आज़ादी का अमृत महोत्सव

गणित

अभ्यास पुस्तिका

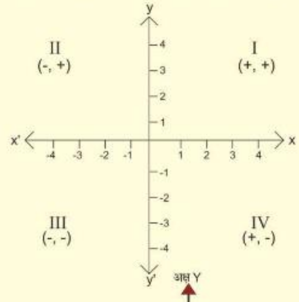
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

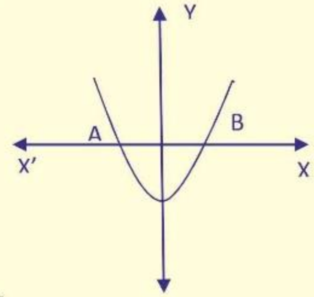
वेद-भूषण - V वर्ष / पूर्वमध्यमा - II वर्ष / कक्षा दसवीं

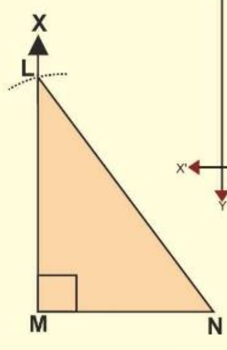
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

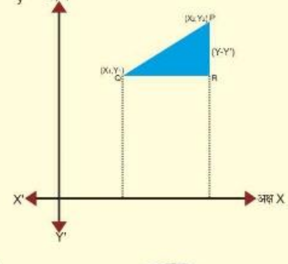
(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

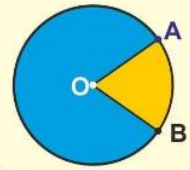
शून्यैषी निर्ऋते याजगन्धोत्तिष्ठाराते प्रपत मेह रंस्थाः ।
वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः।
खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा ॥
नञावचश्च शून्यानि संख्या: कटपयादय: ।
मिश्रे तूपाऽन्त्यहल्संख्या न च चिन्त्यो हल: स्वरा: ॥
योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च।
भाज्याच्छेदः शुध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥
वर्गाहतरूपाणामव्यक्तार्धकृतिसंयुतानां यत् ।
पदमव्यक्तार्धोनं तद्वर्गविभक्तमव्यक्त: ॥
चतुराहतवर्गसमैरूपै: पक्षद्वयं गुणयेत् ।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥
वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः ।
द्वादश प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मिन्त्साकं त्रिशता न शंकवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलास:।
आयाममायामगुणं विस्तारं विस्तरेण तु ।
समस्य वर्गमूलं यत्तत्कर्णं तद्विदो विदु: ॥

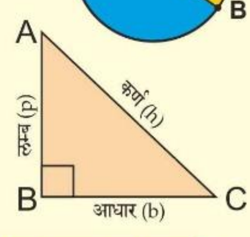












अन्त्ययोर्शतकेऽपि | परावर्त्य योजयेत् | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

ध्वजाङ्कः | विलोकनम् | आनुरूप्येण | ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

विषयानुक्रमणिका

अध्याय – 1

गणित का इतिहास

गणित शास्त्र का अर्थ एवं महत्त्व: भारतीय विद्या परम्परा में प्रारम्भ से ही गणित को समस्त शास्त्रों में शीर्षस्थ कहा जाता है ।

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा ।
तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितंमूर्ध्नि संस्थितम् ॥ (वेदाङ्गज्योतिष 2)

- **वैदिक वाङ्मय की सबसे बड़ी देन संख्याओं का आविष्कार तथा दाशमिक प्रणाली** (Decimal System) **है । ।** **(तैत्तिरीय संहिता- 7/2/20)**

10^2	= शत	10^3	= सहस्र	10^4	= अयुत		
10^5	= नियुत	10^6	= प्रयुत	10^7	= अर्बुद		
10^8	= न्यर्बुद	10^9	= समुद्र	10^{10}	= मध्य		
10^{11}	= अन्त	10^{12}	= परार्ध	10^{13}	= उषस		
10^{14}	= व्युष्टि	10^{15}	= देष्यत	10^{16}	= उद्यत		
10^{17}	= उदित	10^{18}	= सुवर्ग	10^{19}	= लोक	10^{20}	= सर्व

- तैत्तिरीय संहिता की सूची न केवल दाशमिक पद्धति (decimal system) के ज्ञान का प्रमाण है अपितु बड़ी संख्याओं के लिए नाम गढ़ने की वैज्ञानिक जरूरत का भी प्रमाण है ।

वेदाङ्गों में "गणित" : गणित शब्द का सर्वप्रथम प्रयोग वेदाङ्गज्योतिष में मिलता है – **गणितं मूर्ध्नि संस्थितम्,**

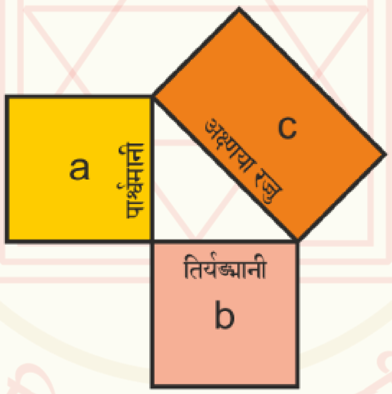
शुल्बसूत्र : शुल्ब का अर्थ 'धागा अथवा रस्सी' है। रस्सी की सहायता से भिन्न-भिन्न की वेदि, अग्निचिति, मण्डप इत्यादियों का विन्यास करने की रीतियाँ सूत्ररूप में जहाँ दी हैं उसे **शुल्बसूत्र** कहते हैं।

➢ अब तक आठ शुल्बसूत्रों की उपलब्धि ज्ञात है। कृष्ण यजुर्वेदान्तर्गत सात शुल्बसूत्र हैं : बौधायन, आपस्तम्ब, सत्याषाढ, वाधुल, मानव, मैत्रायणी और वाराह और शुक्ल यजुर्वेदान्तर्गत कात्यायन शुल्बसूत्र आठवाँ शुल्बसूत्र है।

1. **पाइथागोरस प्रमेय का ज्ञान** - (बौधायन शुल्बसूत्र 1.48)

दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जु: पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च यत्पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति।

अर्थात् दीर्घचतुरश्र (आयत) अक्षण्यारज्जु के वर्ग का क्षेत्रफल, पार्श्वमानी और तिर्यङ्गमानियों के अलग - अलग वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है।



2. पाई (π) का मान – वर्ग के बराबर वृत्त खींचने के प्रसंग में पाई का मान अन्तर्निहित हो जाता है। मानव शुल्बसूत्र में कहा जाता है कि दो हाथ का वर्ग, एक हाथ, तीन अंगुल अर्धव्यास पर बने हुए वृत्त के बराबर होता है, जिसको यदि गणितीय भाषा में लिखे तो यह समीकरण बनेगा।

$$2^2 = \pi\left(\frac{9}{8}\right)^2$$

अर्थात् $$\pi = 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 4 \times \frac{64}{81} = 3.16049$$

बौधायन शुल्बसूत्र में π (पाई) का मान 3 बताया है -

3. करणी (Surd) का ज्ञान **आपस्तम्ब शुल्बसूत्र** 1-12 में उल्लेखित है -

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्च चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोनेन स विशेषः ।

अर्थात् $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.34}$

4. **वर्ग का क्षेत्रफल -** कात्यायन शुल्बसूत्र (**कण्डिका** 3 -7))में वर्ग के क्षेत्रफल के बारे में निम्नलिखित श्लोक मिलता है । **यावत्प्रमाणा रज्जुर्भवति तावतस्तावन्तो वर्गा भवति तान्त्समत्स्येत्।**

5. **भिन्न (Fraction)** – भिन्न के परिकर्मों का भी उस समय ज्ञान था ।

यथा - **अर्धप्रमाणेन पादप्रमाणं विधीयते**, अर्थात् $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

इसी प्रकार - **अध्यर्धपुरूषा रज्जुर्द्वौ सर्पादौ करोति** अर्थात् $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\ \frac{1}{4}$

- **'शून्य शब्द'** का सर्वप्रथम प्रयोग अथर्ववेद(14/02/19) के निम्नलिखित मन्त्र में मिलता है।

शून्यैषी निर्ऋते याजगन्धोत्तिष्ठाराते प्रपत मेह रंस्थाः ।

उपर्युक्त मन्त्र में आये **'शून्यैषी'** शब्द का प्रयोग किसी अनुपलब्ध वस्तु को चाहने वाले के लिए किया गया है ।

- **शून्य का चिह्न :** वैदिक वाङ्मय के अन्तर्गत ऋग्वेद (8/77/3) में **शून्य चिह्न** के सन्दर्भ में निम्नलिखित मन्त्र उपलब्ध है । **खे अराँ इव खेदया-**

अर्थात् वेद में आकाश से परिपूर्ण गोल छिद्र के लिये 'ख' का प्रयोग प्राप्त होता है ।

- **'शून्य चिह्न'** के प्रतीक का सर्वप्रथम प्रयोग में आचार्य पिंगल के छन्दसूत्र के निम्न सूत्रों में प्राप्त होते हैं ।

रुपं शून्यम् **(पिंगल छन्द , अष्टमोऽध्यायः** 29)

द्विः शून्ये **(पिंगल छन्द , अष्टमोऽध्यायः** 30)

वर्णाङ्क प्रणाली –किसी संख्या को जब अक्षर के रूप में व्यक्त किया जाता है उसे 'कूटाङ्क' या वर्णाङ्क कहते हैं । आर्यभट्टीयम् (दशगीतिकापाद) के निम्न श्लोक में वर्णांक प्रणाली के बारे बताया गया है।

वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः । खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा ॥

स्वर	अ	इ	उ	ऋ	लृ	ए	ऐ	ओ	औ
वर्ग	10^0	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}
अवर्ग	10^1	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}	10^{15}	10^{17}

र्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क
क	1	च	6	ट	11	त	16	प	21
ख	2	छ	7	ठ	12	थ	17	फ	22
ग	3	ज	8	ड	13	द	18	ब	23
घ	4	झ	9	ढ	14	ध	19	भ	24
ङ	5	ञ	10	ण	15	न	20	म	25
य	र	ल	व	श	ष	स	ह		
30	40	50	60	70	80	90	100		

संख्याओं के लिए शब्दों / वर्णों का प्रयोग निम्न प्रकार सम्भव है -

कमल = क्×अ + म्×अ + ल्×अ = $1\times 10^0 + 25\times 10^0 + 50\times 10^1$

= $1\times 1 + 25\times 1 + 50\times 10$

= $1 + 25 + 500 = 526$

ख्युघृ = खु + यु + घृ = ख्×उ + य्×उ + घ्×ऌ = $2\times 10^4 + 30\times 10^4 + 4\times 10^6$

= $2\times 10000 + 30\times 10000 + 4\times 1000000$ = 43,20,000

आर्यभट्ट ने ख्युघृ के द्वारा एक युग में सूर्य के भगणों की संख्या 43 लाख 20 हजार बतायी है । इस विधि में बड़ी से बड़ी संख्या कुछ थोड़े से वर्णों में दी जाती है ।

कटपयादि - पद्धति : यह पद्धति 5वीं शती इस्वी में प्रचलित थी । इस पद्धति का 'सद्रत्नमाला' ग्रन्थ में सूत्र मिलता है -

नञावचश्च शून्यानि संख्या: कटपयादय: ।

मिश्रे तूपाऽन्त्यहल्संख्या न च चिन्त्यो हल: स्वरा: ।

वर्ण		**किस संख्या के बोधक हैं ।**
क , ट , प , य	-	1
ख , ठ , फ , र	-	2
ग , ड , ब , ल	-	3
घ , ढ , भ , व	-	4
ङ , ण , म , श	-	5
च , त , ष	-	6
छ , थ , स	-	7
ज , द , ह	-	8
झ , ध	-	9
ञ, न और केवल स्वर	-	0

अभिलेखों और दानपत्रों आदि में इस पद्धति के उदाहरण मिलते हैं । जैसे –

क) 2 4 4 1

रा घ वा य - 1442

भूतसंख्या पद्धति (शब्दाङ्क) -

पद्धति में अङ्कों के लिए प्रयुक्त होने वाले कुछ प्रचलित सङ्केत शब्द ये हैं । (इनके पर्यायवाची भी इसी अर्थ में आते हैं ।)

