 3 ....
4. परिमेय संख्या = ... $\frac{-1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, ...



इस प्रकार सभी प्राकृत संख्या (N), पूर्ण संख्याएँ भी होती हैं एवं सभी पूर्ण संख्याएँ पूर्णाङ्क संख्याएँ भी होती हैं, सभी पूर्णाङ्क संख्या परिमेय संख्या भी होती हैं तथा सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्या (अपरिमेय एवं परिमेय संख्या) होती है ।

परिमेय संख्याओं पर सङ्क्रियाएँ (+ , − , × , ÷)

परिमेय संख्या के योग एवं अन्तर –

- समान हर वाली परिमेय संख्याओं को योग एवं अन्तर ज्ञात करने के लिये समान हर को हर के स्थान पर रखते हुए अंशों के मध्य योग एवं अन्तर करते हैं।
- असमान हर वाली परिमेय संख्याओं के योग एवं अन्तर के लिए हरों का लघुत्तम समापवर्त्य लेकर हल करते हैं। समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग –

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ और $\frac{-5}{7}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{2}{7} + \frac{(-5)}{7}$

$$= \frac{2+(-5)}{7}$$

$$= \frac{2-5}{7}$$

$$= \frac{(-3)}{7}$$

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5}$

4 एवं 5 का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) 20 है।

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{(-2)}{5} = \frac{(-2)\times4}{5\times4} = \frac{(-8)}{20}$$

तब, $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5} = \frac{5}{20} + \frac{(-8)}{20} = \frac{5+(-8)}{20} = \frac{5-8}{20} = \frac{(-3)}{20}$

➢ **समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं के व्यवकलन (अन्तर) -**

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{5}{4}$ में से $\frac{(-1)}{6}$ को घटाइये।

हल : $\frac{5}{4} - \frac{(-1)}{6}$

4 एवं 6 का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) 12 है।

$$\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{(-1)}{6} = \frac{(-1)\times2}{6\times2} = \frac{(-2)}{12}$$

अत: $\frac{5}{4} - \frac{(-1)}{6} = \frac{15}{12} - \frac{(-2)}{12}$

$$= \frac{15+2}{12}$$

$$= \frac{17}{12}$$

परिमेय संख्या के मध्य गुणन –

दो या दो अधिक परिमेय संख्याओं के गुणन के लिए अंशों के गुणनफल को हर के गुणनफल से भाग देने पर परिमेय संख्याओं के गुणनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ में $\frac{(-4)}{7}$ का गुणा करें।

हल : गुणन क्रिया : $\frac{3}{4} \times \frac{(-4)}{7}$

$$= \frac{3\times(-4)}{4\times7}$$

$$= \frac{(-12)}{28}$$

परिमेय संख्याओं के मध्य भाग – परिमेय संख्या के भागफल ज्ञात करने के लिये भाजक के हर एवं अंश का स्थान परिवर्तन कर (भाजक के व्युत्क्रम) भाज्य के साथ गुणन करने से भागफल प्राप्त होता है।

➢ क्या आप भिन्नों के व्युत्क्रम के बारे जानते हैं?

$\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{2}$ होता है।

उदाहरण : $\frac{(-21)}{5} \div \frac{2}{3}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{(-21)}{5} \div \frac{2}{3}$

$= \frac{(-21)}{5} \times \frac{3}{2}$ $\left(\text{चूँकि } \frac{2}{3} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{3}{2}\right)$

$= \frac{(-21) \times 3}{5 \times 2} = \frac{(-63)}{10}$

योज्य प्रतिलोम –

जब दो संख्याओं का योग शून्य (0) हो, तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे की **योज्य प्रतिलोम** होती हैं। व्यापक रूप में -

***a* का योज्य प्रतिलोम $= (-a)$ होगा।**

2 का योज्य प्रतिलोम (–2) तथा (–2) का योज्य प्रतिलोम 2 होता है। अत: हम कह सकते हैं। कि परिमेय संख्या का **योज्य प्रतिलोम** उसी संख्या का विपरीत चिह्न वाली संख्या ही होती है।

उदाहरण: $\frac{(-3)}{5}$ का योज्य प्रतिलोम $= \frac{3}{5}$

$\frac{5}{7}$ का योज्य प्रतिलोम $= \frac{(-5)}{7}$

गुणात्मक प्रतिलोम –

जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 हो, तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे की **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाती हैं। गुणात्मक प्रतिलोम का व्यापक रूप निम्न है-

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 \text{ जहाँ } a \neq 0$$

जैसे : $\frac{3}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{5}{3}$ तथा $\frac{5}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{5}$ है।

➢ किन्हीं दो परिमेय संख्या के बीच अनन्त परिमेय संख्या होती है।

उदाहरण : परिमेय संख्याएँ $\frac{(-3)}{4}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच में 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम $\frac{(-3)}{4}$ और $\frac{2}{5}$ को समान हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में परिवर्तित करते हैं। $\frac{(-3)\times 5}{4\times 5} = \frac{(-15)}{20}$ और $\frac{2\times4}{5\times4} = \frac{8}{20}$

इसी प्रकार हम $\frac{-15}{20}$ और $\frac{8}{20}$ के मध्य निम्नलिखित परिमेय संख्या $\left(\frac{-15}{20}, \frac{-13}{20}, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \frac{7}{20}, \frac{8}{20}\right)$ प्राप्त करते हैं। आप इनमें से कोई भी पाँच संख्या ले सकते हैं।

$$\frac{-10}{20}, \frac{-7}{20}, \frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{5}{20}$$

➢ BODMAS के नियम पर आधारित सवाल

उदाहरण : हल करें- $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

हल : $\frac{3\times2}{4\times5} + \frac{1}{4}$

$= \frac{6}{20} + \frac{1}{4}$

$\frac{6}{20} = \frac{6\times1}{20\times1} = \frac{6}{20}$

$\frac{1}{4} = \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20}$

$\frac{6}{20} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{6+5}{20} = \frac{11}{20}$

BODMAS (कोकाभागुयोध) के नियम

को	=	कोष्ठक	: ( ), { }, [ ]
का	=	के लिए	: $( )^2$ या $\sqrt{\ }$
भा	=	भाग	: ÷
गु	=	गुणा	: ×
यो	=	योग	: +

अभ्यास प्रश्नावली - 1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) $\frac{5}{6}$ का योज्य प्रतिलोम है-

(I) $\frac{-5}{6}$ (II) $\frac{5}{6}$ (III) $\frac{6}{5}$ (IV) 0

(ब) $\frac{11}{-6}$ का गुणात्मक प्रतिलोम क्या है -

(I) $\frac{-6}{11}$ (II) $\frac{-11}{6}$ (III) $\frac{-11}{-6}$ (IV) $\frac{11}{6}$

(स) 7 का गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) होगा-

(I) $\frac{1}{7}$ (II) 7 (III) -7 (IV) इनमें से कोई नहीं

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

अ) $\frac{2}{5}+\frac{(-3)}{4}$ ब) $\frac{(-5)}{3}+\frac{4}{5}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को हल करें (घटाइये) -

अ) $\frac{2}{7}-\frac{5}{7}$ ब) $\frac{(-5)}{3}-\frac{(-4)}{3}$

4. निम्नलिखित परिमेय संख्या के गुणनफल ज्ञात करें।

अ) $\frac{3}{4}\times\frac{(-4)}{5}$ ब) $\frac{(-3)}{4}\times\frac{(-7)}{2}$

5. निम्न का मान ज्ञात कीजिए। (भागफल)

अ) $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$ ब) $\frac{2}{5}\div\frac{7}{1}$

6. निम्न का मान ज्ञात कीजिए। (BODMAS के नियमों से हल करें)

अ) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ ब) $\frac{2}{3}+\frac{4}{1}\times\frac{2}{3}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम लिखिए।

अ) -2 ब) $\frac{3}{7}$ स) $\frac{(-8)}{3}$ द) $\frac{3}{5}$

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

अ) $\frac{2}{5}$ ब) $\frac{(-3)}{7}$ स) $\frac{8}{5}$ द) $\frac{(-2)}{7}$

अध्याय 2

एक चर वाले रैखिक समीकरण

- समीकरणों में सदैव '$=$' चिह्न का प्रयोग होता है, जो व्यंजकों में नहीं होता।
- यदि समीकरण की चर की घात एक हो, तो उसे **रैखिक समीकरण** कहते हैं।

जैसे : $\underset{\text{चर राशि}}{\underset{\uparrow}{3x}} - 2 \underset{\text{समता चिह्न}}{\underset{\uparrow}{=}} 5$

यहाँ बायाँ पक्ष $= 3x - 2$ एवं दायाँ पक्ष $= 5$ है।

- एक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि -

1. समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।
2. समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

उदाहरण समीकरण $2x + 1 = 9$ को हम चार विधियों से हल कर सकते हैं जो निम्नवत् हैं -

1) $2x + 1 = 9$

दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर

$2x + 1 + 2 = 9 + 2$

$2x + 3 = 11$

$2x = 11 - 3$

$2x = 8$

2) $2x + 1 = 9$

दोनों पक्षों से 3 घटाने पर

$2x + 1 - 3 = 9 - 3$

$2x + (-2) = 6$

$2x = 6 + 2$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

3) $2x + 1 = 9$

दोनों पक्षों का 2 से गुणा करने पर

$2(2x + 1) = 2(9)$

$4x + 2 = 18$

$4x = 18 - 2$

$4x = 16$

$x = \frac{16}{4}$

$x = 4$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

4) $2x + 1 = 9$

दोनों पक्षों का 3 से भाग करने पर

$\frac{2x+1}{3} = \frac{9}{3}$

$\frac{2x+1}{3} = \frac{3}{1}$

(व्रजगुणन करने पर)

$1(2x + 1) = 3 \times 3$

$2x + 1 = 9$

$2x = 9 - 1$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

पक्षान्तर विधि द्वारा समीकरण का हल : —

उदाहरण : समीकरण $8x + 1 = 4x + 13$ की कीजिए।

हल : पक्षान्तर विधि : ($4x$ और 1 का पक्षान्तर करने पर)

या $8x - 4x = 13 - 1$

या $4x = 12$

दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर

या $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$

$x = 3$

तुला विधि द्वारा समीकरण का हल : —

उदाहरण : समीकरण $7x + 2 = 3x + 5$ हल ज्ञात करें।

हल : **तुला विधि :** $7x + 2 = 3x + 5$

दोनों पक्षों से 2 घटाने पर

या $7x + 2 - 2 = 3x + 5 - 2$

या $7x = 3x + 3$

दोनों पक्षों से $3x$ को घटाने पर

या $7x - 3x = 3x - 3x + 3$

या $4x = 3$

दोनों पक्षों का 4 से भाग देने पर

$$\frac{4x}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

समीकरण के अनुप्रयोग – दैनिक जीवन में कई समस्याओं, पहेलियों आदि का समाधान हम समीकरणों द्वारा हल कर, अज्ञात राशि का मान पता करते हैं। संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा के रूप में प्रयोग होने वाले सिक्के व नोटों पर आधारित अनेक प्रकार की समस्याएँ रैखिक समीकरणों का उपयोग कर हल की जा सकती है।

अभ्यास प्रश्नावली - 2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) समीकरण $2x + 3 = 5$ का हल क्या होगा -

(I) 1 (II) 2 (III) 5 (IV) 4

(ब) $3x + 18$ में x का मान होगा -

(I) 6 (II) 18 (III) 54 (IV) सम्भव नहीं है।

(स) $\frac{x}{3} = 7$ में x का मान होगा -

(I) 21 (II) 3 (III) 7 (IV) $\frac{7}{3}$

(द) $5(x + 4) = 9(4x - 5)$ को हल करने पर x का मान होगा -

(I) 65 (II) 31 (III) $\frac{31}{65}$ (IV) $\frac{65}{31}$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल करें।

1) $7x + 3 = 3x + 5$ 2) $3(x + 1) = x + 5$

3) $\frac{x}{5} = \frac{x+1}{9}$ 4) $\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{5}$

3. यदि राम की आयु का दो गुणा में 10 अधिक कर देने पर 40 प्राप्त होता है, तो राम की आयु ज्ञात कीजिए?