अङ्क	सङ्केत – शब्द
0	शून्य, ख, अम्बर, गगन, नभ, वियत्, अनन्त
1	चन्द्र, इन्दु, विधु, सोम, अब्ज, भू, धरा, गो, रूप, तनु
2	यम, अश्विन, नेत्र, अक्षि, कर्ण, कर, पक्ष, द्वय, अयन, युगल
3	राम, गुण, त्रिगुण, भुवन, काल, अग्नि, त्रिनेत्र, लोक, पुर
4	वेद, श्रुति, सागर, वर्ण, आश्रम, युग, तुर्य, कृत, अय, दिश
5	बाण, शर, इषु, भूत, प्राण, तत्त्व, इन्द्रिय, विषय, पाण्डव
6	रस, अंग, ऋतु, दर्शन, अरि, तर्क, कारक, षण्मुख
7	नग, अग, पर्वत, ऋषि, मुनि, वार, स्वर, छन्द, द्वीप, धातु, अश्व
8	वसु, अहि, नाग, राज, सर्प, सिद्धि, भूति, अनुष्टुप्
9	अङ्क, नन्द, निधि, ग्रह, रन्ध्र, छिद्र, द्वार, दुर्गा
10	दिश्, दिशा, अंगुलि, पङ्क्ति, ककुभ्, रावणशिर, अवतार
11	रुद्र, ईश्वर, हर, ईश, भव, महादेव, अक्षौहिणी
12	रवि, सूर्य, अर्क, मास, राशि, व्यय, भानु, दिवाकर
13	विश्वेदेवा:, विश्व, काम, अतिजगती
14	मन, विद्या, इन्द्र, शक्र, लोक
15	तिथि, दिन, अहन्
16	नृप, भूप, भूपति, अष्टि, कला
17	अत्यष्टि
18	धृति, पुराण
19	अतिधृति
20	नख, कृति

21	उत्कृति, प्रकृति, स्वर्ग
22	आकृति
23	विकृति
24	गायत्री, जिन, अर्हत्, सिद्ध
27	नक्षत्र, उड्ड, भ
33	देव, अमर, सुर, त्रिदश
49	तान

अभ्यास प्रश्नावली - 1

1. गणित शब्द का क्या अर्थ हैं ?
2. दाशमिक अङ्कलेखन प्रणाली किस युग की देन है ?
3. वर्णाङ्क पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए।
4. शून्य के अविष्कार पर प्रकाश डालिए।
5. पाई के मान में आर्यभट्ट का योगदान क्या है ? लिखिए।
6. वर्णाङ्क प्रणाली को स्पष्ट कीजिए एवं आर्यभट्टीयम् शब्दाङ्क प्रणाली से अपने परिवार के पाँच सदस्य के नाम को अङ्कों में बदलिए।
7. कटपयादि पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए।
8. सही-जोड़ी मिलान कीजिए।

आर्यभट्ट	-	वैदिक गणित
भास्कराचार्य	-	पञ्च सिद्धान्त
ब्रह्मगुप्त	-	आर्यभट्टीयम्
वाराहमिहिर	-	सिद्धान्त शिरोमणि
भारतीय कृष्णतीर्थ	-	बह्मस्फुट सिद्धान्त

अध्याय - 2

समुच्चय

समुच्चय (Sets) : वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह को **समुच्चय** कहते हैं । समुच्चय को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों A , B , C , D , X ,Y , Z , ….. इत्यादि एवं समुच्चय के सदस्यों के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों a , b , c, …. इत्यादि का प्रयोग करेंगे ।

यदि a, समुच्चय A का सदस्य है तो हम लिखते है, $a \in A$ और इसे पढ़ते है । “a सदस्य है A का” । यदि a, समुच्चय A का सदस्य नहीं है तो हम लिखते हैं । $a \notin A$ और इसे पढ़ते हैं । “a सदस्य नहीं है A का”

समुच्चय का निरूपण –   1) सारणीबद्ध रूप 2) समुच्चय निर्माण रूप

1) **सारणीबद्ध रूप –** एक समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { }, के अन्दर सारणी के रूप में लिखते हैं, और सारणी के प्रत्येक दो अवयवों को पृथक करने के लिए उनके बीच अर्द्धविराम चिह्न का प्रयोग करते हैं ।

उदाहरण : यदि 1, 3, 5, 7 समुच्चय A के अवयव है , तो हम लिखते हैं - $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$

2) **समुच्चय निर्माण रूप** - इस रूप का प्रयोग हम तभी करते हैं जब हम समुच्चय के उस गुणधर्म की व्याख्या कर सकते हैं ।

उदाहरण : कुछ समुच्चयों के सारणीबद्ध रूप में नीचे दिए गए है ।

- $A = \{ x \,/\, x$ प्राकृत संख्या है ; और $5 < x \leq 10 \}$

  यहाँ $A = \{ 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

परिमित समुच्चय – वह समुच्चय जिसके अवयवों की संख्या परिमित हो, उसे परिमित समुच्चय कहते हैं । **उदाहरण :** $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$

अपरिमित समुच्चय – अपरिमित समुच्चय उस समुच्चय को कहते हैं जो परिमित समुच्चय नहीं है अर्थात् जिसमें अवयवों की संख्या परिमित नहीं हो, अर्थात् अपरिमित या अनन्त हों ।

उदाहरण : सभी पूर्णाङ्कों का समुच्चय $Z = \{\ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots\ldots\}$

रिक्त समुच्चय (Empty Set or Null Set) - वह समुच्चय जिसमें कोई अवयव न हो ,उसे **रिक्त समुच्चय** कहते हैं । इसे सङ्केत में ''∅ '' (Phie) द्वारा प्रदर्शित करते है ।

अत: $\emptyset = \{\ \}$ **उदाहरण :** $A = \{ x : x$ विषम प्राकृत संख्या है और $7 < x < 9 \}$

यह रिक्त समुच्चय है क्योंकि 7 और 9 के मध्य कोई विषम प्राकृत संख्या नहीं है।

उप समुच्चय – यदि किसी समुच्चय के एक भाग को लेकर नया समुच्चय बनाए तो यह नया समुच्चय दिये गये समुच्चय का उप समुच्चय कहलाता हैं ।

उदाहरण : $A = \{ a, e, i, o, u \}$ तथा $B = \{ a, b, c, d, e \ldots\ldots x, y, z \}$

हम देखते हैं कि समुच्च का A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी अवयव है, अर्थात् समुच्चय A, समुच्चय B का एक भाग है तो इसे $A \subset B$ से निरूपति करते हैं और ''A उपसमुच्चय है B का'' पढ़ते हैं एवं B को A का **अधिसमुच्चय** कहते हैं ।

याद रखें : 1. रिक्त समुच्चय, प्रत्येक समुच्च का उप समुच्चय होता हैं ।

- प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता हैं ।

उदाहरण : यदि $A = \{ a, b, c \}$ और $B = \{ b, c, a, d \}$ तो $A \subset B$ या $B \subset A$ क्या सही है ।

हल : दिया है समुच्चय $A = \{ a, b, c \}$ और $B = \{ b, c, a, d \}$ उक्त दोनों समुच्च को हम देखते हैं तो पाएंगे कि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव समुच्चय B का एक भाग है, अत: $A \subset B$

समुच्चयों का संघ (Union of Set) – दो समुच्चयों का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों में से कम से कम किसी एक का अवयव अवश्य होता है ।

$$A \cup B = \{ x \ / \ x \in A , x \in B \}$$

इन A और B के संघ को सङ्केत 'A ∪ B' से प्रकट करते हैं और इसे 'A संघ B' पढ़ते हैं :

उदाहरण : समुच्चय A = { 2 , 3 , 4 } और B = { 2 , 4 , 5 , 6 } हैं तब समुच्चयों का संघ,

$$A \cup B = \{ 2,3,4,5,6 \}$$

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ – दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों का उभयनिष्ठ होता है ।

$$A \cap B = \{ x \ / \ x \in A \text{ और } x \in B \}$$

उदाहरण: A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } और B = { 2 , 3 , 5 , 7 , 8 } तो A ∩ B ज्ञात करें ।

हल : हम जानते हैं कि, A ∩ B में वह समुच्चय है। जिसमें दोनों समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ अवयव हो, A ∩ B = { 2 , 3 , 5 }

समष्टि समुच्चय – निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए ।

Universal set (∪)= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

A = { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 }　　C = { 7 , 8 , 9 , 6 }

B = { 2 , 3 , 5 , 7 , 8 }　　D = { 6 , 7 , 1 , 9 , 5 }

हम देखते हैं कि समुच्चय A , B , C एवं D समुच्चय , ∪ के उप समुच्चय है। समुच्चय ∪ को समुच्चय A , B , C और D का **समष्टि समुच्चय** कहते हैं । एक ऐसा समुच्चय जिसके अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय उपसमुच्चय हो, **समष्टि समुच्चय** कहलाता है इसे ' ∪ 'से प्रदर्शित करते हैं ।

उदाहरण : समुच्चय A = { 2 , 3 } , B = { 3 , 4 , 5 } , C = { 5 , 6 , 8 , 11 } एवं D = { 15 , 17 , 19 , 2 } का समष्टि समुच्चय लिखिए ।

हल : दिये है समुच्चय

A = { 2 , 3 }　　B = { 3 , 4 , 5 }

C = { 5 , 6 , 8 , 11 }　　D = { 15 , 17 , 19 , 2 }

हम जानते हैं कि A , B , C व D समुच्चय समष्टि समुच्चय ∪ के उपसमुच्चय होते हैं। अर्थात्

$\cup = \{ 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 11 , 15 , 17 , 19 \}$

अभ्यास प्रश्नावली - 2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) यदि $A = \{2, 4, \{5, 6\}, 8\}$ तब निम्नलिखित में से कौन-सा असत्य है?

(I) $\{5, 6\} \subset A$ (II) $\{5, 6\} \in A$

(III) $8 \notin A$ (IV) $2, 4, 8 \in A$

(ब) समुच्चय $A = \{a, b\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या है ?

(I) 3 (II) 2 (III) 1 (IV) 4

(स) समुच्चयों A तथा B में क्रमशः 5 तथा 10 अवयव हैं। $(A \cup B)$ में अवयवों की न्यूनतम संख्या होगी ?

(I) 15 (II) 10 (III) 8 (IV) 5

2. यदि समुच्चय $A = \{ 1 , 2 , 3 \}$ और $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ हो तो समुच्चयों का संघ एवं सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिये ?

3. निम्न समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

(अ) $\{ 1 , 2 \}$ (ब) $\{ 3 , 4 , 5 \}$ (स) $\{ 5 \}$

4. निम्न उप समुच्चयों के स्थान पर एक समुच्चय लिखिए। समुच्चय

अ) $\{ a \} , \{ a , b \} , \{ b \} , \{ \emptyset \}$

5. निम्नलिखित समुच्चयों का संघ ज्ञात करें।

अ) $(A \cup B)$ ज्ञात करें यदि समुच्चय $A = \{ a , e , i , o , u \}$ एवं $B = \{ a , b , c \}$

ब) $(X \cup Y)$ ज्ञात करें यदि समुच्चय $X = \{ 1 , 3 , 5 \}$ एवं $Y = \{ a , b \}$

6. मान लीजिए $A = \{ a , b \} , B = \{ a , b , c \}$ क्या $A \subset B$ तथा $A \cup B = B$ है ?