4. किसी संख्या का 3 गुणा कर देने पर 21 प्राप्त होता है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए?

5. आशिष और राहुल की ऊँचाई का अन्तर 40 से.मी. है। यदि दोनों की ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 हो तो दोनों की ऊँचाई कितने से.मी. है?

6. किसी संख्या के 4 गुणा में 10 अधिक करने पर संख्या 50 प्राप्त होती है तो वह अज्ञात संख्या ज्ञात करें?

7. तीन क्रमागत पूर्णाङ्कों का योग 51 है तो पूर्णाङ्क ज्ञात कीजिए।

अध्याय 3

वर्ग एवं वर्गमूल

- **वर्ग** - जब किसी संख्या को स्वयं उसी से गुणा किया जाए तो उससे प्राप्त संख्या, उस संख्या का **वर्ग** कहलाती है। दूसरे शब्दों में समान दो अङ्कों का गुणनफल **वर्ग** कहलाता है ।
- सभी वर्ग संख्याएँ के अन्त में इकाई अङ्क के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6, 9 होते हैं।

उदाहरण : 3 का वर्ग ज्ञात करें?

हल : तब, $3 \times 3 = 9$

या निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$3^2 = 9$$

$\uparrow$

इसे हम 3 का वर्ग पढ़ते हैं।

- व्यापक रूप में $A = B^2$ $(B \times B)$ है तो A की वर्ग संख्या B है।
- 1 से 100 के बीच की मात्र 10 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं, शेष संख्याएँ वर्ग संख्या नहीं है। संख्या 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 व 100 वर्ग संख्याएँ है तथा इन्हें **पूर्ण वर्ग संख्याएँ** भी कहते हैं।

वर्ग संख्याओं के गुणधर्म –

1) वर्ग के इकाई अङ्कों में (0, 1, 4 , 5, 6, 9) आता है। अतः यदि किसी संख्या में 2, 3, 7, 8 इकाई अङ्क आये तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है। आप आसानी से पूर्ण वर्ग संख्या पता कर सकते हैं।

2) सभी सम संख्याओं के वर्ग में सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग में विषम संख्या ही प्राप्त होते हैं।

3) यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 1 या 9 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अन्त में 1 आता है **उदाहरण :** 1, 9, 11, 19

अङ्क	वर्ग
1	1
9	81
11	121
19	361

4) यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 4 या 6 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अन्त में 6 आता है।

अङ्क	वर्ग
4	16
6	36
14	196
16	256

वर्गमूल – किसी संख्या का वर्गमूल वह संख्या होती है, जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो। **वर्गमूल, वर्ग के प्रतिलोम सङ्क्रिया है।** वर्गमूल को "$\sqrt{}$" चिह्न (करणी चिह्न) द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण : $(3)^2 = 3 \times 3 = 9$

यहाँ 3 का वर्ग 9 है। इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 9 का वर्गमूल 3 है।

$(3)^2 = 3 \times 3 = 9$

यहाँ 9 का वर्गमूल 3 है।

अर्थात् 9 का वर्गमूल या $\sqrt{9} = 3$

अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना –

उदाहरण : 64 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि 64 के अभाज्य गुणनखण्ड

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$64 = \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2}$$

अभाज्य गुणनखण्डों के युग्म बनाने पर

$64 = (2^2 \times 2^2 \times 2^2)$ या $(2 \times 2 \times 2)^2$

या $\sqrt[2]{64} = 2 \times 2 \times 2$

$\sqrt[2]{64} = 8$

अतः 64 का वर्गमूल 8 है।

उदाहरण : क्या 125 पूर्ण वर्ग संख्या है?

हल : 125 के अभाज्य गुणनखण्ड

5	125
5	25
5	5
	1

$125 = \underbrace{5 \times 5} \times 5$

अभाज्य गुणनखण्ड में सभी युग्म में नहीं है।

अतः 125 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अभ्यास प्रश्नावली - 3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई अङ्क क्या हैं?

   अ) 4 ब) 13 स) 18 द) 11

2. नीचे दी गई संख्या के वर्ग ज्ञात करें?

   अ) 16 ब) 9 स) 35 द) 19

3. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 8100 का वर्गमूल होगा -

(I) 900 (II) 90 (III) 9 (IV) सम्भव नहीं

(ब) $\sqrt{90000}$ का मान क्या है –

(I) 30 (II) 300 (III) 90 (IV) 81

(स) 900 का वर्गमूल होगा –

(I) 3 (II) 30 (III) 300 (IV) इनमें से कोई नहीं

4.. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अङ्क बताइये ?

   अ) 256 ब) 10000 स) 625 द) 289

5. निम्नलिखित संख्या में कौन-कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती हैं? (**सङ्केत :** इकाई के अङ्क को पहचानें)

अ) 441 ब) 257 स) 408 द) 102

6. निम्नलिखित संख्या में किस संख्या से गुणा किया जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए ?

अ) 90 ब) 60 स) 95

7. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

अ) 729 ब) 576 स) 900

अध्याय 4

घन एवं घनमूल

घन :- एक संख्या में स्वयं से ही तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या **घन** संख्या कहलाती है।

उदाहरण : संख्या 2 का घन ज्ञात कीजिए।

हल : 2 का घन या 2^3

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

यहाँ 2 का घन 8 प्राप्त हुआ है।

उदाहरण : $3^3 = \ldots\ldots\ldots$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

यहाँ 3 का घन 27 है।

- यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड तीन बार आता है तो यह संख्या एक **पूर्ण घन** कहलाती है।
- सम संख्या के घन में सदैव सम संख्या एवं विषम संख्या के घन में सदैव विषम संख्या प्राप्त होती है।
- जब किसी संख्या के अन्त के स्थान इकाई में 0, 1, 4, 5, 6, 9 तो घन संख्या के इकाई में वहीं अङ्क आता है।

उदाहरण : क्या 216 एक पूर्ण घन संख्या है? विचार कीजिए।

हल : 216 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$$216 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}\times\underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

आप यहाँ देखते हैं कि अभाज्य गुणनखण्ड में तीन-तीन समान संख्याओं का समूह बनाया जा सकता है। अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या है।

घनमूल :- किसी संख्या का घनमूल वह संख्या है जिसे परस्पर तीन बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो। घनमूल, घन ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया है।

उदाहरण : $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

यहाँ 27 का घनमूल 3 है।

4) सङ्केत "$\sqrt[3]{\ }$" घनमूल को व्यक्त करता है।

उदाहरण : $\sqrt[3]{27} = 3$ है।

अर्थात् **घनमूल, घन के प्रतिलोम सङ्क्रिया है।** घनमूल को सङ्केत "$\sqrt[3]{\ }$" से दर्शाया जाता है।

किसी संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड विधि से घनमूल ज्ञात करना –

संख्या 3375 पर विचार करें, इसका घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात कीजिए।

5	3375
5	675
5	135
3	27
3	9
3	3
	1

$$3375 = \underbrace{3 \times 3 \times 3} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

$$3375 = 3^3 \times 5^3$$

$$3375 = (3 \times 5)^3$$

$$3375 = 15^3$$

➢ किसी संख्या का विलोकनम् सूत्र से घनमूल ज्ञात करना

घनमूल ज्ञात करने की गुणनखण्ड विधि हम जानते हैं। यहाँ विलोकनम् उपसूत्र से 6 अङ्कों तक की पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना सीखेंगे।

सारणी को मुखाग्र याद कीजिये -

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संख्या का घन	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

घन संख्या की इकाई	घनमूल की इकाई
1	1
2	8
3	7
4	4

5	5
6	6
7	3
8	2
9	9
0	0

स्पष्ट है कि 0, 1, 4, 5, 6, 9 संख्या की घनमूल की इकाई भी 0, 1, 4, 5, 6, 9 ही होती है एवं $\begin{matrix}2 & & 2\\ & \times & \\ 8 & & 8\end{matrix}$ तथा $\begin{matrix}3 & & 3\\ & \times & \\ 7 & & 7\end{matrix}$ की होती है।

उदाहरण : यदि दी गई संख्या 941192 का घनमूल विलोकनम् से ज्ञात कीजिये।

1. तीन-तीन अङ्कों के बायें से समूह बनायेंगे। दो समूह हैं अतः घनमूल में 2 अङ्क होंगे।
2. घनसंख्या की इकाई 2 है अतः घनमूल की इकाई 8 होगी।
3. बायें समूह 941 से घनमूल की दहाई निश्चित करेंगे।

   $9^3 = 729$

   $10^3 = 1000$

   10^3, 941 से अधिक हो रहा है अतः 10 से कम अर्थात् 9 घनमूल की दहाई होगी अर्थात् $\sqrt[3]{941192} = 98$

अभ्यास प्रश्नावली - 4

1. निम्नलिखित संख्याओं की घन संख्या ज्ञात कीजिए?

   अ) 12 ब) 17 स) 9 द) 13

2. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या पूर्ण घन नहीं है?

अ) 100 ब) 243 स) 423 द) 512

3. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए ?

अ) $\sqrt[3]{74088}$ ब) $\sqrt[3]{1728}$

4. 64 का घनमूल ज्ञात करें तथा घनमूल का इकाई अङ्क बतायें?

5. 125 के घनमूल ज्ञात करें व घनमूल का इकाई का अङ्क बताइये?