7. निम्नलिखित समुच्चयों का सर्वनिष्ठ ज्ञात करें।

अ) $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$

ब) $A = \{a, b, c, e, d, f\}$, $B = \{e, f, a, i, b\}$

8. निम्नलिखित समुच्चयों का समष्टीय समुच्चय ज्ञात करें ।

अ) $A = \{1, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$

ब) $X = \{a, b\}, Y = \{1, 3, 6\}, Z = \{5, 7, 6\}$

अध्याय - 3

बहुपद

➢ जिस बीजीय व्यंजक में चर की घात पूर्ण संख्या हो बहुपद कहलाता है।

➢ किसी चर के लिए बहुपद P(x) में x की उच्चतम घात **बहुपद की घात** कहलाती है ।

रैखिक बहुपद : किसी बहुपद में चर की घात 1 होने पर उस बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं। रैखिक बहुपद का व्यापक रूप $ax + b$ है । जहाँ a, b वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है । **उदाहरण :** $3x + 5$, $4x$, $5x$, $6x + 7$

द्विघातीय बहुपद : किसी बहुपद में चर की घात 2 होने पर उस बहुपद को द्विघातीय बहुपद कहते हैं। द्विघातीय बहुपद का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ है । जहाँ a , b व c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है । **उदाहरण :** $5x^2$, $5x^2 + 3$, $4x^2 + 5x + 4$

त्रिघातीय बहुपद : किसी बहुपद में चर की घात 3 होने पर उस बहुपद को त्रिघातीय बहुपद कहते हैं। त्रिघातीय बहुपद का व्यापक रूप ax3 + bx2 + cx + d है । जहाँ a, b, c व d वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है । **उदाहरण : $5x^3$, $4x^3 + 2x + 1$, $4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$**

बहुपद के शून्यांक - अब बहुपद $P(x) = 3x + 2$ में का x मान विचार कीजिए ।

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2 \leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$$

यदि बहुपद $3x + 2$ में x के स्थान पर $\left(\frac{-2}{3}\right)$ रखते है । तब $P(x) = 0$ प्राप्त होता है ।

$$P\left(\frac{-2}{3}\right) = 3\left(\frac{-2}{3}\right) + 2 = -2 + 2 = 0$$

क्योंकि $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$ इसलिए $\left(\frac{-2}{3}\right)$ दिये गये बहुपद $(3x + 2)$ का शून्यक कहलाते हैं ।

अत: रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(अचर पद)}}{x \text{ का गुणांक}}$ है ।

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांक में सम्बन्ध -

- रैखिक बहुपद (ax + b) का शून्यक $\left(\frac{-b}{a}\right)$ होता है । रैखिक बहुपद के शून्यक की संख्या केवल एक होती है ।
- द्विघात बहुपद में $(ax^2 + bx + c)$ शून्यक की संख्या दो होती है । व्यापक रूप यदि α , β द्विघात बहुपद $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हो तो

शून्यकों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

शून्यकों के गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

यहाँ α एवं β युनानी भाषा के अक्षर है । जहाँ $a \neq 0$ है ।

उदाहरण : द्विघात बहुपद समीकरण के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

1) $(2x^2 + 5x + 3)$

हल : व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर a = 2, b = 5, c = 3 हम जानते हैं,

शून्यकों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2}$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

अत: द्विघात बहुपद में शून्यकों का योगफल $\left(\frac{-5}{2}\right)$ एवं शून्य कों गुणनफल $\left(\frac{3}{2}\right)$ है ।

बहुपदों के साथ सङ्क्रिया (+, −, ×, ÷)

योग (जोड़) – अव्यक्त राशि के योग एवं अन्तर, समजातीय वर्णों के मध्य होता है, जो पद समजातीय (विभिन्न) नहीं होता है उसकी स्थिति अलग रहती है

उदाहरण : 5x + 3 एवं 4x + 2 का योगफल ज्ञात कीजिये ।

हल : $(5x + 3) + (4x + 2)$

$= 5x + 3 + 4x + 2$

$= (5x + 4x) + (3 + 2) = 9x + 5$

व्यवकलन (अन्तर) -

उदाहरण : बहुपद $(2x^2 + 5x + 4)$ में $(x^2 - x - 2)$ को घटाइये ।

हल : $(2x^2 + 5x + 4) - (x^2 - x - 2)$

$= 2x^2 + 5x + 4 - x^2 + x + 2$

$= (2x^2 - x^2) + (5x + x) + (4 + 2)$

$= x^2 + 6x + 6$

चूंकि : $-(-a) = a$

गुणन (गुणा) -

उदाहरण : $(x + 5)$ में $(x - 7)$ का गुणा कीजिए ।

हल : $(x + 5) . (x - 7)$

$= x(x - 7) + 5(x - 7)$

$= x^2 - 7x + 5x - 35$

$= x^2 - 2x - 35$

ध्यान रखें : बहुपदों के योग एवं अन्तर में समान पद एक साथ रखे जाते हैं तथा गुणा में समान पदों की घात जुड़ जाती है ।

भाग (विभाजन): अव्यक्त राशि के विभाजन में भाज्य में से भाजक को घटाने पर जिससे शेष ना रहे इसलिए भाजक में जिस -जिस राशि या रूप का गुणा किया जाता है । वह राशि या रूप भागफल के रूप में प्राप्त होता है ।

उदाहरण : बहुपद $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग दीजिए ।

हल : बहुपद $18x^2 + 9x$ को $3x$ से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं ।

$$= \frac{18x^2}{3x} + \frac{9x}{3x}$$

$$= \frac{18x.x}{3x} + \frac{3x}{x} = 6x + 3$$

उदाहरण : बहुपद $(2x^2 + 5x - 3)$ को बहुपद $(x - 2)$ से भाग दीजिए।

हल:

भाजक	भाज्य	भागफल
$x - 2$	$2x^2 + 5x - 3$	$2x + 9$
	$_{-}2x^2 \,_{+}- 4x$	
	$9x - 3$	
	$_{-}9x \,_{+}- 18$	
	15 शेषफल	

यहाँ हमें भागफल = $(2x + 9)$ और शेषफल = 15 प्राप्त हुआ।

सङ्केत – **बहुपद में बहुपद के भाग विधि के चरण -**

चरण 1 – भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखेंगे।

चरण 2 – भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देने।

यहाँ $\frac{2x^2}{x} = 2x$ यह भागफल का पहला पद होना।

चरण 3 – इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे और गुणनफल को भाज्य से घटाये।

$$2x\,(x - 2) = 2x^2 - 4x$$

$$= (2x^2 + 5x - 3) - (2x^2 - 4x)$$

$$= 2x^2 + 5x - 3 - 2x^2 + 4x = 9x - 3$$

चरण 4 – घटाने पर प्राप्त परिणाम के पद पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करेंगे।

$= \frac{9x}{x} = 9$ यह भाग का दूसरा पद होगा।

चरण 5 – पुन: इस भागफल का गुणा भाजक के साथ गुणा करेंगे।

अर्थात्, $9(x-2) = 9x-18$

अब $9x-3$ में से $9x-18$ को घटाइये ।

$$= (9x-3)-(9x-18)$$

$$= 9x-3-9x+18$$

$$= 9x-9x-3+18 = 15$$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक की शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए, इस उदाहरण में शेषफल 15 है । जिससे चर की घात $(x-2)$ के चर की घात कम है ।

इस भाग का संक्षिप्त प्रतिरूप है ।

$$(2x^2+5x-3) = (x-2)(2x+9)+5$$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

बहुपदों में भाग के लिये एक अन्य वैदिक विधि :

बहुपदों में भाजन कि क्रिया हेतु हम वैदिक गणित के सूत्र 'परावर्त्य योजयेत्' से संख्याओं में भाग की तरह बहुपदों के भाग भी सुगमता से किये जा सकते हैं । आइए, निम्न उदाहरण से समझते हैं ।

उदाहरण: $(x^4+2x^3-3x^2+x-1)$ को $(x-2)$ से भाग दीजिए ?

हल: सर्वप्रथम संशोधित भाजक क निर्माण करें जिसे अचर पद का चिह्न बदल कर ज्ञात करते हैं ।

$$(x^4+2x^3-3x+x-1) \div (x-2)$$

भाजक	x − 2	+1	+2	-3	+1	−1
संशोधित भाजक	+2		+2	+8	+10	+22
		+1	+4	+5	+11	+21

चरण 1. सर्वप्रथम संशोधित भाजक का निर्माण करें जिसे अचर पद का चिह्न बदल कर ज्ञात करते हैं।

चरण 2. भाज्य के गुणांक चिह्न सहित लिखें।

चरण 3. संशोधित भाजक (+2) है जिसमें एक अङ्क है इसलिए भाज्य को इकाई की ओर से एक अङ्क छोड़कर खड़ी रेखा (विभाजन रेखा) खींचेंगे। यहाँ -1 के बायें विभाजन रेखा खींचेंगे।

चरण 4. भाज्य का बायाँ प्रथम अङ्क भागफल का प्रथम अङ्क है। नीचे भागफल में लिखें।

चरण 5. इस प्रथम अङ्क का गुणा संशोधित भाजक से कर गुणनफल को भाज्य के बायें से द्वितीय अङ्क के नीचे लिखेंगे।

चरण 6.
$$\begin{array}{r} +2 \\ \underline{+2} \\ +4 \end{array}$$

यह भागफल का द्वितीय अङ्क है। इस +4 का गुणा संशोधित भाजक +2 से करेंगे तथा अगले अङ्क के नीचे लिखेंगे। $(+4)\times(+2) = 8$ को -3 के नीचे लिखेंगे।

चरण 7. अब $-3 + 8 = 5$ भागफल में नीचे लिखेंगे।

चरण 8. $(+5) \times (+2) = +10$ अगले अङ्क +1 के नीचे लिखेंगे।

दोनों का जोड़ $+1 + 10 = +11$ नीचे भागफल में लिखेंगे।

चरण 9. $+11 \times (+2) = 22$ को विभाजन रेखा बाद -1 के नीचे लिखेंगे।

अब $-1 + 22 = 21$

चरण 10. दोनों खड़ी रेखाओं के बीच का हिस्सा भागफल को निरूपित करता है।

अर्थात् +1 , 14, +5 , +11 भागफल के गुणांक है।

अत : $x^3 + 4x^2 + 5x + 11$ भागफल प्राप्त होता है।

चरण 11. विभाजन रेखा के बाद शेषफल 21 है।

उत्तर की जाँच :-

भाज्य के गुणांकों का बीजाङ्क = भाजक के गुणांकों का बीजाङ्क $\times$ भागफल के गुणांकों का बीजाङ्क + शेषफल का बीजाङ्क

यहाँ बायाँ पक्ष $= 1 + 2 - 3 + 1 - 1 = 0$

एवं दायाँ पक्ष $= (-1 \times 3) + 3$

$0 = -3 + 3$

$0 = 0$

अत : बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत : भागफल की पुष्टि होती है ।

अभ्यास प्रश्नावली - 3

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) एक घात वाला बहुपद कहलाता है ?

(I) रैखिक बहुपद (II) द्विघात बहुपद (III) त्रिघात समीकरण (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) द्विघात बहुपद के शून्यकों की संख्या कितनी होती है ?

(I) 2 (II) 3 (III) 4 (IV) 6

(स) यदि बहुपद $p(x) = x^2 - 2x + 5$ के शून्यक α , β हों , तो $\alpha\beta$ का मान होगा –

(I) 5 (II) – 5 (III) 2 (IV) –2

(द) यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 3x + 5$ के शून्यक α और β हों , तो $4(\alpha + \beta) =$

(I) –12 (II) 12 (III) 20 (IV) –20

(प) द्विघात बहुपद $4x^2 + 4x + 1$ के शून्यकों का योग होगा –

(I) –1/4 (II) 1 (III) –1 (IV) 1/4

2. रैखिक बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए।

1) $3x + 7$ 2) $5x + 4$ 3) $8x + 5$ 4) $10x - 3$

3. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों का योगफल व शून्यकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1) $5x^2 + 3x + 8$ 2) $3x^2 + 10x + 7$

1. निम्न बहुपद को सरल करें-

अ) $(7x + 3) + (4x + 4)$ ब) बहुपद $(4x + 9)$ व $(3x + 3)$ को जोड़िए।

स) बहुपद $(3x^2 + 2x - 3)$ में से $(x^2 - 3x - 4)$ को घटाइये।

द) $(4x + 5)$ में $(2x + 3)$ का गुणा कीजिए।

प) $(x^2 - x + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

फ) बहुपद $(3x^2 + x^2 + 2x + 5)$ को $(x^2 + 2x + 1)$ से भाग दीजिए।

अध्याय - 4

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

➢ दो चरों वाला रैखिक समीकरण में चर x और y की अधिकतम घात (एक) है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के युग्म को **युगपत समीकरण** कहते है । दो चरों वाला रैखिक समीकरण का व्यापक रूप $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ जहाँ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 व c_2 सभी वास्तविक संख्याएँ और a_1, b_1 एवं a_2, b_2 कोई भी शून्य नहीं है।

उदाहरण : निम्न समीकरण को हल कीजिये ।

$$2x + 3y = 5 \;,\; 4x + 2y = 3$$

दो चर x और y वाले समीकरण एक निकाय है । रैखिक युगपत समीकरण के व्यापक निकाय रूप में

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

इस प्रकार दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म समीकरण को निकाय कहते हैं । दो चरों वाले समीकरण का युग्म ज्यामिति रूप में निम्न प्रकार से आलेखीय होगा। यदि एक तल में दो रेखाएँ हैं, तो निम्न से से केवल एक ही सम्भावना हो सकती है :

क्रमांक	अनुपातों की तुलना	आलेखिय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती है ।	केवल एक हल(अद्वितीय)
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे के सम्पाती होती है ।	अनन्त हल (अपरिमित)
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे के समान्तर होती है ।	कोई हल नहीं

जब किसी रैखिक समीकरण के युग्म का कोई हल अनन्त या अद्वितीय है, तो निकाय संगत होता है और जब निकाय का कोई हल नहीं होता है तब कह सकते हैं कि निकाय असंगत है ।

उदाहरण : निम्नलिखित समीकरणों को दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म के व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करके निकाय के हल एवं आलेखीय निरूपण कि जाँच करें ।

- रैखिक समीकरण $2x + 3y - 10 = 0$ तथा $4x + 6y - 20 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = -10$ तथा $a_2 = 4$, $b_2 = 6$, $c_2 = -20$ तब,

यहाँ,
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{(-10)}{(-20)}$$
या $$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् दो चरों रैखिक समीकरण युग्म का अपरिमित रूप से अनन्त हल होंगे तथा रेखाएँ सम्पाती होंगी।

- रैखिक समीकरण $2x + 7y + 5 = 0$ तथा $4x + 3y + 5 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 2$, $b_1 = 7$, $c_1 = 5$ तथा $a_2 = 4$, $b_2 = 3$, $c_2 = 5$ तब,

यहाँ,
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$
$$\frac{2}{4} \neq \frac{7}{3}$$

अर्थात् निकाय की रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करेगी तथा समीकरण का युग्म केवल एक ही हल अद्वितीय होगा ।

- रैखिक समीकरण $5x + 2y + 4 = 0$ तथा $15x + 6y + 16 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $c_1 = 4$ तथा $a_2 = 15$, $b_2 = 6$, $c_2 = 16$ तब,

यहाँ, $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{5}{15} = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{16}$$

या $$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

अर्थात् दो चरों रैखिक समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा तथा रेखाएँ समान्तर होगी।

दो राशियों के रैखिक समीकरण का बीजीय हल –

प्रतिस्थापन विधि - निम्नलिखित समीकरणों को समीकरण हल कीजिए।

उदाहरण : हल करें। $2x - y = 3$

$4x - y = 5$

हल : $2x - y = 3$ ....(1)

$4x - y = 5$ ....(2)

समीकरण (1) से $2x - y = 3$

$2x - 3 = y$ ....(3)

समी (3) से y के मान के समीकरण (2) में रखने पर

$4x - (2x - 3) = 5$

$4x - 2x + 3 = 5$

$2x + 3 = 5$

$2x = 5 - 3$

$2x = 2 \quad \leftrightarrow \quad x = 1$

x के इसी मान को समीकरण (3) में रखने पर

$y = 2 \times 1 - 3$

$$y = 2 - 3 = -1$$

अत: $x = 1$और $y = -1$ समीकरण के हल है

$$x = 1 \; , \; y = -1$$

वैदिक विधि द्वारा युगपत समीकरण का हल –

वैदिक सूत्र – ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र इस वैदिक गणित के सूत्र का अर्थ है 'आड़ा-तिरछा' इस सूत्र का प्रयोग कर हम युगपत समीकरण हल करना का बहुत ही कम गणना के साथ आसानी से हल प्राप्त कर सकते हैं। माना रैखिक युगपत समीकरण के व्यापक निकाय

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \; , \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

इन्हें हल करने पर x और y का मान प्राप्त होता है। तब उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से-

$$X = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$Y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

उदाहरण : दिये गये निकाय में x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।

$$5x + 2y + 6 = 0$$

$$7x + 4y + 3 = 0$$

हल : दो चरों वाले रैखिक समीकरण के व्यापक समीकरण रूप से तुलना करने पर यहाँ समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ से तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर -

$$a_1 = 5 , \; b_1 = 2 , c_1 = 6$$

$$a_2 = 7 , \; b_2 = 4 , c_2 = 3$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{2\times2 - 4\times6}{5\times4 - 7\times2} = \frac{6-24}{20-14} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{6\times7-5\times3}{5\times4-7\times2} = \frac{42-15}{20-14} = \frac{27}{6} \text{ या } \frac{9}{2}$$

अभ्यास प्रश्नावली - 4

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ निकाय का हल:

I) कोई हल नहीं है　　II) एक अद्वितीय हल है

III) अनन्त हल है　　IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का अद्वितीय हल होगा, जब

I) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$　　II) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$　　III) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$　　IV) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(स) जब दो चर वाले समीकरणों का आलेख सम्पाती होता है तब उनके हल होंगे -

I) एक　　II) दो　　III) तीन　　IV) अनन्त

2. निम्न निकायों के परावर्त्य विधि से हल ज्ञात कीजिए ।

1) $x + y = 7$
$3x - 2y = 1$

2) $4m + 2n = 1$
$3m + 2n = 2$

3) $7x + 11y = 1$
$8x + 13y = 3$

4) $p + q = 1$
$p + 2q = 1$

अध्याय - 5

द्विघात समीकरण

द्विघात समीकरण- वह समीकरण जिसमें अज्ञात राशि की अधिकतम 'घात 2' हो **द्विघात समीकरण** कहलाता है। द्विघात समीकरण का व्यापक रूप- $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b एवं c वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$ किसी भी द्विघात समीकरण को हल करने पर हमें हल के रूप में चर राशि के दो मान प्राप्त होते हैं । जिन्हें हम उस वर्ग समीकरण के मूल कहते हैं एवं उन्हें हम α और β द्वारा प्रदर्शित करते हैं ।

द्विघात समीकरण को हल करने विधि - श्रीधराचार्य विधि (सूत्रविधि)

- श्रीधराचार्य का जन्म 750 ई. (लगभग) में हुआ था । गणित के क्षेत्र में श्रीधराचार्य के ग्रन्थ अत्यन्त मूल्यवान है । उन्होनें ऐसे अनेक सूत्र प्रदान किये हैं । जो इनसे पहले अज्ञात थे । इनके दो ग्रन्थ उपलब्ध है –1) **पाटीगणित** 2) **त्रिशतिका**

श्रीधराचार्य सूत्र : $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

जो कि द्विघात समीकरण के वास्तविक मूल हैं इन मूलों को α और β में प्रदर्शित करते हैं ।

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ध्यान रखें : द्विघात समीकरण के मूलों को हम इसके विविक्तकर (Discriminant) से पहचान सकते हैं । **द्विघात समीकरण का विविक्तकर** $= \sqrt{b^2 - 4ac}$

- जब $b^2 - 4ac$ का मान धनात्मक हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β का मान वास्तविक और अलग-अलग प्राप्त होता है ।

➢ जब $b^2 - 4ac = 0$ हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β का मान वास्तविक और समान प्राप्त होता है ।

➢ $b^2 - 4ac < 0$ का मान जब शून्य से कम हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β के मान वास्तविक नहीं होते हैं ।

उदाहरण : समीकरण $2x^2 + 3x - 2 = 0$ को सूत्र विधि (श्रीधराचार्य सूत्र) द्वारा हल कीजिए ।

हल : $2x^2 + 3x - 2 = 0$

इसकी तुलना द्विघात समीकरण के व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 2 , b = 3 , c = -2$$

हम जानते हैं कि श्रीधराचार्य सूत्र -

$$\mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर : $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर : $x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

अतः $x = -2 , \frac{1}{2}$ समीकरण के हल है ।

उदाहरण - निम्न समीकरण की द्विघात समीकरण के व्यापक रूप $(ax^2 + bx + c = 0)$ से तुलना कर a, b एवं c का मान ज्ञात कीजिये ।

1) द्विघात समीकरण $x^2 + 3x + 4 = 0$

हल: हम जानते हैं कि द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1 , b = 3 , c = 4$

अभ्यास प्रश्नावली - 5

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान होंगे , यदि –

(I) $b^2 = 4ac$ (II) $ac = 0$

(III) $b^2 + 4ac = 0$ (IV) $b^2 + ac = 0$

(ब) द्विघात समीकरण $bx^2 + ax + c = 0$ का विविक्तकर होगा –

(I) $b^2 – 4ac$ (II) $a^2 – 4bc$

(III) $c^2 - 4ab$ (IV) $b^2 - 2ac$

(स) द्विघात समीकरण $2x^2 – 7x + 6 = 0$ का विविक्तकर बराबर है –

(I) 2 (II) –3 (III) 1 (IV) 3

2. निम्नलिखित समीकरणों की तुलना द्विघात समीकरण के व्यापक रूप

($ax^2 + bx + c = 0$) से तुलना कर a, b, c का मान बताइयें -

अ) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ ब) $-x^2 - x + 4 = 0$

स) $-x^2 + 8x + 9 = 0$ द) $-3x^2 - 4x - 5 = 0$

3. सूत्र विधि (श्रीधराचार्य सूत्र) द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए ।

$$\left[\text{सङ्केत : } \mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

अ) $x^2 - 5x - 6 = 0$ ब) $x^2 - 4x + 3 = 0$

4. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण है।

अ) $x^2 – 2x = (-2) (3 – x)$

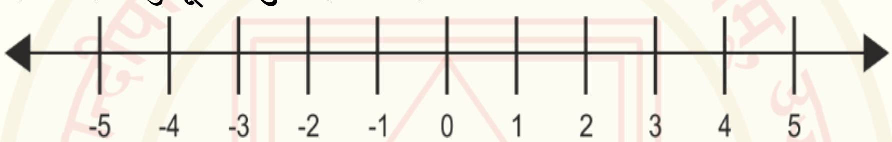
ब) $(x – 2) (x + 1) = (x – 1) (x + 3)$

अध्याय - 6

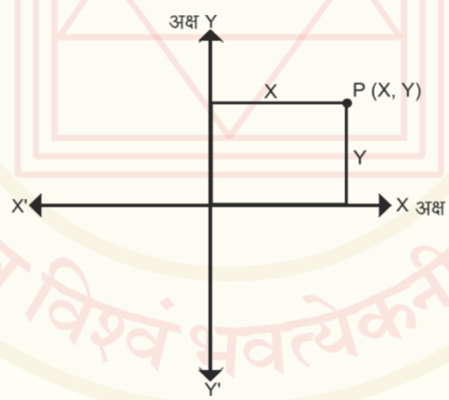
निर्देशाङ्क ज्यामिति

- निर्देशाङ्क ज्यामिति एक बीजीय साधन है । जिसके द्वारा आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है । निर्देशाङ्क ज्यामिति हमें बीजगणित का उपयोग आकृतियों को समझने में सहायता करता है ।

कार्तिय निर्देशाङ्क – संख्या रेखा पर जिस बिन्दु से धनात्मक या ऋणात्मक अङ्क को निरूपित किया जाता है । वह बिन्दु **मूलबिन्दु** कहलाता है ।



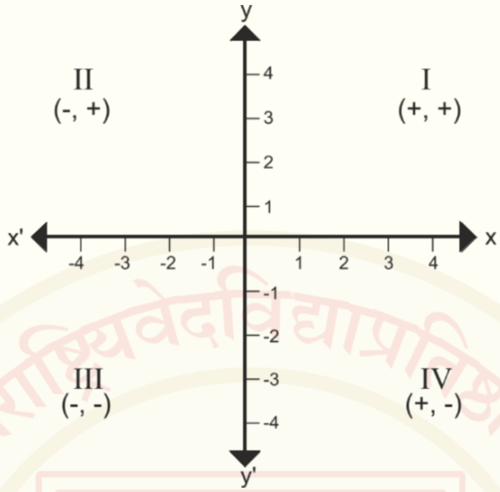
निर्देशाङ्क अक्षों का एक युग्म हमें समतल तल पर किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने के योग्य बनाता है ।



तल में किसी बिन्दु की y अक्ष से दूरी x के निर्देशाङ्क या भुज कहलाता है तथा किसी बिन्दु की x अक्ष की दूरी उस बिन्दु का y निर्देशाङ्क या कोटि कहलाता है ।

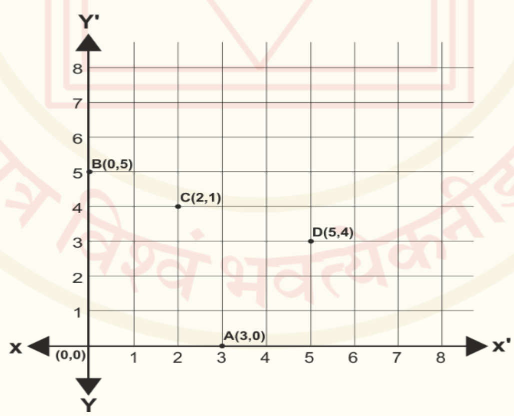
यदि $(3, 4)$ निर्देशाङ्क है तोx के निर्देशाङ्क को 'भुज' एवं y के निर्देशाङ्क 'कोटि' भी कहा जाता है।

चतुर्थांश निर्देशाङ्क के चिह्न –



- x अक्ष के ऊपर निर्देशाङ्क धनात्मक (+) तथा x अक्ष के नीचे निर्देशाङ्क ऋणात्मक होता है ।
- y अक्ष के दायें के निर्देशाङ्क धनात्मक (+) तथा y अक्ष के बायें के निर्देशाङ्क ऋणात्मक (-) माने जाते हैं ।