6. विलोकनम् सूत्र से घनमूल ज्ञात कीजिए -

(1) 3375 (2) 1728 (3) 1331 (4) 64000

अध्याय 5

घात एवं घाताङ्क

हम 10^7 को 10 की घात 7 पढ़ते हैं।

उदाहरण : 81 को घाताङ्क रूप में लिखिए।

हल : $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अतः $81 = 3^4$

यहाँ 3 आधार है व घाताङ्क 4 है। 3^4 को हम 3 की घात 4 पढ़ते हैं।

उदाहरण : निम्न को घाताङ्क के रूप में व्यक्त करें।

अ) $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 5^2$

ब) $3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^4$

ऋणात्मक पूर्णाङ्क की घाताङ्क -

अ) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

ब) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

किसी शून्येतर ऋणात्मक पूर्णाङ्क या परिमेय संख्या की घाताङ्क यदि सम संख्या है, तो सरल करने पर मान धनात्मक प्राप्त होता है तथा यदि घाताङ्क विषम संख्या है तो सरल करने पर मान ऋणात्मक प्राप्त होता है।

घाताङ्कों के नियम –

घाताङ्कीय नियम – किसी शून्येतर पूर्णाङ्क a और b तथा पूर्ण संख्याओं में m व n के लिए -

- **आधार समान एवं घाताङ्क अलग-अलग होने पर**

  अ) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ब) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

  स) $a^0 = 1$ द) $(a^m)^n = a^{mn}$

  य) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (a^{-1}, a का गुणात्मक प्रतिलोम है)

- **आधार अलग-अलग एवं घाताङ्क समान होने पर -**

  अ) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ ब) $a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n}$

- $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$
- $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

नियम 1 : आधार समान होने पर घाताङ्कों का योग होता है। हम व्यापक रूप से कह सकते हैं। एक शून्येतर संख्या a के लिए जहाँ m व n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

उदाहरण : $2^5 \times 2^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

नियम 2 : एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं के भाग में घाताङ्क घटती है। हम व्यापक रूप से कह सकते हैं। एक शून्येतर संख्या a के लिए जहाँ m व n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\mathbf{a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}}$

उदाहरण : $5^7 \div 5^4$ को ज्ञात करें।

हल : $5^7 \div 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

नियम 3 : किसी भी शून्येतर संख्या की घाताङ्क शून्य (0) होने पर उसका मान 1 होता है। अर्थात् $\mathbf{a^0 = 1}$

उदाहरण : $3^5 \div 3^5$ को हल कीजिए।

हल : $3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$

नियम 4 : घातीय संख्या की घाताङ्क व्यापक रूप में किसी शून्येतर पूर्णाङ्क a के लिए $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{m.n}}$ होता है। जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ है।

उदाहरण : $(7^2)^3$ को हल कीजिए।

हल : $(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2$

$= 7^{2+2+2} = 7^6$

या $(7^2)^3 = 7^{2\times3} = 7^6$

नियम 5 : अलग-अलग आधार परन्तु समान घाताङ्क वाली संख्याओं का गुणन करने पर मान लीजिए a एवं b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा n एक धन पूर्णाङ्क हो तो $\mathbf{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$

उदाहरण : $3^4 \times 2^4$ को हल कीजिए।

हल : $3^4 \times 2^4 = (3 \times 2)^4 = (6)^4$

नियम 6 - अलग-अलग आधार किन्तु समान घाताङ्क वाली संख्याओं का भाग करने पर मान लीजिए a और b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा n एक धन पूर्णांक संख्या हो तब $\boldsymbol{a}^{\mathrm{n}} \div \mathbf{b}^{\mathrm{n}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

उदाहरण : $5^4 \div 2^4$ को हल कीजिए।

हल : $5^4 \div 2^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$

नियम 7 - ऋणात्मक घाताङ्कों की घात किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $\mathbf{a}^{-\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}$ जहाँ n एक धनात्मक परिमेय संख्या है a^{-n}, a^n का गुणात्मक प्रतिलोम है।

उदाहरण : 3^{-1} को हल कीजिए।

हल : $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (चूँकि $a^{-1} = \frac{1}{a}$)

इस प्रकार, $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

➢ **किसी बड़ी से बड़ी संख्या को मानक रूप में लिखना –**

आइए, उदाहरणों द्वारा बड़ी से बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना सीखें-

$$6578 = 6.578 \times 1000 = 6.578 \times 10^3$$
$$31000 = 3.1 \times 10000 = 3.1 \times 10^4$$
$$300000 = 3 \times 100000 = 3 \times 10^5$$
$$2340000 = 2.34 \times 1000000 = 2.34 \times 10^6$$

इस प्रकार मानक रूप में,

➢ पृथ्वी का व्यास 127576000 मी. है। तब पृथ्वी के व्यास का मानक रूप में 1.27576×10^8 मी. है।

➢ पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 384000000 मी. है। तब मानक रूप 3.84×10^8 मी. है।

❖ **किसी छोटी से छोटी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना –**

आइए, उदाहरणों द्वारा छोटी से छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना सीखें। मानक रूप व्यक्त करें।

उदाहरण : मानक रूप व्यक्त करें- 0.0004

हल : $\frac{0.0004}{10000} = \frac{4}{10000} = \frac{4}{10^4}$

$= 4 \times 10^{-4}$

उदाहरण : लाल रक्त कणिकाओं का औसत व्यास 0.000007 मिमी

हल : तब मानक रूप में,

$$0.000007 = \frac{7}{1000000}$$

$$= \frac{7}{10^6}$$

$$= 7 \times 10^{-6}$$

आपको स्मरण होगा $a^{-1} = \frac{1}{a}$

या $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

अभ्यास प्रश्नावली - 5

1. निम्नलिखित संख्या में बड़ी संख्या बताएँ।

   1) 2^5 या 5^2 2) 3^5 या 5^3

2. निम्न को सरल को करें।

   1) 2×3^2 2) $3^2 \times 2^2$

   3) $5^2 \times 2$ 4) $7^2 \times 2$

3. मान ज्ञात कीजिए।

1) $(-1)^5$ 2) $(-2)^3$

4. घाताङ्कों के नियमों का प्रयोग करते हुए सरल कीजिए और उत्तर को घाताङ्कीय रूप में लिखिए। (जब आधार समान हो।)

1) $3^4 \times 3^5$ 2) $(13)^{0\times2}$ 3) $2^5 \times 2^{10}$

4) $6^{12} \div 6^9$ 5) $a^b \div a^2$ 6) $2^{20} \div 2^{10}$

5. घाताङ्कों के नियमों का प्रयोग कर सरल करें और उत्तर को घाताङ्कीय के रूप में लिखिए। (जब आधार अलग अलग हो परन्तु घात समान हो।)

1) $3^5 \times 4^5$ 2) $6^{10} \times 2^{10}$ 3) $4^2 \times 8^2$

4) $2^5 \div 3^5$ 5) $3^4 \div 5^4$ 6) $2^7 \div 9^7$

6. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 5^{-3} का मान होगा -

(I) 5 (II) 125 (III) $\frac{1}{125}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) यदि a=−1 और b = 2 तो $a^b + b^a$ का मान होगा -

(I) $\frac{3}{2}$ (II)) $\frac{2}{3}$ (III)) $\frac{1}{2}$ (IV)) $\frac{-1}{2}$

(फ) 0.00000065 का मानक रूप होगा-

(I) 65×10^{-6} (II)) 6.5×10^{-6}

(III) 6.5×10^{-5} (IV)) 65×10^{-5}

(भ) निम्न में से 7×10^{-3} का सामान्य रूप होगा-

(I)) 0.007 (II) 0.07 (III) 0.7 (IV) 7

(म) संख्या 1000 का मानक रूप होगा-

(I)) 1×10^{-1} (II) 1×10^{-2}

(III) 1×10^{-3} (IV) 1×10^{-4}

7. निम्नलिखित बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करें?

1) 700000 2) 2180000

8. निम्न मानक रूप को सामान्य संख्या में बदलिए?

1) 2.4×10^{-4} 2) 3×10^{-3} 3) 7.1×10^{5}

9. मानक रूप में व्यक्त करें?

अ) सूर्य का व्यास 14,00,00,000 मी. है।

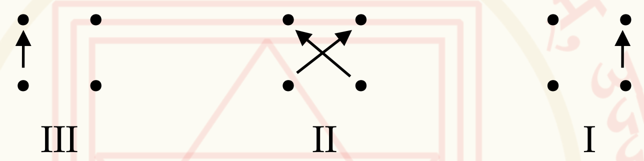
अध्याय 6

वैदिक गणित

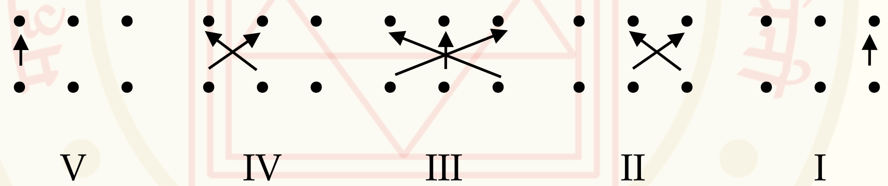
गुणन सङ्क्रिया – ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र

यह गुणनफल ज्ञात करने का सामान्य सूत्र है । सूत्र को समझने के लिए निम्न को निम्न को ध्यान से देंखे ।

- दो अङ्कों वाली संख्या के गुणा –



- तीन अङ्कों की संख्याओं के गुणा –



उदाहरण : 32 और 15 का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल :

चरण 1 – गुण्य 32 व गुणक 15 को निम्न तरह से लिखें।

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2 \\ \times\ 1\ \ 5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 – समूह बनना – दो अङ्कों का दो अङ्कों के गुणन में तीन समूह बनेंगे। जिसे III, II, I में दर्शाया गया है।

III	II	I
3	32	2
1	15	5

चरण 3 – गुणन क्रिया $3 \times 1 \ / \ 3 \times 5 + 2 \times 1 \ / \ 2 \times 5$

चरण 4 – गुणनफल $3 \ / \ 15 + 2 \ / \ 10$

$3 \ / \ 17 \ / \ 10$

संख्या को क्रमवार लिखकर और एक बार में एक अङ्क लेकर उसे दायें से बायीं ओर जोड़ने से हमें परिणाम प्राप्त होता है।

$3 \ / \ 17 \ / \ 10$

$+1 \quad +1$

$= 480$

अतः 32×15 का अभीष्ट गुणनफल = 480 प्राप्त होता है।

उदाहरण : 123 में 135 का गुणन ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से कीजिए।

हल : चरण 1 – 123 गुण्य व 135 गुणक को निम्न तरह लिखें।

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \times\,1\,3\,5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 – तीन अङ्कों का तीन अङ्कों के गुणन में पाँच समूह बनेंगे। जिसे निम्न रूप से दर्शाया V, IV, III, II एवं I है।