निर्देशाङ्क के कुछ उदाहरण – दिये गये ग्राफ में –



1) बिन्दु 0 तल का मूल बिन्दु है, किसी तल के मूल बिन्दु का निर्देशाङ्क (0, 0) होता है । इसका अर्थ यह है, कि मूल बिन्दु का x अक्ष से दूरी = 0 तथा इस मूल बिन्दु की y अक्ष से दूरी = 0 है।

2) दिए गए A बिन्दु के x अक्ष पर है, अत: बिन्दु A के निर्देशाङ्क = (3, 0) है। इसका अर्थ है, कि बिन्दु A का x अक्ष पर मूल बिन्दु से दूरी = 3 तथा इस बिन्दु की y अक्ष का मूलबिन्दु से दूरी = 0 है।

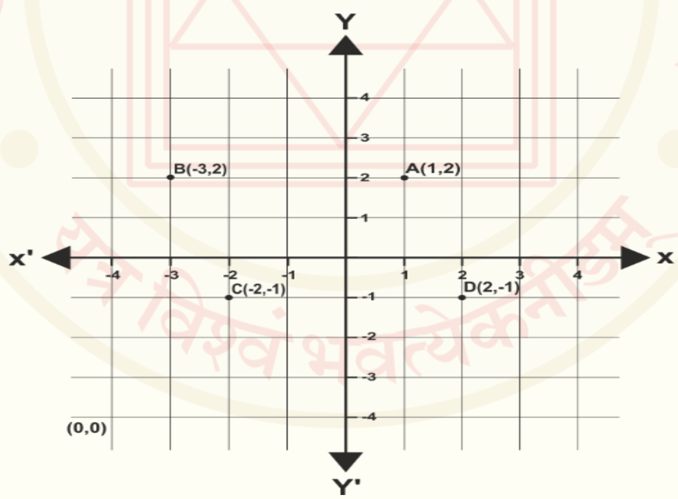
3) बिन्दु B, y अक्ष पर स्थित है। अत: बिन्दु B के निर्देशाङ्क = (0, 5) हैं। इसका अर्थ है, कि बिन्दु B की मूलबिन्दु से दूरी x अक्ष पर दूरी = 0 तथा y अक्ष पर दूरी = 5 हैं।

4) बिन्दु C का निर्देशाङ्क = (2, 4) है। इसका अर्थ है, कि बिन्दु C की मूल बिन्दु से x अक्ष पर दूरी = 2 तथा y अक्ष पर दूरी = 4 है।

5) बिन्दु D के निर्देशाङ्क (5, 4) है। इसका अर्थ है, कि बिन्दु D को मूल बिन्दु से x अक्ष पर दूरी = 5 तथा y अक्ष पर दूरी = 4 है।

धनात्मक तथा ऋणात्मक निर्देशाङ्क - आइए, निम्न ग्राफ से समझते हैं।

उदाहरण :



उपर्युक्त दिये ग्राफ में A, B, C व D के निर्देशाङ्क स्थित है।

1) निर्देशाङ्क बिन्दु A = (1, 2) हैं।इसका अर्थ है, कि इसकी स्थिति y अक्ष के दायीं और 1 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के ऊपर 2 मात्रक की दूरी पर निश्चित है।

2) निर्देशाङ्क बिन्दु B = (−3, 2) हैं । इसका अर्थ है, कि बिन्दु B के y अक्ष के बायीं और 3 मात्रक की दूरी तथा x के ऊपर 2 मात्रक की दूरी पर है ।

3) निर्देशाङ्क बिन्दु C = (−2, −1) हैं । इसका अर्थ है, कि C बिन्दु y अक्ष के बायीं और 2 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के नीचे 1 मात्रक की दूरी पर है ।

4) निर्देशाङ्क बिन्दु D = (2, −1) हैं । इसका अर्थ है, कि y अक्ष की दायीं और 2 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के नीचे 1 मात्रक की दूरी पर स्थित है ।

उदाहरण : निर्देशाङ्क बिन्दु P (x , y) एक निर्देशाङ्क बिन्दु भुज एवं कोटि से मिलकर बनता है ।

1) प्रथम चतुर्थांश में भुज एवं कोटि दोनों धनात्मक होते हैं । अत: निर्देशाङ्क (+, +)

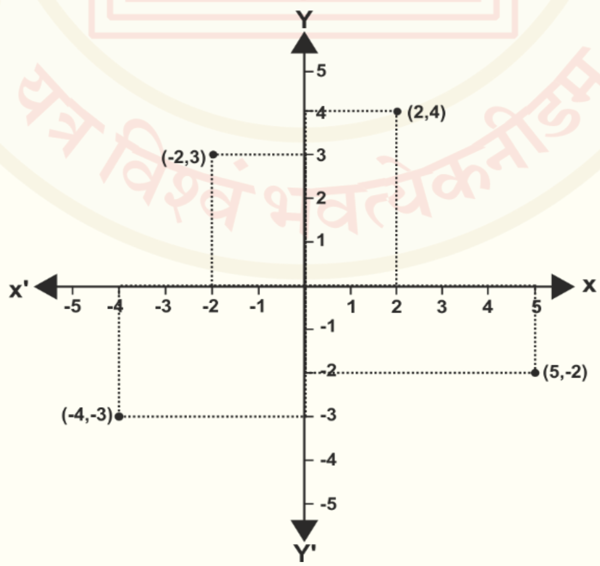
2) द्वितीय चतुर्थांश में भुज ऋणात्मक एवं कोटि धनात्मक होते हैं।अत: निर्देशाङ्क (−, +)

3) तृतीय निर्देशाङ्क में भुज एवं कोटि दोनों ऋणात्मक होते हैं । अत: निर्देशाङ्क (−, −)

4) चतुर्थ चतुर्थांश में भुज व धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक होता है । अत: निर्देशाङ्क(+ , −) है।

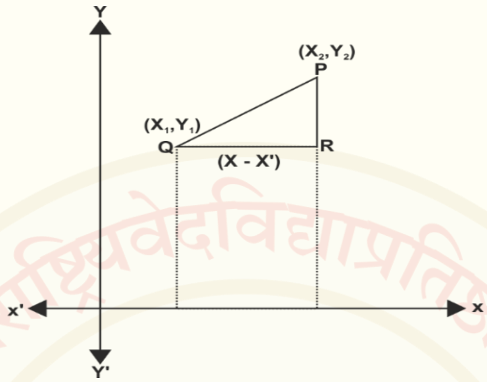
उदाहरण : आयतीय निर्देशाङ्क निकाय में बिन्दु (2, 4) , (−2, 3) , (−4, −3) एवं (5, −2) को आलेखित कीजिए ।

हल :



आकृति xox′ व yoy′ आयतीय निर्देशाङ्क खींचते हैं और दिए गए बिन्दुओं (2 , 4) , (−2 , 3) , (−4 , −3) एवं (5 , −2) को चिह्नित करते हैं ।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी –



अत: समकोण त्रिभुज POR में से बौधायन सूत्र से

$P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$(दो बिन्दुओं) के बीच की दूरी = $\sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$

उदाहरण : बिन्दुओं (2, 3) और (5, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना बिन्दु (2, 3) और (5, 6) क्रमश: PQ है । अत: इनके बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

P (2 , 3) और Q (5 , 6)

x_1 y_1 x_2 y_2

अभ्यास प्रश्नावली - 6

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) बिन्दु (– 8, 6) किस चतुर्थांश में स्थित है ?

(I) प्रथम (II) द्वितीय (III) तृतीय (IV) चतुर्थ

(ब) मूलबिन्दु के निर्देशाङ्क क्या होते हैं ?

(I) (1 ,1) (II) (0 , 1) (III) (0, 0) (IV) (1, 0)

(द) बिन्दु (6 , 10) की कोटि है ?

(I) 6 (II) 10 (III) – 4 (IV) 16

(प) (अ) किसी बिन्दु की x- अक्ष से दूरी क्या कहलाती है ?

(I) भुज (II) अक्ष (III) आलेख (IV) कोटि

(ब) y- अक्ष से बिन्दु (3 , 5) की दूरी होगी ?

(I) 5 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(म) x -अक्ष पर किसी बिन्दु का y- निर्देशाङ्क कितना होता है ?

(I) 1 (II) 0 (III) -1 (IV) इनमें से कोई नहीं

2. निम्नलिखित निर्देशाङ्क बिन्दु की चतुर्थांश में स्थित है बताइये ।

अ) (2, 4) ब) (−3, 4) स) (– 2,– 2) द) (3, −4)

3. आयतीय निर्देशाङ्क निकाय में बिन्दु (2, 4) , (3, 7) , (−4, −2) एवं (4 ,−2) को आलेखित कीजिए ।

4. निम्नलिखित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

अ) A (3, 4) , B (5, 6)

ब) P (3, 4) , Q (6, 7)

अध्याय - 7

वैदिक गणित

- गणितीय गणना का हल ज्ञात करने में जब वैदिक सूत्रों का निरन्तर मौखिक अभ्यास किया जाता है, तो बच्चों की एकाग्रता व स्मृति का विकास होता है ।

गणितीय मूल सङ्क्रियाओं का अभ्यास –

1) योग सङ्क्रिया –

उदाहरण : योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल :

	कि.ग्रा.		**ग्राम**
	1 1 2	.	0 6 5
	3 6 0	.	$\dot{0}\ \dot{7}\ 8$
+	$\dot{2}\ \dot{8}\ \dot{9}$	.	$\dot{8}\ 7\ 2$
	$\boxed{7\ 6\ 2}$	.	$\boxed{0\ 1\ 5}$

सङ्केत –

1) 65 ग्राम को 065 एवं 85 ग्राम 085 ग्राम लिखा ।
2) इकाई स्तम्भ ऊपर से योग प्रारम्भ करते हैं ।
3) 5 + 8 = 13 अत: 8 के पूर्व अङ्क 7 पर एकाधिक का चिह्न शेष 13 – 10 = 3
4) शेष 3 को नीचे अङ्क में जोड़ में हुए ऊपर के स्थान पर नीचे लिखें ($\dot{7}$ = 8)

इसी प्रकार प्रक्रिया आगे करें ।

ध्यान रहे - संख्या को स्तम्भ रचना पूरी करने के बाद सूत्र द्वारा पूर्ण संख्याओं के भाँति योग कर दीजिए ।

व्यवकलन (अन्तर) –

घटाव में -

$$\begin{array}{rl} 5 & \rightarrow \text{वियोज्य} \\ -\;2 & \rightarrow \text{वियोजक} \\ \hline 3 & \rightarrow \text{शेष} \end{array}$$

उदाहरण : वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 8\,7\,2 \\ -\,\dot{1}\,\dot{8}\,9 \\ \boxed{6\,8\,3} \end{array}$$

सङ्केत -

1) 2 में से 9 नहीं ही घटता है। इसलिए अत: 9 का परममित्र अङ्क 1 को 2 में जोड़ा जाता है। योग 3 को उत्तर के स्थान में नीचे लिखा जाता है।

2) 7 में से 9 ($\dot{8} = 9$) नहीं घटता है अत: 9 का परममित्र अङ्क 1 को 7 में जोड़ने पर 8 को उत्तर में नीचे के स्थान में लिखा $\dot{8}$ के पूर्व अङ्क 1 पर एकाधिकेन का चिह्न लगाए।

3) 8 में से 2 ($\dot{1} = 2$) को घटाया।

गुणन सङ्क्रिया –

गुणन सङ्क्रिया का हमने पिछली कक्षाओं में अभ्यास किया था। फिर पुन: अभ्यास दोहरातें है। इन सूत्रों का इतना अभ्यास करना चाहिए, कि गुणन सङ्क्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कर सके। देखिए, निम्न उदाहरण है।

उदाहरण : गुणा करें।

हल :

$$\begin{array}{r} 5\,8\,8 \\ \times\;5\,1\,2 \\ \boxed{} \end{array}$$

दी गई संख्याओं के गुणन के लिए सरलता से गुणफल देने वाले सूत्र का चयन करें।

➢ ‘अन्त्ययोर्शतकेऽपि’ सूत्र से गुणा –

1) यह सूत्र वहाँ प्रयोग किया जाता है,जहाँ गुणा के जाने वाली संख्या के अन्तिम दो अङ्क (इकाई और दहाई) के अङ्कों का योग 100 है शेष अङ्क समान है ।

2) अन्तिम दो अङ्कों का गुणा कर गुणनफल के दायें पक्ष में लिखे । ध्यान रहें – **दायें पक्ष में चार अङ्कों की संख्या होना चाहिए । अङ्क कम होने पूर्व में शून्य** लगाए ।

3) बायें पक्ष में उसके एकाधिकेन से गुणा कर बायाँ पक्ष में लिखे ।

गुणा करें - 588 × 512

100

$$
\begin{array}{r}
5\,8\,8 \\
\times\ 5\,1\,2 \\
\hline
5 \times 6\ /\ 88 \times 12 \\
30\ /\ \ 1056\ \ = 301056
\end{array}
$$

सङ्केत -

1) इकाई दहाई के अङ्कों का योग 88 + 12 = 100 है ।
आगे अङ्क समान है । तब,

2) बायाँ पक्ष = 5 × (5 का एकाधिकेन)
= 5 × 6 = 30

3) दायाँ पक्ष = 88 × 12 = 1056 (चार अङ्क है)

बायाँ पक्ष / दायाँ पक्ष

(अत: 5 × 6 / 88 × 12 = 301056 है।)

➢ ‘आनुरूप्येण’ सूत्र के द्वारा गुणा -

गुणा करें - 588 × 512

$$
\begin{array}{rr}
5\,8\,8 & +\,8\,8 \\
\times\ \ 5\,1\,2 & +\,1\,2 \\
\hline
(588 + 12)\ /\ 88 \times 12 & \\
600 \times 5\ /\ 1056 & \\
3000\ /\ 1056 & \\
+10 &
\end{array}
$$

= 301056

सङ्केत -

आधार = 100

उपाधार = 100 × 5 = 500

उपाधार अङ्क = 5

विचलन +88 एवं +12

दायें पक्ष में दो अङ्क रखते हैं। जब आधार 100 हो।

नोट : एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र यह सूत्र यहाँ प्रभावहीन है क्योंकि दोनों संख्या में एक संख्या 9 वाली नहीं है ।

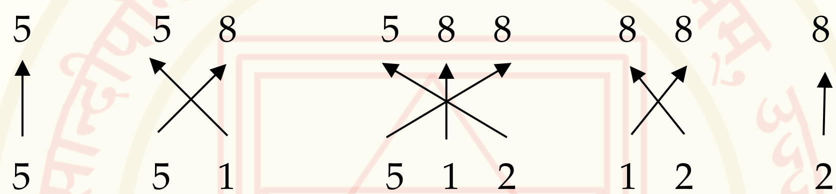
➢ **'ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्' सूत्र द्वारा गुणा**

$$\begin{array}{r} 5\,8\,8 \\ \times\ \underline{5\,1\,2} \end{array}$$

सङ्केत –

तीन अङ्कों में तीन अङ्कों का गुणा करने पर ड़ॉट स्टिक

V IV III II I



5×5 / 5×1+5×8 / 5×8+5×2+1×8 / 8×2+8×1 / 8×2

25 / 5+40 / 40+10+8 / 16+8 / 16

25 / 45 / 58 / 24 / 16

+6 +2 +1

= 301056

भाग सङ्क्रिया – ध्वजाङ्क' सूत्र : ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र आधारित सर्व व्यापक विधि द्वारा भाग सङ्क्रिया का कोई भी बड़े से बड़ा प्रश्न न्यूनतम गणनाओं से हल किया जा सकता है। भाजक को सुविधानुसार दो भागों में विभाजित किया जाता है । मुख्याङ्क तथा ध्वजाङ्क ।

(i) **ध्वजाङ्क :** भाजक के इकाई अङ्क अथवा इकाई युक्त कई अङ्क जो घाताङ्क के स्थान पर लिखे जाते हैं **ध्वजाङ्क** कहलाते हैं ।

(ii) **मुख्याङ्क :** भाजक का शेषफल जो आधार स्थान पर लिखा जाता है और वास्तविक भाग संक्रिया सम्पन्न करता है मुख्याङ्क कहलाता है ।

विधि : (1) तीन खण्डों में भाग संक्रिया के स्थान को विभाजित करते हैं ।

(2) प्रथम खण्ड में आधार स्थान पर मुख्याङ्क तथा घाताङ्क स्थान पर ध्वजाङ्क लिखते हैं ।

(3) ध्वजाङ्क में जितने अङ्क होते हैं, उतने ही अङ्क भाज्य के इकाई की तरफ से तृतीय खण्ड में तथा शेष मध्यखण्ड में रखे जाने चाहिए ।

ध्वजाङ्क (यह भाग की सामान्य विधि) –

उदाहरण: भागफल ज्ञात कीजिए । (ध्वजाङ्क विधि) $98765 \div 87$

हल:

$$
\begin{array}{c|cccc|l}
7 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\
8 & & 1 & 3 & 6 & 5 \\
\hline
 & 1 & 1 & 3 & 5 & 55 - 5 \times 7 \\
 & & & & & = 20
\end{array}
$$

सङ्केत –

1) भाजक = 87 या 8^7

8 = मुख्याङ्क , 7 = ध्वजाङ्क

2) तृतीय खण्ड में भाज्य का एक अङ्क = 5

3) $9 \div 8$ भागफल प्रथम अङ्क = 1, शेषफल = 1

4) नया भाज्य = 18, संशोधित भाग

5) $11 \div 8$ भागफल द्वितीय अङ्क = 1, शेषफल = 3

6) नया भाज्य = 37 संशोधित भाज्य

7) $30 \div 8$ भागफल तृतीय अङ्क = 3, शेषफल = 6

8) नया भाज्य = 66 संशोधित भाज्य $45 \div 8$,भागफल चतुर्थ अङ्क = 5 शेषफल = 5

9) नया भाज्य = 55

संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल ,भागफल = 1135, शेषफल = 20

घनफल – आधार विधि – आधार 10 हो तो एक-एक अङ्क अथवा आधार 100 दो-दो अङ्क तीनों खण्डों में रखे जाते हैं ।

घनफल = संख्या + (विचलन $\times$ 2) / 3 $\times$ (विचलन)^2 / (विचलन)^3

{जहाँ, विचलन = संख्या – आधार }

(जब आधार 10 हो)

उदाहरण : संख्या 15 का घनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : 15^3

आधार = 10

$15 - 10 = +5$ (विचलन)

संख्या = 15 , विचलन = 5

तब, **घनफल = संख्या + (विचलन $\times$ 2) / 3 $\times$ (विचलन)^2 / (विचलन)^3**

$= 15 + (5 \times 2) / 3 \times (5)^2 / (5)^3$

$= 15 + 10 / 3 \times 25 / 5 \times 5 \times 5$

$= 25 / 75 / 125$

या $= 25 / {}_{7}5 / {}_{12}5$

$= 3375$

(जब आधार 100 हो)

उदाहरण : संख्या 104 का घनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $(104)^3$

विचलन = संख्या – आधार

= $104 - 100 = 4$

तब, **घनफल** = **संख्या + (विचलन × 2) / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3** घनफल

$= 104 + 4 \times 2 \;/\; 3 \times (4)^2 \;/\; 4^3$

$= 104 + 8 \;/\; 3 \times 16 \;/\; 4 \times 4 \times 4$

$= 112 \;/\; \underline{48} \;/\; \underline{64}$ **(नोट** : यहाँ दो अङ्क रखेंगे क्योंकि आधार 100 हैं ।)

$= 1124864$

घनमूल –

4 का घन

4 का घन $= 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

64 का घनमूल

यहाँ 4 का घन 64 है ।

या 64 का घनमूल 4 है ।

घनफल की सङ्क्रिया के विपरीत सङ्क्रिया घनमूल होती है ।

पूर्णघन संख्या की पहचान –

1) घन संख्या के बीजाङ्क 1, 8 एवं 9 अथवा 0 हो सकते हैं ।

जैसे : 625 का बीजाङ्क $6 + 2 + 5 = 13 = 1 + 3 = 8$ अत: 625 एक पूर्ण घन संख्या है।

उपर्युक्त बीजाङ्क वाली संख्या पूर्ण घन होती है ।

2) जिस पूर्णघन संख्या का चरमांक (इकाई) अङ्क 1, 4, 5, 6, 9 अथवा 0 होता है, तो उसके घनमूल के इकाई का अङ्क भी वही होता है ।

3) जिस पूर्ण घन संख्या का चरमाङ्क (इकाई) अङ्क 2, 8, 3 एवं 7 होता है तो उसके घनमूल का इकाई अङ्क इस दिये हुए अङ्क का परममित्र अङ्क होता है ।

4) घन संख्या के घनमूल का अन्तिम अङ्क संख्या के अन्तिम समूह से ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण : क्या संख्या 9528127 पूर्ण घन है ?

हल : 9528127 के बीजाङ्क का योग 9 + 5 + 2 + 8 + 1 + 2 + 7 = 7

अत:, यह पूर्ण घन संख्या नहीं है ।

हम जानते हैं, **पूर्ण घन संख्या का बीजाङ्क का योग 1, 8, 0 या 9 होता है ।** घनमूल ज्ञात करने के पहले निम्न सारणी को ध्यान से देखिए यह आपको घनमूल के निर्धारित करने में सहायता करेंगी ।

सारणी - 1

अगर घन का अन्तिम अङ्क निम्न है तो	घनमूल का इकाई अङ्क होगा
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

उपर्युक्त **सारणी - 1** से हम निम्नाङ्कित तथ्य निकाल सकते हैं ।

1) 1, 4, 5, 6, 9 और शून्य (0) घन के अन्त में अपने आपको दोहराते हैं।

2) 2, 3, 7 और 8 घनमूल का इकाई अङ्क दिये अङ्क का परममित्र अङ्क है।

3) 7 अङ्कों वाले घनमूल का बायाँ अङ्क या 7 अङ्कों से कम अङ्कों वाले घनमूल का दहाई अङ्क निम्न सारणी की सहायता से निकाला जा सकता है।

सारणी - 2

घन मूल का सबसे बायें स्थित जोड़ा	निकटतम घनमूल
1 – 7	1
8 – 26	2
27 – 63	3
64 – 124	4
125 – 215	5
216 – 342	6
343 – 511	7
512 – 728	8
729 – 999	9

घनमूल की वैदिक विधि (उपसूत्रविलोकनम्) – घनमूल निकालने के लिए दायीं ओर से शुरू करके तीन-तीन अङ्कों से समूह तैयार कीजिए। जैसा की ऊपर बताया गया है और सारणी 1, सारणी 2 की सहायता से घनमूल का इकाई और दहाई के अङ्क पता कीजिए।

उदाहरण : 941192 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 1) दायें से तीन-तीन अङ्कों का समूह बनाएँ। $\overline{941}$ $\overline{192}$

2) चूंकि रेखा दो संख्या पर है, इसलिए घनमूल में सिर्फ दो अङ्क होंगे।

3) चूंकि इकाई का अङ्क 2 है। इसलिए घनमूल का इकाई अङ्क 8 होगा।

4) दहाई के अङ्क के लिए, सारणी - 2 देखें

$9^3 < 941 < 10^3$

दहाई का अङ्क = 9 इस प्रकार, $\sqrt[3]{941132} = 98$

अभ्यास प्रश्नावली - 7

1. निम्नलिखित प्रश्नों के वैदिक गणित के अन्त्ययोर्शतकेऽपि सूत्र से गुणनफल ज्ञात कर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

   अ) $590 \times 510 = $ ....

   ब) $596 \times 504 = $ ....

   स) $888 \times 815 = $ ....