V	IV	III	II	I
1	12	123	23	3
1	13	135	35	5

चरण 3 – गुणनक्रिया व गुणनफल

गुणनक्रिया : 1+1/1×3+1×2/1×5+2×3+3×1/2×5+3×3/3×5

गुणनफल : 1 / 3+2 / 5 + 6 + 3 / 10 + 9 / 15

योगक्रिया : 1 / 5 / 14 / 19 / 15

संख्या को क्रमवार लिखकर और फिर एक बार में एक-एक अङ्क को दायें से बायीं ओर जोड़ते जाने से हमें अन्तिम परिणाम प्राप्त होता है।

1 / 5 / 14 / 19 / 15

+1 +2 +1

= 1 6 6 0 5

अतः 123 × 135 का अभीष्ट गुणनफल 16605 है।

निखिलम् (उपाधार) से गुणा –

यह आनुरूप्येण सूत्र से गुणा –

"निखिलम् " द्वारा किसी प्रश्न के बड़े विचलन प्राप्त हो जाते हैं। कि उनका गुणा कठिन हो जाता है । अत: निम्न उदाहरण को ध्यान से देंखे।

जैसे : 88×81 में उपाधार $8 \times 10 = 80$ लेते है एवं 32×27 में उपाधार $3 \times 10 = 30$ लेते है शेष विधि पूर्व की भाँति है।

उदाहरण : 32×33 का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत –

1) आधार = 10, उपाधार = 3×10 = 30

2) उपाधार अंक = $\frac{\text{उपाधार}}{\text{आधार}} = \frac{30}{10} = 3$

3) उपाधार से विचलन = संख्या – आधार

= 32–30 = +2/ = 33–30 = +3

दाएँ पक्ष के विचलन का गुणा = 2 × 3 = 6

चरण 1 : संख्या

$$\begin{array}{rcl} 32 & + & 2 \\ \times\ 33 & + & 3 \\ \hline & / & \end{array}$$

चरण 2 : हल दो खण्डों में होगा-

$$\begin{array}{rcl} 32 & + & 2 \\ \times\ 33 & + & 3 \\ \hline & / & 6 \end{array}$$

चरण 3 : बायें पक्ष में कोई एक संख्या और शेष संख्या का विचलन का योग करके उसे उपाधार अङ्क 3 से गुणा करेंगे।

$$\begin{array}{rcl} 32 & + & 2 \\ \times\ 33 & + & 3 \\ \hline 105 & / & \end{array}$$

(जहाँ 32 + 3 = 35 या 33 + 2 = 35 एवं 3 × 35 = 105)

चरण 4 : चरण (1) व चरण (3) को समेकित व सङ्क्रिया कर व्यवस्थित करना।

$$\begin{array}{rcl} 32 & + & 2 \\ \times\ 33 & + & 3 \end{array}$$

$\overline{}$

105 / 6 (तिरछी लाईन हटाने पर)

= 1056

अतः 32 × 33 अभीष्ट गुणनफल 1056 है।

ध्वजाङ्क सूत्र - यह अनुप्रयोग ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं ध्वजाङ्क सूत्र पर आधारित है।

1) सर्वप्रथम भाजक को सुविधाजनक दो भागों में विभाजित करते हैं, भाजक के इकाई युक्त भाग का ध्वजाङ्क और शेष भाग को मुख्याङ्क अथवा संशोधित भाजक कहते हैं। ध्वजाङ्क में केवल इकाई अथवा इकाई युक्त कई अङ्क हो सकते हैं।

2) भाग सङ्क्रिया की पूर्व विधियों के समान इस विधि में निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करते हैं।

अ) प्रथम खण्ड में भाजक के दोनों भाग लेंगे। मुख्याङ्क नीचे अर्थात् आधार स्थान पर तथा ध्वजाङ्क उसके ऊपर अर्थात् घाताङ्क के स्थान पर लिखेंगे।

ब) ध्वजाङ्क में जितने अङ्क हो, भाज्य के उतने ही अन्तिम अङ्क (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा उसके शेष अङ्क मध्य खण्ड में लिखेंगे।

स) ध्वजाङ्क विधि के लिए 524 ÷ 23 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

	प्रथम खण्ड	मध्यम खण्ड	तृतीय खण्ड
ध्वजाङ्क	3	5 2	4
मुख्याङ्क	2		
		भागफल	शेषफल

विधि –

1) मध्यखण्ड के लिए भाज्य के सबसे बायें अङ्क में मुख्याङ्क का भाग देने पर भाग का जो प्रथम अङ्क आता है उसे क्षैतिज रेखा के नीचे भागफल के निर्धारित स्थान पर लिखा जाता है।

2) प्राप्त शेषफल को बायें और से दूसरे अङ्क से पहले और नीचे लिखा जाता है। जो नया भाज्य बन जाता है।

3) नये भाज्य से निम्न सूत्र से संशोधित भाज्य प्राप्त होता है।

   संशोधित भाज्य = नया भाज्य – भागफल अङ्क × ध्वजाङ्क

4) संशोधित भाज्य में मुख्याङ्क का फिर भाग देने से पिछली क्रियाओं की पुनरावृत्ति होती है।

आइए, विधि को निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण : ध्वजाङ्क विधि से 4096 में 64 का भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ध्वजाङ्क	4		
मुख्याङ्क	6	4 0 9	6
		4	1
		6 4	0

सङ्केत –

1) भाज्य = 40 में 6 का भाग देने पर भागफल = 6 एवं शेषफल = 4 प्राप्त हुआ है।

2) संशोधित भाज्य $= 49 - 6 \times 4 = 25$।

3) 25 में मुख्याङ्क 6 का भाग दिया। भागफल का दूसरा अङ्क 4 क्षैतिज रेखा में नीचे लिखेंगे।

4) शेषफल = 1 को तृतीय खण्ड 6 से पहले और नया भाज्य = 16 प्राप्त हुआ।

5) पुन: संशोधित भाज्य $= 16 - 4 \times 4 = 0$

6) अतः भागफल = 64, शेषफल = 0

उदाहरण : 2116 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : दायें से दो-दो अङ्कों का समूह बनाए।

21	16
समूह 2	**समूह 1**

- यहाँ की इकाई का अङ्क 6 है तो वर्गमूल का अन्त 4 या 6 से होगा।
- अब दूसरे समूह को देखें चूँकि $16 < 21 < 25$ तो दहाई का अङ्क 4
- अब आपके पास दो विकल्प हैं $\sqrt[2]{2116} = 44$ या 46

हम जानते हैं $45^2 = 2025$ चूँकि $2116 > 2025$ अतः अपेक्षित वर्गमूल 45 से अधिक होगा इसलिए

$$\sqrt[2]{2116} = 46$$

अभ्यास प्रश्नावली - 6

1. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का उपयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1) $\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 43 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 42 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 21 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 301 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 401 \\ \times\ 104 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 121 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

2. आनुरूप्येण सूत्र के प्रयोग से गुणन कीजिए।

1) $\begin{array}{r} 66 \\ \times\ 63 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 32 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 73 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 71 \\ \times\ 82 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

3. ध्वजाङ्क सूत्र के उपयोग से भागफल ज्ञात कीजिए।

1) $1764 \div 42$ 2) $7396 \div 82$ 3) $992 \div 62$

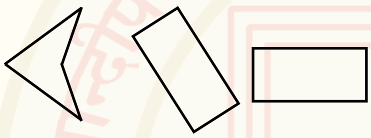
4. सूत्र विलोकनम् से वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

1) $\sqrt[2]{169}$ 2) $\sqrt[2]{324}$ 3) $\sqrt[2]{2025}$

अध्याय 7

चतुर्भुजों को समझना

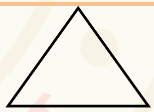
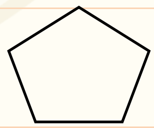
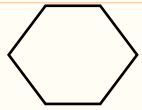
बहुभुज - बहुभुज संस्कृत के दो शब्दों से मिलकर बना है। यानि "बहु + भुज" से बना है, जिसमे "बहु" का अर्थ "अनेक" एवं "भुज" का अर्थ "भुजा" होता है केवल रेखाखण्डों से बना सरल बन्द् वक्र बहुभुज कहलाता है। जैसे- त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज आदि



वक्र जो बहुभुज है।

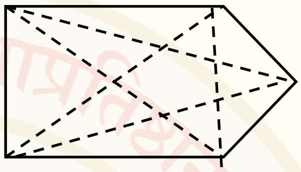
वक्र जो बहुभुज नहीं है।

इस प्रकार से बहुभुजों का वर्गीकरण

भुजा या शीर्षों की संख्या	वर्गीकरण	आकृति
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पञ्चभुज	
6	षट्भुज	
⋮	⋮	⋮

n	n - भुजा	

विकर्ण – किसी बहुभुज का विकर्ण उसके किन्हीं दो शीर्षों (क्रमागत शीर्षों को छोड़कर) को मिलाने पर प्राप्त रेखाखण्ड होता है।

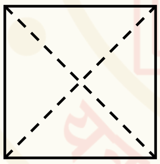


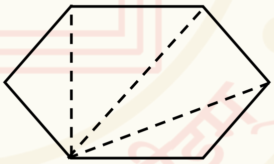
चतुर्भुज में 2 विकर्ण होते हैं।　　पञ्चभुज में .... विकर्ण होते हैं।

बहुभुज के प्रकार – उत्तल बहुभुज, अवतल बहुभुज, सम बहुभुज, विषम बहुभुज

उत्तल बहुभुज –

ऐसा बहुभुज जिसमें सभी आन्तरिक कोण 180^0 से कम होते हैं या जिसका कोई भी विकर्ण बाह्य न हो। **उत्तल बहुभुज** कहलाता है।

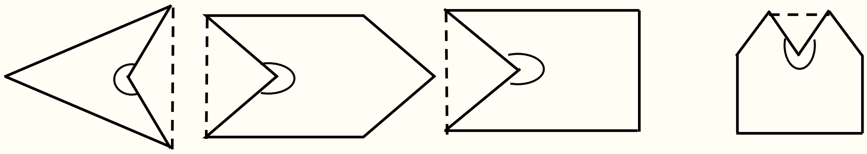




चतुर्भुज में 2 विकर्ण होते हैं।　　षट्भुज में .... विकर्ण होते हैं।

अवतल बहुभुज –

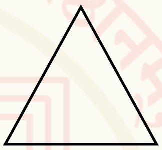
ऐसा बहुभुज जिसका एक या एक से अधिक आन्तरिक कोण 180^0 से बड़े (ज्यादा) होते हैं, या जिसका कोई भी विकर्ण बाह्य हो, **अवतल बहुभुज** कहलाता है।