2. योगफल कीजिए। (एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र द्वारा)

   अ)
   $$\begin{array}{r} 34567 \\ 13567 \\ 82134 \\ +\ 34212 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

   ब)
   $$\begin{array}{r} 3456 \\ 1342 \\ 8134 \\ +\ 3412 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

3. वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिए।

   अ)
   $$\begin{array}{r} 98373 \\ -\ 31987 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

   ब) **कि.ग्रा. . ग्राम**
   $$\begin{array}{r} 137\ .\ 065 \\ -\ 112\ .\ 385 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

4. गुणन करें।

एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से

अ) $\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline \boxed{} \end{array}$ ब) $\begin{array}{r} 108 \\ \times 102 \\ \hline \boxed{} \end{array}$ स) $\begin{array}{r} 73 \\ \times 77 \\ \hline \boxed{} \end{array}$

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से

द) 23×99 प) 136×9999

ऊर्ध्वतियग्भ्याम् सूत्र से

फ) 362×123 भ) 341×214

5. भागफल ज्ञात कीजिए।

अ) $11034 \div 889$ ब) $1994 \div 98$

द) $13385 \div 121$ प) $1358 \div 113$

प) $37941 \div 79$ फ) $4096 \div 64$

6. निम्नलिखित संख्या पूर्ण घन संख्या है या नहीं बीजाङ्क का प्रयोग ।

अ) 68921 ब) 1279 स) 256

7. वैदिक सूत्र (विलोकनम्) द्वारा पूर्ण घनमूल ज्ञात कीजिए।

अ) 493039 ब) 42875 स) 636056

अध्याय - 8

समान्तर श्रेणी

अनुक्रम – संख्याओं का एक ऐसा फलन जिसमें प्रत्येक अवयव को एक निश्चित क्रम में रखा जाता हैं उसे हम **अनुक्रम** कहते हैं उस समुच्चय के अवयवों को पद कहते है। अनुक्रम के n वें पद को व्यापक पद कहते हैं। अनुक्रम के पदों को $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ दर्शाते हैं।

उदाहरण : 2 , 4 , 6 , 8 , 10

-10 , -9 , -8 , -7 , -6

सार्व अन्तर – वह निश्चित संख्या जिसे योग एवं व्यवकलन करने पर सूची की अगली संख्या प्राप्त हो सार्व अन्तर कहते हैं। सार्व अन्तर को 'd' से दर्शाया जाता है। यदि अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$ है, तो सार्व अन्तर को किन्हीं दो पदों के अन्तर के रूप में लिखते हैं। $d = a_2 - a_1$ या $a_3 - a_2$ या $a_4 - a_3$ आइए, उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण : दिए गए व्यापक पद $a_n = n + 2$ से अनुक्रम के पहले पाँच पद लिखिए।

हल : अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = n + 2$

जहाँ n = प्राकृत संख्या तब n के स्थान पर 1, 2, 3, 4 तथा 5 को प्रस्थापित करते है।

n = 1 रखने पर $a_1 = 1 + 2 = 3$, n = 2 रखने पर $a_2 = 2 + 2 = 4$

n = 3 रखने पर $a_3 = 3 + 2 = 5$, n = 4 रखने पर $a_4 = 4 + 2 = 6$

n = 5 रखने पर $a_5 = 5 + 2 = 7$

प्राप्त किए अनुक्रम में पहले पाँच पद इस प्रकार है।

3 , 4 , 5 , 6 , 7 है

इस प्रकार, आप देखते है कि **किसी व्यापक पद a_n या वे पद में कोई मान रखते हैं। तो उस स्थान के पद मान प्राप्त होगा।**

उदाहरण : दिये गए a_n वाँ पद से अनुक्रम का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

1) $a_n = 2n - 1$

हल :1) यदि n वाँ पद $a_n = 2n - 1$

अनुक्रम का 12 पद ज्ञात करने के लिए व्यापक रूप में $n = 12$ रखने पर -

$a_{12} = 2 \times 12 - 1$

$= 24 - 1 = 23$

अत:, दिये गये व्यापक $a_n = 2n - 1$ रूप का 12 वाँ पद 23 है।

श्रेणी : यदि हम किसी भी अनुक्रम के पदों को धन या ऋण चिह्नों से व्यक्त करे तो प्राप्त व्यंजकों को **श्रेणी** कहते हैं। **उदाहरण:** **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +.........**

समान्तर श्रेणी – समान्तर का अर्थ है : समान + अन्तर (सार्व अन्तर)

समान्तर श्रेणी संख्याओं की एक ऐसी सूची है। जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद को छोड़कर) अन्य पद एक निश्चित संख्या जोड़ने या घटाने पर प्राप्त होता है। उस श्रेणी को **समान्तर श्रेणी** कहते हैं और उस निश्चित संख्या को सार्व अन्तर को 'd' तथा प्रथम पद को 'a' से दर्शाते हैं। दूसरे शब्दों में ''एक ऐसी श्रेणी जिसमें दो पदों के बीच में समान अन्तर हो,तो ऐसी श्रेणी को **समान्तर श्रेणी** कहते हैं।'' इसे संक्षिप्त में A.P. (Arithmetic progression) से दर्शाया जाता है।

जहाँ a_n = nवाँ पद

n = पदों की संख्या

d = सार्वअंतर

या व्यापक पद या n वाँ पद $\mathbf{a_n = a + (n-1)\, d}$

उदाहरण : यदि 4 , 8 , 12 , 16 , 20 एक समान्तर श्रेणी है, तो श्रेणी a_{10} का पद क्या होगा ?

हल : श्रेणी 4, 8, 12, 16, 20

$a = 4$, $d = a_2 - a_1 = 8 - 4 = 4$

हम जानते हैं समान्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

$n = 10$ रखने पर

$$a_{10} = 4 + (10-1)\,4$$

$$= 4 + (9) \times 4$$

$$= 4 + 36 = 40$$

अत: समान्तर श्रेणी का 10 वाँ पद $a_{10} = 40$ है ।

समान्तर माध्य (समान्तर श्रेणी का मध्य पद) : यदि a , b , c समान्तर माध्य A.P. में है, तो $b = \frac{a+c}{2}$ यहाँ b, a तथा c का **समान्तर माध्य** कहलाता है।

उदाहरण : समान्तर श्रेणी 5 , ... , 15 का मध्य पद ज्ञात कीजिये।

हल: हम जानते हैं समान्तर श्रेणी का मध्य पद $b = \frac{a+c}{2}$

तब , $\frac{5+15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

अत: मध्य पद 10 है।

अभ्यास प्रश्नावली - 8

1. निम्नलिखित अनुक्रम के रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें ।

   1) 1 , 3 , 5 , ……, 7 , 11

   2) 7 , …… , 21 , 28 , 35

   3) – 10 , – 9 , ….. , – 7 , – 6

2. अनुक्रम से आप क्या समझते है ?

3. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) समान्तर श्रेणी (A.P.) 6 , 3 , 0 , -3 …..... का सार्वअन्तर क्या है ?

(I) 3 (II) – 3 (III) – 2 (IV) 1

(ब) निम्नलिखित श्रेणी में से कौन-सी समान्तर श्रेणी है ?

(I) 2 , 4 , 8 , 16 , … (II) 1 , 3 , 9 , 27 , …

(III) 1 , 2 , 3, 4, 5 … (IV) 0 , 5 ,25 , 10 , …

(स) यदि समान्तर श्रेणी का सामान्य पद 3n + 5 है , तो इसका सार्वअन्तर होगा –

(I) 1 (II) 3 (III) 2 (IV) 5

(प) यदि समान्तर श्रेणी (AP) का प्रथम पद a और सार्वअन्तर(पदान्तर) d हों , तो nवाँ पद होगा –

(I) $a + nd$ (II) $a + (n – 1) d$

(III) $a + (n + 1) d$ (IV) $(2a + (n – 1)$

4. दी गई श्रेणी 25, 21, 29, 31, 33 एक समान्तर श्रेणी है इस श्रेणी का 10 वाँ पद या a_{10} ज्ञात कीजिए ।

5. श्रेणी 3 , 5 , 7 , 9 , 11 समान्तर श्रेणी 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

6. क्या श्रेणी 8 , 16 , 24 , 32 , 40 एक समान्तर श्रेणी है ?

7. निम्नलिखित समान्तर श्रेणियों में रिक्त-स्थानों के पदों को ज्ञात कीजिए :

अ) 2 , $\boxed{}$, 26

ब) 20 , $\boxed{}$, 60

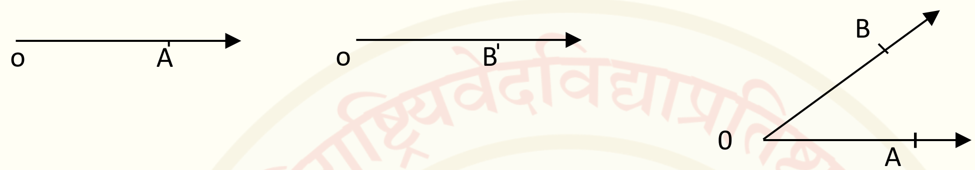
8. समान्तर श्रेणी 3 , 8 , 13 , 18 …….. का कौन-सा पद 78 वाँ है ?

9. किसी समान्तर श्रेणी का 17 वाँ पद उसके 10 वें पद से 7 अधिक है । इसका सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए ।

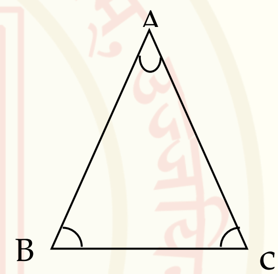
अध्याय -9

प्रायोगिक रचनाएँ

कोण – उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणों से **कोण** बनता है । दो किरणें OA और OB कोण AOB बनाती है । (इसे ∠BOA भी लिख सकते हैं)



त्रिभुज – तीन रेखाखण्डों से बनी सरल बन्द आकृति **त्रिभुज** कहलाती है । इसमें तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं ।



निम्न आकृति (ΔABC) है । इसमें ,

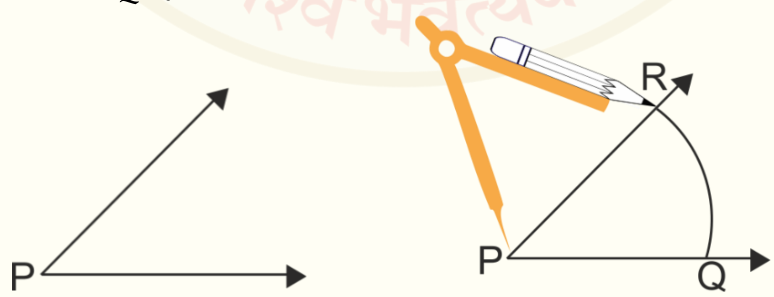
भुजाएँ = $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण = ∠BAC , ∠ABC , ∠BCA

शीर्ष = A , B , C

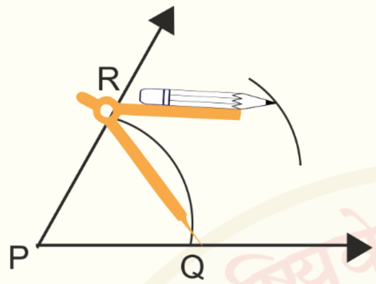
परकार की सहायता से दिए गए कोण का समद्विभाजन- निम्न चित्र में ∠P दिया है ।

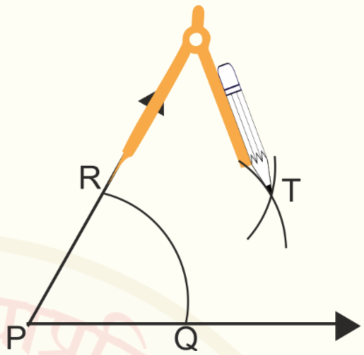
चरण 1) बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाए ,जो कोण P की भुजाओं को Q एवं R पर काटे ।



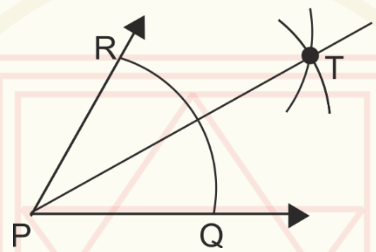
चरण 2) Q को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप कोण P के फैलाव क्षेत्र (आभ्यन्तर) में लगाए ।

चरण 3) इसी प्रकार R को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाए जो पूर्व में लगाए चाप को काटे ।





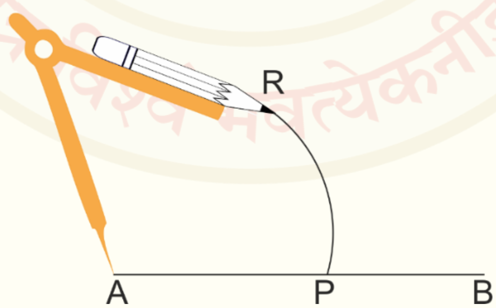
चरण 4) T एवं P को मिलाने पर कोण P का समद्विभाजक TP प्राप्त होता है ।



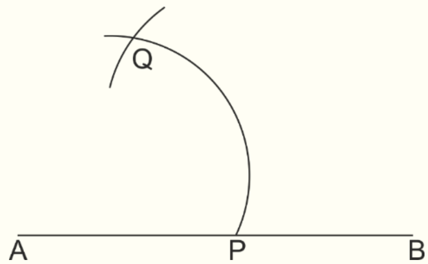
परकार की सहायता से कोणों की रचना

(1) 60^0की रचना करना

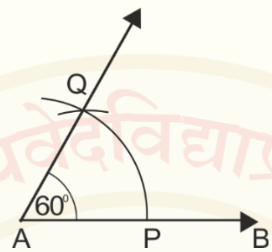
चरण 1) एक रेखाखण्ड AB खींचिए उपर्युक्त त्रिज्या का नाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु A पर रखकर एक चाप खींचिए जो रेखाखण्ड AB को बिन्दु P पर काटता है ।