यहाँ दिया गया आन्तरिक कोण 180^0 से बड़ा है और यहाँ एक विकर्ण बाह्य है।

समबहुभुज : वह बहुभुज जिसमें समान भुजाएँ और समान कोण हों। समबहुभुज कहलाता है।

जैसे : **वर्ग** **समबाहु त्रिभुज**



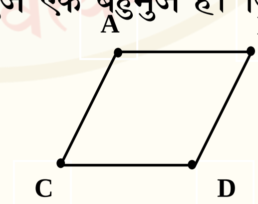
यहाँ 4 भुजाएँ व 4 कोण समान हैं। यहाँ तीनों भुजाएँ व तीनों कोण समान हैं।

विषम बहुभुज – वह बहुभुज जिसमें भुजा एवं कोण असमान हों। विषम बहुभुज कहलाता है।

जैसे :

यहाँ 4 कोण (90^0) समान हैं परन्तु भुजाएँ समान नहीं हैं। यह एक विषम बहुभुज है।

चतुर्भुज – चार भुजाओं से घिरी बन्द आकृति को चतुर्भुज कहते हैं। चतुर्भुज एक बहुभुज है। जिसमें चार किनारे (भुजा) एवं चार शीर्ष (कोने) होते हैं।



यहाँ चित्र में AB, BC, CD एवं DA चार भुजाएँ है।

जिससे चतुर्भुज ABCD निर्माण हुआ है।

चतुर्भुज की विशेषता है –

1) प्रत्येक चतुर्भुज में चार भुजाएँ होती हैं।

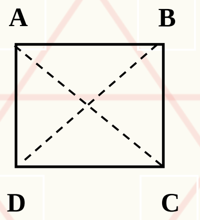
2) प्रत्येक चतुर्भुज में चार कोण होते हैं।

3) प्रत्येक चतुर्भुज में चार शीर्ष होते हैं।

4) प्रत्येक चतुर्भुज में चारों अन्त कोणों का योग 360^0 होता है।

चतुर्भुज के प्रकार –

1) **वर्ग** – ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ एवं चारों कोण समान हो (समकर्ण हो), तो यह चतुर्भुज **वर्ग** कहलाता है।

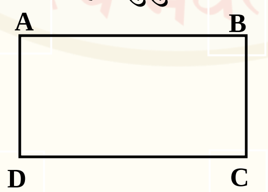


यहाँ चारों भुजा AB = BC = CD = DA

चारों कोण $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

वर्ग के विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजक होते हैं। यहाँ विकर्ण AC और BD है।

2) **आयत** – ऐसा चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाएँ बराबर (समान) हो एवं चारों कोण 90^0 (अंश) हो तो यह चतुर्भुज आयत कहलाता है।



यहाँ सम्मुख भुजाएँ AB = DC एवं CB = DA

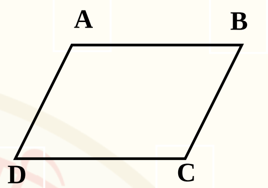
चारों कोण $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

3) **समान्तर चतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज जिसमे सम्मुख भुजाएँ समान एवं समान्तर हो तथा सम्मुख कोण समान (बराबर) हो तो यह चतुर्भुज **समान्तर चतुर्भुज** कहलाता है। समान्तर भुजाओं को ` ∥ ' चिह्न द्वारा दर्शाया जाता हैं।

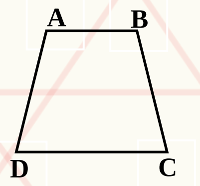
यहाँ सम्मुख भुजाएँ

AD ∥ BC एवं AB ∥ DC

सम्मुख कोण ∠A = ∠C एवं ∠B = ∠D



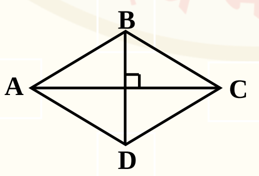
4) **समलम्ब चतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म (जोड़ा) समान्तर हो, तो वह चतुर्भुज **समलम्ब चतुर्भुज** कहलाता है।



यहाँ सम्मुख भुजाएँ

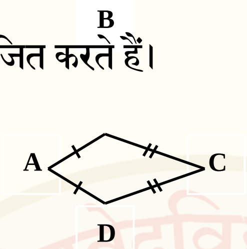
AB | | DC

5) **समचतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज जिसमें चारों भुजाएँ समान होती हैं और दोनों विकर्ण एक-दूसरे को 90^0 अंश पर समद्विभाजित करते हैं साथ ही विकर्ण अतुल्य होते है। तब वह **समचतुर्भुज** कहलाता है।



यहाँ विकर्ण AC और BD एक दूसरे को 90^0 यह समद्विभाजित करते हैं।

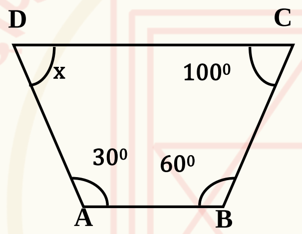
6) **पतंग** – ऐसा चतुर्भुज जिसमें अलग-अलग आसन्न भुजाओं के दो युग्म होते हैं जिनकी लम्बाई समान होती है। पतंग कहलाता है। तथा विकर्ण एक-दूसरे को 90^0 समद्विभाजित करते हैं।



आइए, चतुर्भुज में कोणों पर आधारित सवालों का हल करना सीखें।

1) निम्नाङ्कित आकृतियों में x का (कोण की माप) ज्ञात कीजिए।

(अ)



हल : (अ) आकृति में,

हम जानते हैं, चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 360^0 है।

तब, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$30^0 + 60^0 + 100^0 + x = 360^0$

या $190^0 + x = 360^0$

या $x = 360^0 - 190^0 = 170^0$

$x = 170^0$

अभ्यास प्रश्नावली - 7

1. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

अ) ऐसा बहुभुज जिसके सभी कोण व भुजा समान हो .... कहलाता है।

(समबहुभुज / विषम बहुभुज)

ब) ऐसा बहुभुज जिसमें विकर्ण बाह्य हो.................कहलाता है।

(उत्तल / अवतल)

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) एक समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो .... कहलाता है-

(I) आयत (II) समचतुर्भुज (III) समलम्ब चतुर्भुज (IV) पतंग

(ब) वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ समान हो एवं विकर्ण एक-दूसरे से लम्ब समद्विभाजक होते हैं-

(I) वर्ग (II) समलम्ब चतुर्भुज (III) समचतुर्भुज (IV) आयत

(स) चतुर्भुज के चारों अन्त:कोणों की मापों का योगफल कितना होता है-

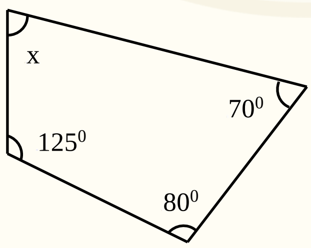
(I) 360^0 (II) 540^0 (III) 180^0 (IV) 90^0

(द) पञ्चभुज में विकर्णों द्वारा कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं।

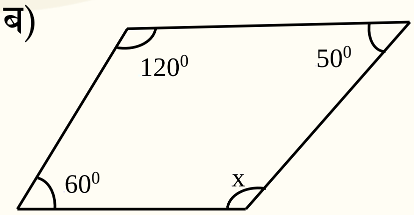
(I) 3 (II) 4 (III) 2 (IV) 1

3. निम्न चतुर्भुज कि आकृति को पहचान कर अज्ञात कोणों (x) का मान ज्ञात कीजिए।

अ)



ब)



5. सत्य है या असत्य बताइये।

अ) सभी वर्ग, आयत होते हैं।

ब) आयत की सभी भुजाएँ बराबर होती है।

स) समचतुर्भुज की आकृति पतंग के समान होती है।

द) सभी समान्तर चतुर्भुज, वर्ग होते हैं।

6. समान्तर चतुर्भुज एवं समलम्ब चतुर्भुज में अन्तर बताइये।

अध्याय 8

बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

- ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित हो **चर राशि** कहलाती है। हम चर राशि व्यक्त करने के लिए अक्षरों a, b, x, y ... इत्यादि का प्रयोग करते हैं।
- अचर राशि जिसका मान परिवर्तित न हो **अचर राशि** है इसके उदाहरणों में 4, –10, 100 इत्यादि हैं।

बीजीय व्यंजक – हम चर और अचर राशि को संयोजित कर बीजीय व्यंजक बनाते हैं। जैसे- $\boldsymbol{x+5,\ 2x+1,\ 3x-2}$

नोट : बीजीय व्यंजक में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती हैं।

बीजीय व्यंजक के पद – जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है। उसे एकपद कहते हैं। दो पदों वाला व्यंजक द्विपद कहलाता है एवं तीन पदों वाला व्यंजक त्रिपद कहलाता है। इस प्रकार से बहुपद में पदों की संख्या एक या एक से अधिक कुछ भी हो सकती है। बहुपद के विषय में हम आगे की कक्षा में चर्चा करेंगे।

एकपद के उदाहरण : $3y^2, 3xy,\ 4x,\ 5xyz, 5y^2z$

द्विपद के उदाहरण : $3x + y, 3xy + 2z, 3y^2 + 4z, 3y^2 - z^2$

त्रिपद के उदाहरण : $a + b + c,\ 3a + 3x + z, a + y + b, x^2 + y + z$

बीजीय पद के गुणनखण्ड – बीजीय व्यंजक का एक पद कई चरों व अचरों का गुणनफल हो सकता है। एक व्यंजक के तथा पदों के गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं।

जैसे : $3y^2 + 2xz$

पद	चर	अचर
$\mathbf{3y^2, 2xz}$	x, y, z	$3, 2$

$3y^2 \quad + \quad 2xz$

$= \quad 3 \times y \times y + 2 \times x \times z$

गुणांक – किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणनखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है। गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

जैसे : $3xy$ में xy का गुणांक $= 3$

$3xy$ में $3x$ का गुणांक $= y$

$3xy$ में 3 का गुणांक $= xy$

$10x^2y$ में x^2 का गुणांक $= 10y$

समान और असमान पद –

- जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हों तो वे पद **समान पद** कहलाते हैं।
- जब पदों के बीजीय के मध्य गुणनखण्ड भिन्न भिन्न हो तो वे पद **असमान पद** कहलाते हैं।

आइये, उदाहरण से समझते हैं।

$2xy\ ,\ 7x\ ,\ 12x\ ,\ 5x^2\ ,\ -3x\ ,\ 9y^2\ ,\ -4xy\ ,\ -4x^2$

इनमें समान पद इस प्रकार हैं।

1) $7x\ , 12x$ व $-3x$

2) $5x^2$ व $-4x^2$

3) $2xy$ व $4xy$

इसके विपरीत $4xy$ और $9y^2$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखण्ड हैं, वे असमान पद हैं। इस प्रकार $12x$ व $-4x^2$ भी असमान पद है।

का योग एवं व्यवकलन – बीजीय पदों के योग और अन्तर समान पदों में होता है। ओर जो पद समान नहीं है उन्हें छोड़ दिया जाता है।

बीजीय व्यंजकों के मध्य योग -

उदाहरण : $3x + 4y$ में $x + 2y$ को योगफल ज्ञात करें।

हल : $(3x + 4y)\ +\ (x + 2y)$

समान पद को व्यवस्थित करने पर-

$= \quad (3x + x)\ +\ (4y + 2y)$

$= \quad 4x\ +\ 6y$

बीजीय व्यंजकों के मध्य व्यवकलन -

उदाहरण : $8x\ +\ 5a$ में से $3x\ +\ 2a$ को घटाइये।

हल : $8x\ +\ 5a - \ (3x\ +\ 2a)$

$= \quad 8x\ +\ 5a - 3x - 2a$

समान पदों को व्यवस्थित करने पर

$= \quad 8x - 3x + 5a - 2a$

$= \quad 5x + 3a$

बीजीय व्यंजकों के मध्य गुणन – बीजीय पदों के गुणनफल **में** दो समान अव्यक्त राशि का गुणन उस राशि का वर्ग होता है। तीन समान अव्यक्तकों का गुणन घन होता है।

उदाहरण : $3xy$ और $2y$ का गुणा कीजिए।

हल : $(3xy) \times (2y)$

$= \quad 3 \times 2 \times x \times y \times y$

$= \quad 6xy^2$

सर्वसमिकाएँ – सर्वसमिका एक ऐसी समिका है, जो चरों के प्रत्येक मानों के लिए सत्य होती है।

मानक सर्वसमिकाएँ –

$(\boldsymbol{a+b})^2 = \boldsymbol{a^2+b^2+2ab}$ **(प्रथम सर्वसमिका)**

$(\boldsymbol{a-b})^2 = \boldsymbol{a^2+b^2-2ab}$ **(द्वितीय सर्वसमिका)**

$(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a-b}) = \boldsymbol{a^2-b^2}$ **(तृतीय सर्वसमिका)**

उदाहरण : $(102)^2$

हल : $(102)^2 = (100 + 2)^2$

हम जानते हैं

$(\boldsymbol{a+b})^2 = \boldsymbol{a^2+b^2+2ab}$

$$(100+2)^2 = 100^2 + 2^2 + 2 \times 100 \times 2$$

उदाहरण : $(98)^2$

हल : $(98)^2 = (100-2)^2$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}$$

$$= 10000 + 4 - 400$$

$$= 10004 - 400$$

$$= 9604$$

उदाहरण : $(3x - 4y)\,(3x + 4y)$

हल : $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

$a = 3x$, $b = 4y$

$$(3x-4y)\,(3x+4y) = (3x)^2 - (4y)^2$$

$$= 9x^2 - 16y^2$$

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) $x = 2$ रखने पर व्यंजक $x^2 - 2$ का मान होगा-

(I) 2 (II) 4 (III) 8 (IV) 10

(ब) $8m^2$+$3n^2$+1 में से $3m^2 - n^2$ –4 घटाने पर प्राप्त होगा-

(I) $5m^2$+$2n^2$+5 (II) $5m^2$+$4n^2$+5

(III) $5m^2$+$2n^2$+3 (IV) $5m^2 - 2n^2$ –3

2. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को एकपदी, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

$4x^2$, $3a + b$, $3t^2$, $4x + z$, $a + b + c$, $2c + a + x$,

$P + 3x$, $9x - 2z$, $2z^2y^2$, $9x - y + 2$, $10x^2y^2z$,

$4x - 12y^2z$, $4x + 3a^2b + c$

3. दिए गए पदों में गुणांक बताइये ?

1) $10x^2y^2z$ में z का 2) $9xy^2z$ में xy^2 का

4. निम्नलिखित में समान पदों को सही-मिलान कीजिए।

1) $2nm$: $15x^2y^2z^2$

2) $5x^2y^2z^2$: $5nm$

3) $7a^2b$: $-11a^2b$

5. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को सरक करें-

1) $(x + 2y)$ और $(3x + y)$ 2) $8a^2t$ और $12a^2t$

1) $11a^2bc$ में से $3a^2bc$ 2) $7pq^2$ में से $-3pq^2$

6. निम्नलिखित युग्मों के प्रत्येक व्यंजक का गुणन कीजिए।

1) $8xy$, $2x$ 2) $(4x + y)$, $5x$

7. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1) $(x + 4)(x + 4)$ 2) $(3x - 4)(3x - 4)$

3) $(2x + 4)(2x - 4)$ 4) $(3y + 2)(3y - 2)$

8. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए वर्गों को ज्ञात कीजिए।

1) $(2 + y)^2$ 2) $(P + 4)^2$ 3) $(2x + 3y)^2$

अध्याय 9

राशियों की तुलना

प्रतिशत – प्रतिशत का अर्थ है 100 में से कितना यदि 2 में से 1 है, तो 100 में से 50 होगा। अर्थात् $\frac{1}{2}$ में हर को 100 बनाया जाता है।

$$= \frac{(1\times50)}{(2\times50)} = \frac{50}{100} = 50\%$$

इसे हम 50% पढ़ते हैं।

उदाहरण : वेद प्रतिष्ठान उज्जैन की एक पाठशाला में पौधारोपण के अन्तर्गत 25% जामुन, 15% नीम तथा शेष पीपल के पौधे लगाए गए हैं ? यदि पौधों की संख्या 80 हो, तो

1) जामुन के पौधों की संख्या कितनी है ?
2) नीम के पौधों की संख्या कितनी है ?
3) जामुन एवं नीम के पौधों का अनुपात क्या है ?
4) पीपल के पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

हल : दिया है - कुल पौधों की संख्या 80 है ?

1) जामुन के पौधों की संख्या = 80 का 25%

$$= 80 \times \frac{25}{100}$$

$$= 80 \times \frac{1}{4}$$

$$= 20$$

अतः जामुन के पौधों की संख्या 20 है।

2) नीम के पौधों की संख्या $= 80$ का 15%

$$= 80 \times \frac{15}{100}$$

$$= 80 \times \frac{3}{20}$$

$$= 4 \times 3 = 12$$

अतः नीम के पौधों की संख्या 12 है।

3) जामुन एवं नीम की पौधों का अनुपात $= 20 : 12$

या $= 5 : 3$

4) पीपल के पौधों की संख्या = कुल पौधे–(नीम के पौधे+जामुन के पौधे)

$$= 80 - (20 + 12)$$

$$= 80 - 32$$

= 48 पौधे

अतः पीपल के पौधों की संख्या 48 है।

वृद्धि प्रतिशत अथवा ह्रास (कमी) प्रतिशत ज्ञात करना –

उदाहरण : एक गेंद का मूल्य 20 है एक वर्ष बाद गेंद के मूल्य में 30% वृद्धि हो गई है तो गेंद का नया मूल्य बताइये ?

आराध्य कहता है - सबसे पहले तो मूल्य में वृद्धि ज्ञात करेंगे जो कि 20 रु. का 30% है और फिर नया मूल्य ज्ञात करेंगे।

20 रु. का 30% $= 20 \times \frac{30}{100} = 6$

नया मूल्य = पूराना मूल्य + वृद्धि

$= \quad 20 + 6 \quad = \quad 26$ रु.

इसके विपरीत एक गेंद 20 रु. की है। गेंद की अधिक बिक्री (विक्रय मूल्य) करने के लिए उसके मूल्य को 10% घटा दिया गया तो गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

मूल्य में कमी = 20 का 10%

$= 20 \times \frac{10}{100} = 2$

नया मूल्य = पूराना मूल्य – कमी

$= 20 - 2 = 18$

बट्टा ज्ञात करना – जब सामान्यतः कोई व्यापारी अपने ग्राहक को कोई समान बेचता है, तो अंकित मूल्य पर छूट देता है, इसी छूट को बट्टा कहते हैं।

बट्टा (छूट) = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

ध्यान रहे : बट्टा (छूट) हमेशा अंकित मूल्य पर ही दिया जाता है।

उदाहरण : 50 रु. अंकित मूल्य वाले बिस्किट के पैकेट को 40 में विक्रय (बेच) कर दिया जाता है तो बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना होगा।

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= 50 – 40 रु.

= 10 रु.

ध्यान देवें- यहाँ बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना होगा।

50 रु. अंकित मूल्य पर 10 रु. बट्टा है।

तो 10 रु. अंकित मूल्य पर कितना प्रतिशत बट्टा होगा ?

बट्टा प्रतिशत $= \frac{10}{50} \times 100$

बट्टा प्रतिशत = 20 %

साधारण ब्याज :

'जब ब्याज केवल मूलधन पर निश्चित समय के लिए एक ही दर पर लगाया जाता है, तब उसे **साधारण ब्याज** (simple interest) कहते हैं।' इसे 'S.I.' से दर्शाते हैं।

➢ सूत्र: **साधारण ब्याज** $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

या S. I. $= \frac{p \times r \times t}{100}$ **या** S.I. = **p** × **r** % × **t**

➢ जहाँ **मिश्रधन = मुलधन + ब्याज**

या A = P + S.I.

उदाहरणार्थ: राजेश 1200 रुपये 3% की दर से उधार लेता है यदि उस धन राशि को 2 वर्ष एवं 6 माह में चुकाना चाहता है। उसे कितना ब्याज चुकाना होगा ?

राजेश गुरुजी के पास जाता है कहता है –

गुरुजी 2 वर्ष 6 माह का ब्याज की गणना कैसे होगी ?

गुरुजी – समय को वर्षों में बदलें, एक वर्ष में 12 माह होते हैं।

माह को वर्षों में बदलने के लिए 12 से भाग देंगे।

उधार धन (मूलधन) = 1200 रु.

ब्याज की दर = 3% वार्षिक

समय = 2 वर्ष 6 माह

= 2 वर्ष + $\frac{6}{12}$ वर्ष

= $\left(2+\frac{1}{2}\right)$ वर्ष या $\frac{5}{2}$ वर्ष

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$= 1200 \times \frac{3}{100} \times \frac{5}{2}$$

$$= 90 \text{ रु.}$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

$$= 1200 + 90$$

$$= 1290 \text{ रु.}$$

चक्रवृद्धि ब्याज – ऐसा ब्याज जिसमें मूलधन के साथ-साथ ब्याज पर भी ब्याज जुड़ता है इसे चक्रवृद्धि ब्याज (compound interest)कहते हैं। चक्रवृद्धि ब्याज को C.I. से दर्शाते हैं।

वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने का सूत्र :

- **चक्रवृद्धि मिश्रधन**= $\text{मूलधन}\left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$

  या $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{n}$

- **चक्रवृद्धि ब्याज** = $\text{मूलधन}\left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मूलधन}$

  या $C.I. = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{n} - P$

जहाँ, A = मिश्रधन, P = मूलधन, R = दर, n = समय

उदाहरण : यदि चक्रवृद्धि ब्याज दर 10000 रु., 1 वर्ष के लिए उधार लिया जाए तो 2% वार्षिक दर से कुल कितना धन वापस लौटाना (मिश्रधन) होगा।

हल : दिया है - मूलधन = 10000 रु., दर = 2%, समय = 1 वर्ष

हम जानते है,

मिश्रधन $= \mathbf{P}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathbf{n}}$

$= 10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{1}$

$= 10000\left(\frac{100+2}{100}\right)^{1}$

$= 10000\left(\frac{102}{100}\right) = 10200$ रु.

अतः 1 वर्ष बाद 10200 रुपये ब्याज वापस लौटाना होगा।

उदाहरण : यदि 20000 रु., 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया जाए तो 3% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज कितना देना होगा।

हल : दिया है - मूलधन = 20000, दर = 3% वार्षिक, समय = 2 वर्ष

मिश्रधन $= \mathbf{P}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathbf{n}}$

$= 20000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{2}$

$= 20000\left(\frac{100+3}{100}\right)^{2}$

$= 10000\left(\frac{103}{100}\right)^{2}$

$= 20000 \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100}$

= 21218 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

C.I. = A – P

= 21218 – 20000

= 1218 रु.

अभ्यास प्रश्नावली - 9

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 40 का कितना प्रतिशत 16 है -

(I) 20% (II) 40% (III) 60% (IV) 80%

(ब) x का 40% = 200 तो x का मान होगा -

(I) 240 (II) 800 (III) 500 (IV) 5

2. गणेश के खेत में कुल 100 वृक्ष हैं जिनमें 30% वृक्ष छायादार तथा शेष फलदार वृक्ष हैं तो बताओ गणेश के खेत में फलदार वृक्षों की संख्या कितनी हैं।

3. एक वस्तु का अंकित मूल्य 1500 रु. और उसे 1000 रु. विक्रय कर दिया जाता है ? बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना होगा।

4. अंकित मूल्य पर 30% छूट (बट्टा) देने पर एक पञ्चपात्र का सेट 140 रु. में बेचा गया, पञ्चपात्र के सेट का अंकित मूल्य क्या होगा ?

5. साधारण ब्याज की ज्ञात कीजिए।

1) मूलधन = 1500, दर = 1%, समय = 2 वर्ष 6 माह

5) मूलधन = 800, दर = 3%, समय = 5 वर्ष

6. चक्रवृद्धि ब्याज पर लिये गये धन का मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

1) मूलधन = 50000, दर = 2%, समय = 1 वर्ष

2) मूलधन = 40000, दर = 3%, समय = 2 वर्ष

7. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

1) मूलधन = 20000, दर = 3%, समय = 1 वर्ष

8. 30000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से संयोजित करने पर कुल राशि एवं ब्याज ज्ञात कीजिए।

9. महेश में 70000, 3 वर्ष के लिए 4% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया है। तो चक्रवृद्धि ब्याज की राशि क्या होगी ?

अध्याय 10

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

सीधा अनुपात –

जब दो राशि इस प्रकार सम्बन्धित हो कि एक का मान बढ़ाने पर दूसरे का मान बढ़े या एक मान घटाने पर दूसरे का भी मान घटे, तो उन दोनों राशियों में **सीधा सम्बन्ध** होता है।

➢ यदि दो राशि में **सीधा सम्बन्ध** है तो आर्यभट्टीयम् के निम्न श्लोक के द्वारा हम अज्ञात राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं।

त्रैराशिकफलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा ।

लब्धं प्रमाणभाजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात् ॥

(आर्यभट्टीयम् , गणितपाद : 26)

अर्थात् त्रैराशिक को फल राशि को इच्छा राशि से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल को प्रमाण से भाग देने पर इच्छा फल प्राप्त होता है।

$$\textbf{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा राशि}}{\text{प्रमाण}}$$

उदाहरण : यदि 4 कलम की कीमत 20 रूपये है तो 40 रु. के कितने कलम खरीदी जा सकती है।

हल : मान लीजिए कलम की संख्या x है।

जिनकी कीमत 40 रु. है। यहाँ कलम की संख्या तथा कलम की कीमत के मध्य सीधा सम्बन्ध है।

कलम की संख्या	::	**कलम की कीमत**
↑ 4		20 ↑
x		40

$$4 : x :: 20 : 40$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$4 \times 40 = 20 \times x$$

$$\frac{4 \times 40}{20} = x$$

या $x = 8$

अतः 40 रु. के 8 कलम खरीदी जाएगी।

उदाहरण : एक पैसेंजर रेलगाड़ी एक समान चाल से 50 किमी की दूरी 20 मिनट में तय करती है तो 100 किमी की दूरी को कितने मिनट में तय करेगी।

हल : मान लीजिए यहाँ रेलगाड़ी 100 किमी की दूरी को x समय में तय करेगी।

यहाँ तय की दूरी और समय के मध्य सीधा सम्बन्ध है अर्थात् दूरी बढ़ने के साथ रेलगाड़ी द्वारा लिया गया समय भी उसी अनुपात में बढ़ता है।

रेलगाड़ी द्वारा तय की दूरी	::	**रेलगाड़ी के द्वारा लिया गया समय**
$50 : 20$	::	$100 : x$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$50 \times x = 20 \times 100$$

$$x = \frac{20 \times 100}{50}$$

या $\quad x = 40$ मिनट

अतः रेलगाड़ी 100 किमी की दूरी को 40 मिनट में तय करेगी।

प्रतिलोम सम्बन्ध – दो चर में सम्बन्ध इस प्रकार हो कि एक चर के मान बढ़ाने, पर दूसरे चर का मान घट जाता है। या एक चर का मान घटाने पर, दूसरे चर का मान बढ़ जाता है, तो यह सम्बन्ध **प्रतिलोम सम्बन्ध** कहलाता है। इसमें एक चर, दूसरे चर का व्युत्क्रमानुपाती कहलाता है।

उदाहरण : एक खेत की खरपतवार का काम 4 मजदूर 8 दिन में पूरा करते है यदि उसी काम को 16 मजदूर करें तो काम कितने दिन में पूरा किया जायेगा।

हल : यहाँ मजदूर की संख्या तथा खरपतवार के कार्य पूर्ण करने में लगा समय के मध्य प्रतिलोम (व्युत्क्रम) सम्बन्ध है।

मजदूरों की संख्या	**कार्य पूर्ण करने में दिया समय (दिनों में)**
↑ 4	8 ↓
16	x

माना की कार्य करने में लगने वाले दिन x है।

$$16 : 4 \quad :: \quad 8 : x$$

$$\frac{16}{4} = \frac{8}{x}$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों को गुणनफल

$$16 \times x = 4 \times 8$$

$$x = \frac{4 \times 8}{16}$$

या $$x = \frac{32}{16}$$

अतः 16 मजदूर के द्वारा कार्य पूर्ण करने में 2 दिन लगेंगे।

अभ्यास प्रश्नावली - 10

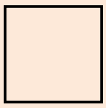
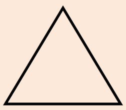
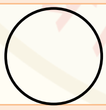
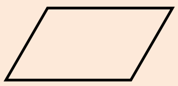
1. अगर 7 किलो टमाटर का मूल्य 35 रुपये है तो हमें 10 किलो टमाटर के लिए कितना भुगतान करना होगा ?
2. यदि 3 क्विंटल सोयाबीन कीमत 6,000 रुपये है तो 4,000 रुपये में कितने क्विंटल सोयाबीन खरीदेंगे ?
3. दो मोबाइल की कीमत 10,000 रुपये है तो 5 ऐसे मोबाइल खरीदने के लिए कितने रुपयों की आवश्यकता होगी ?

1. एक गाड़ी एक स्थान तक पहुँचने में 20 कि.मी./घण्टा की चाल से दूरी तय करती है तो बताइये 60 कि.मी. की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा ?
2. एक छात्रावास में 100 विद्यार्थी हैं और उनके भोजन की सामग्री 20 दिन के लिए पर्याप्त है यदि समूह में 25 विद्यार्थी और आ जाए (कुल 125) तो यह भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी ?
3. एक गौशाला में 20 गायों के लिए 6 दिन के लिए पर्याप्त भोजन है यदि इस गौशाला में 10 गाय और आ जाए तो भोजन कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा ?

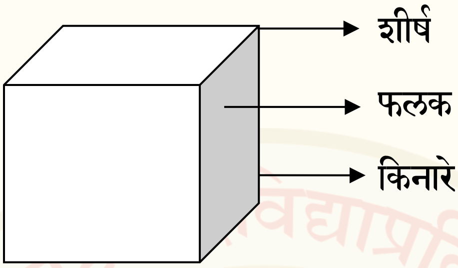
अध्याय 11

क्षेत्रमिति

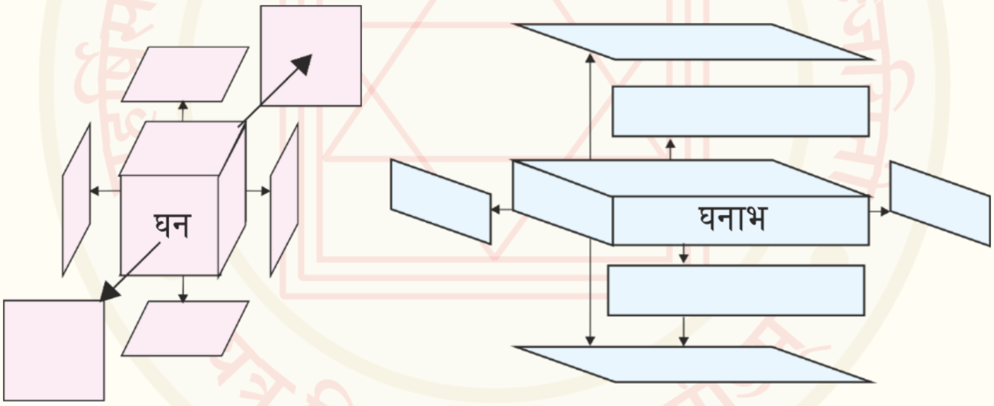
- किसी बन्द् समतल आकृति (द्विविमीय आकृति) की सीमा के चारों ओर की दूरी उसका **परिमाप** कहलाता है।
- किसी बन्द् समतल आकृति द्वारा घिरे हुआ क्षेत्र, उस आकृति का **क्षेत्रफल** कहलाता है।
- द्विविमीय आकृति के क्षेत्रफल सूत्र :-

क्र.	आकृति	आकार	क्षेत्रफल
1)		वर्ग	भुजा $\times$ भुजा $a \times a$
2)		आयत	लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\ell \times b$
3)		त्रिभुज	$\frac{1}{2}$ $\times$ आधार $\times$ ऊँचाई $\frac{1}{2} \times b \times h$
4)		वृत्त	π (त्रिज्या)^2 πr^2
5)		समान्तर चतुर्भुज	आधार $\times$ ऊँचाई $b \times h$

- ठोस आकृतियों के **फलक, किनारे एवं शीर्ष** को देखकर आसानी से पहचान कर सकते हैं।



- आपने देखा होगा कुछ आकारों में दो या दो से अधिक फलक या पृष्ठ एक जैसे (सर्वांगसम) होते हैं। निम्न आकृतियों में एक जैसे (सर्वांगसम) फलकों को पहचानें।

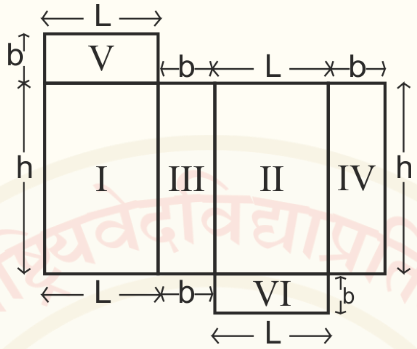


पृष्ठीय क्षेत्रफल –

आप किसी ठोस के सम्पूर्ण पृष्ठों द्वारा घेरा गया क्षेत्र उस आकृति का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** कहलाता है। एक ठोस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल उस आकृति के फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान रहता है।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

घनाभ की लम्बाई ℓ, चौड़ाई b एवं ऊँचाई h से दर्शाया गया है।



घनाभ का क्षेत्रफल = क्षेत्रफल1 + क्षेत्रफल2 + क्षेत्रफल 3 + क्षेत्रफल4 + क्षेत्रफल5 + क्षेत्रफल6

= ऊँ.× ल. + ऊँ.× ल. + चौ.× ऊँ. +चौ.× ऊँ. +ल.× चौ. + ल.× चौ.

$= h \times l + h \times l + b \times h + b \times h + l \times b + l \times b$

$= 2hl + 2bh + 2lb$

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \mathbf{2(lb + bh + hl)}$

➢ कमरे का चारों ओर पुताई हेतु घनाभ का तल (फर्श) एवं छत को छोड़ना होता है। केवल चारों दीवारों का ही क्षेत्रफल ज्ञात करना होता है। इसलिए **घनाभ का पाश्र्व पृष्ठीय क्षेत्रफल** कहते हैं। अर्थात्

घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल – छत एवं फर्श का क्षेत्रफल

$= 2\,(lb + bh + hl) - 2lb$

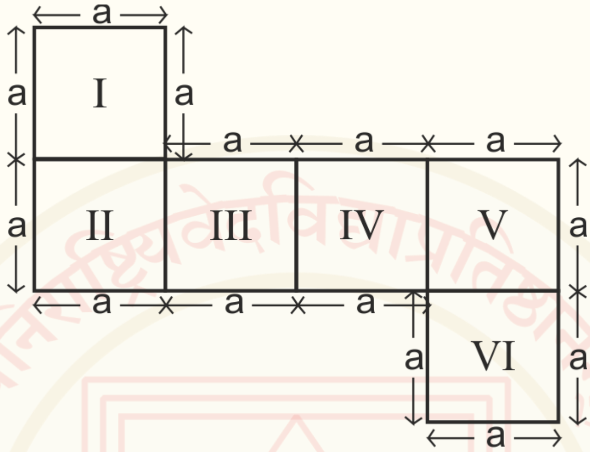
$= 2bh + 2lh$

घनाभ का पाश्र्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \mathbf{2 \times (b + l) \times h}$

या **घनाभ का पाश्र्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत(फर्श) का परिमाप × ऊँचाई**

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल –

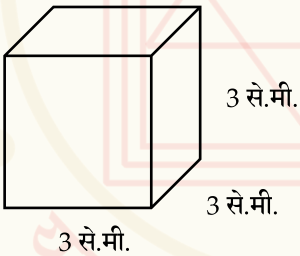
घन के सभी फलक वर्गाकार होते हैं प्रत्येक भुजा को a से निरूपित करते हैं।



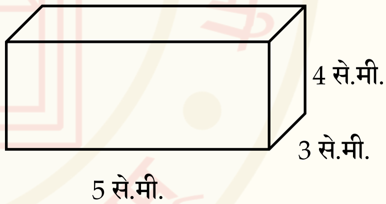
अतः **घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6** $\times$ एक वर्गाकार फलक का क्षेत्रफल

उदाहरण : निम्न आकृतियों (घन एवं घनाभ) के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

1)



2)



हल : 1) दी गई आकृति का आकार घन है।

दिया है – घन की भुजा = 3 से.मी.

हम जानते हैं

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$

$= 6 \times (3)^2$

$= 6 \times 9 = 54$ वर्ग से.मी.

2) दी गई आकृति का आकार घनाभ है।

दिया है - घनाभ की लम्बाई $(l) = 3$ से.मी. , चौड़ाई $(b) = 5$ से.मी. ,

ऊँचाई $(c) = 4$ से.मी.

हम जानते हैं,

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \mathbf{2\ (lb + bh + hl)}$

$= 2\ (3 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 3)$

$= 2\ (15 + 20 + 12)$

$= 2\ (47) \quad = 94$ वर्ग से.मी.

उदाहरण : एक घनाभ के आकार का सूटकेस है जिसकी लम्बाई 30 से.मी., चौड़ाई 40 से.मी. तथा ऊँचाई 20 से.मी. है। यदि सूटकेस को ऊपर से तिरपाल या कपड़े से ढकना है तो कितने से.मी. कपड़े की आवश्यकता होगी।

हल : दिया है- सूटकेस की लम्बाई $l = 30$ से.मी., चौड़ाई $b = 40$ से.मी., ऊँचाई $h = 20$ से.मी.

अतः **सूटकेस का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \mathbf{2\ (lb + bh + hl)}$

$= 2\ (30 \times 40 + 40 \times 20 + 20 \times 30)$

$= 2(1200 + 800 + 600)$

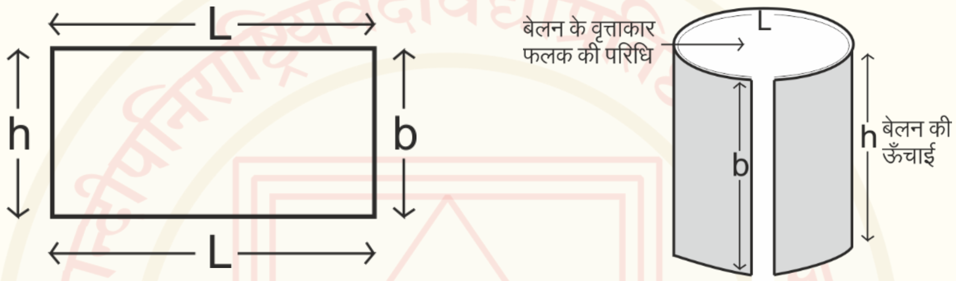
$= 2\ (2600) = 5200$ वर्ग से.मी. अतः

सूटकेस पर कपड़े ढकने के लिए 5200 वर्ग से.मी. कपड़े की आवश्यकता होगी।

➢ बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

गतिविधि –

एक आयताकार कागज लेकर उसकी लम्बाई व चौड़ाई अंकित कर दीजिए चित्रों के अनुसार सिरों को मोड़कर अतिव्यापन के टेप के सहायता से चिपकाए। इस प्रकार एक बेलन का वक्रपृष्ठ का निर्माण होगा।



आयताकार कागज की लम्बाई l, बेलन का वृत्ताकार आधार परिधि $(2\pi r)$ से सम्पादित हो गई है और चौड़ाई (b) ने बेलन की ऊँचाई (h) का रूप ले लिया है।

अतः बेलन का वक्रपृष्ठ = आयताकार कागज का क्षेत्रफल

$= l \times b \qquad (l = 2\pi r, b = h)$

$= 2\pi r \times h \qquad = \quad 2\pi rh$

बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल = $\mathbf{2\pi rh}$ वर्ग इकाई

➢ बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल + दोनों वृत्ताकार फलकों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad = \quad 2\pi r\,(h + r)$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = $\mathbf{2\pi r\,(h + r)}$ वर्ग इकाई

उदाहरण : एक बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 14 से.मी. व ऊँचाई 7 से.मी. हो (जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$)

हल : दिया बेलन की त्रिज्या = 14 से.मी. , बेलन की ऊँचाई = 7 से.मी.

हम जानते हैं,

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= \mathbf{2\pi r\,(r + h)}$

$= 2 \times \pi \times 14\,(7 + 14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14\,(21)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21$

= 1848 वर्ग से.मी.

अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल 1848 वर्ग से.मी. है।

अभ्यास प्रश्नावली – 11

1. निम्नलिखित सूत्रों को लिखकर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

(अ) घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

(ब) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

(स) घन के एक फलक का क्षेत्रफल = ...

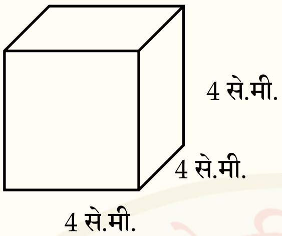
(द) घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

(प) बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल = ...

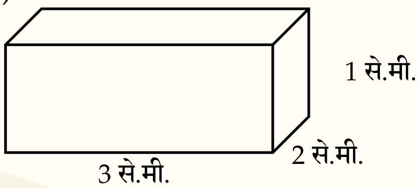
(फ) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = ...

2. निम्नांकित आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

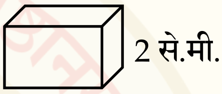
1)



2)

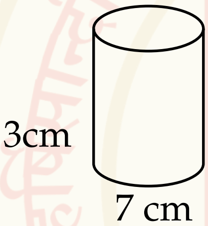


3. एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
जिसकी एक भुजा 2 से.मी. हो।

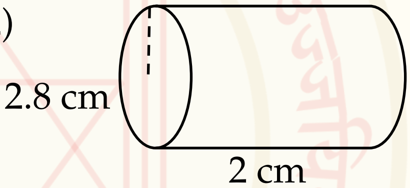


4. निम्न बेलन आकार आकृतियों के वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(1)



(2)



5. उस बेलन वक्र पृष्ठ क्या होगा ? जिसकी ऊँचाई 14 से.मी.एवं त्रिज्या 4 से.मी. है।

6. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी त्रिज्या 21 से.मी. है एवं ऊँचाई 2 से.मी. है।

7. एक बेलन का व्यास 14 से.मी. व ऊँचाई 5 से.मी. है तो बेलन का वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 से. मी.^{2} है।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in