चरण 2) बिन्दु P पर नुकीले सिरे को रखकर उसी त्रिज्या के माप का चाप पूर्व चाप पर बनाए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिन्दु को Q अङ्कित करें।

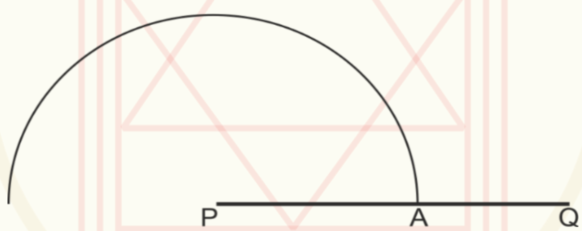


चरण 3) AQ को मिलाने पर $\angle QAB = 60^0$ बनता हैं ।

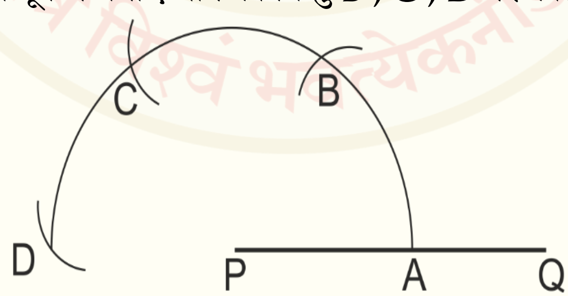


(ii) 30^0 के कोण की रचना

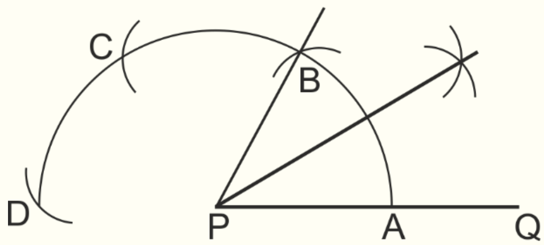
चरण 1) रेखाखण्ड PQ खींचिए उपर्युक्त त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप खींचिये ।



चरण 2) उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु A , B और C पर रखकर चाप काटे जो पूर्व में बनाए चाप को बिन्दु B , C , D पर काटता हो।



चरण 3) PB को मिलाने पर $\angle BPA = 60^0$ प्राप्त होता है इसका समद्विभाजन करने पर 30^0 का कोण प्राप्त होता है। यहाँ , $\angle BPM = \angle MPQ = 30^0$

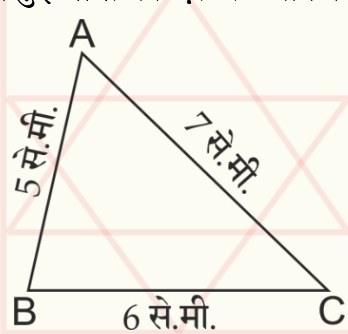


त्रिभुजों की रचना- त्रिभुज की दो भुजाओं की माप का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता हैं।

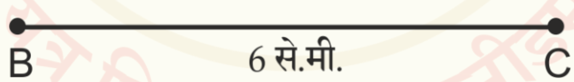
➢ **त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाएँ दी गई हो ।**

उदाहरण : एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB =5 से.मी., BC = 6 से.मी., और AC = 7 से.मी. हो ।

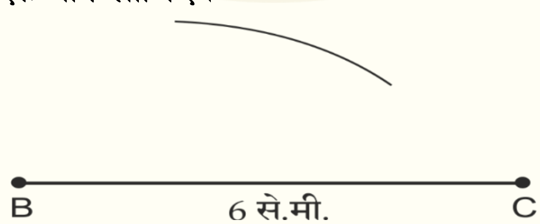
हल : चरण 1) सर्वप्रथम हम दी हुई मापों का एक कच्चा चित्र बनाते हैं ।



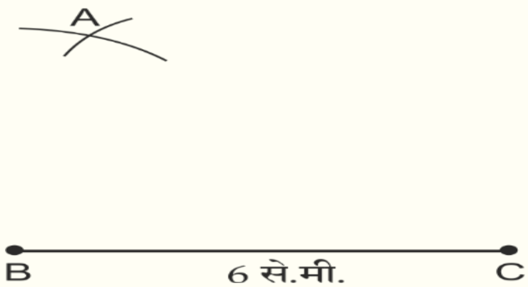
चरण 2) 6 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड BC खींचिए।



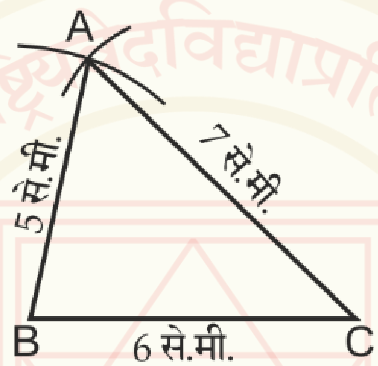
चरण 3) बिन्दु B से बिन्दु A से 5 से.मी. की दूरी पर है । अत: B को केन्द्र मानकर और 5 से.मी. त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए ।



चरण 4) AC = 7 से.मी. है । अत: C को केन्द्र मानकर और 7 से.मी. त्रिज्या लेकर एक चाप इस तरह खींचेंगे कि वह B से खींचे गए चाप को एक बिन्दु पर काटे ।



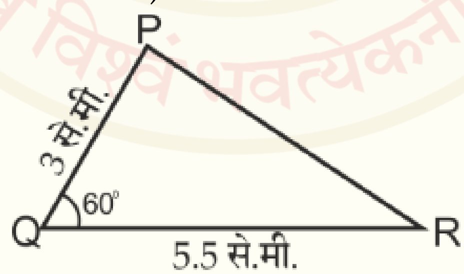
चरण 5) दोनों चापों को प्रतिच्छेद बिन्दु A है। बिन्दु A,B और A,C को मिलाएँ। जिससे त्रिभुज ABC प्राप्त होता है।



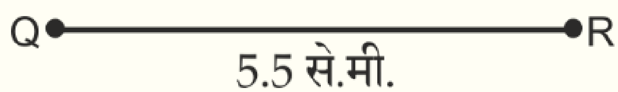
➢ **एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण की माप दी हो**

उदाहरण: एक त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि PQ = 3 से.मी., QR = 5.5 से.मी. और कोण $\angle PQR = 60^0$ है।

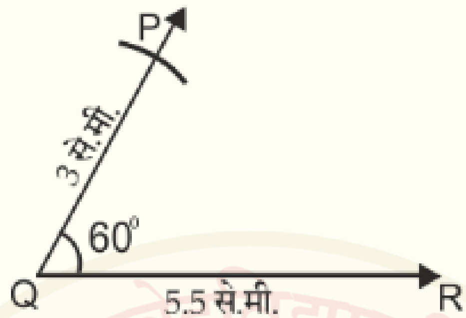
हल :चरण 1) सर्वप्रथम हम दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा त्रिभुज खींचते हैं। (इससे हमें त्रिभुज की रचना करने में सहायता मिलेगी)



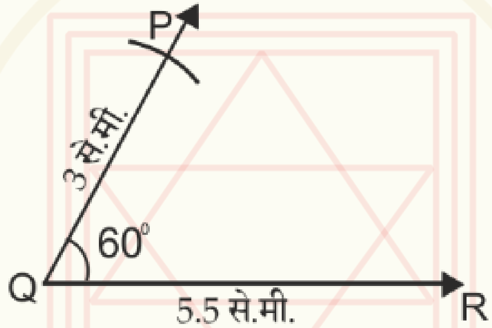
चरण 2) 5.5 से.मी. लम्बाई का एक रेखाखण्ड QR खींचिए।



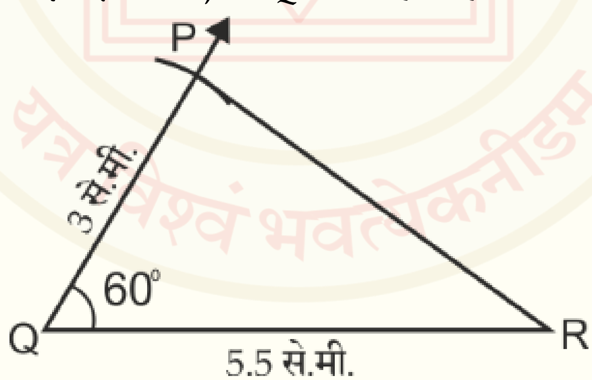
चरण 3) Q पर किरण $\overrightarrow{QX}$ खींचिए जो QR के साथ **60**^{0} का कोण बनाइए। बिन्दु P को कोण की $\overrightarrow{QX}$ किरण पर होगा।



चरण 4) बिन्दु P निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है। Q को केन्द्र मानकर 3 से.मी. त्रिज्या का एक चाप खींचिए। यह QX को P बिन्दु पर काटता है।



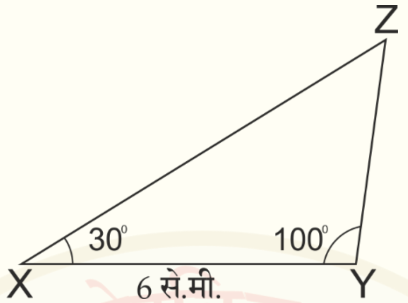
चरण 5) P,R को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त होता है।



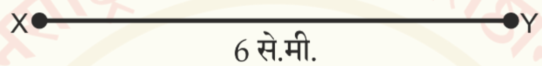
➢ **एक त्रिभुज की रचना जब दो कोण एवं उनके बीच की भुजा दी हो।**

उदाहरण : Δ XYZ की रचना कीजिए, यदि XY=6 से.मी., $\angle ZXY = 30^0$ और $\angle XYZ = 100^0$ है।

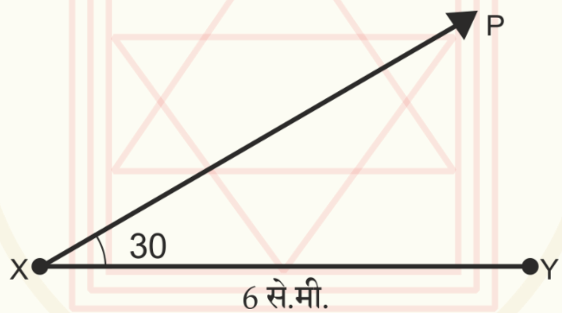
हल :चरण 1) सर्वप्रथम, हम अङ्कित मापों के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते है। (इससे अनुमान लग जाता हे कि कैसे रचना की जाए।)



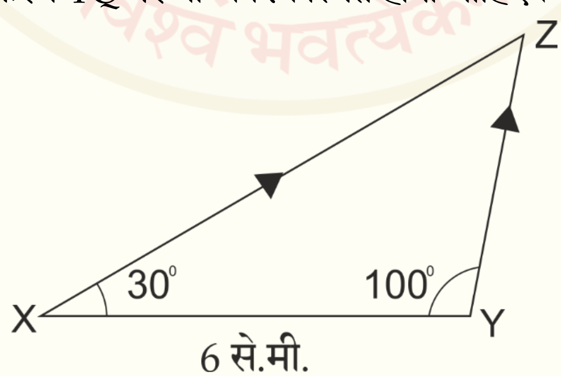
चरण 2) 6 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड XY खींचिए।



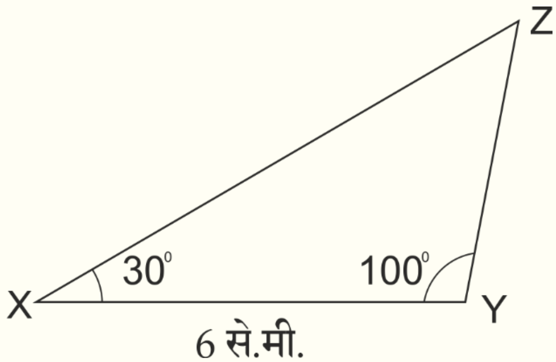
चरण 3) X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30^0 का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार बिन्दु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए।



चरण 4) Y पर एक किरण YQ खींचिए जो YX से 100^0 का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए।



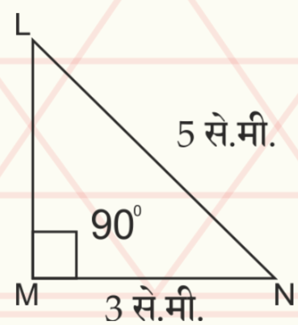
चरण 5) दोनों किरणों XP और YQ का प्रतिच्छेद बिन्दु Z है। जिससे ΔXYZ प्राप्त होता है।



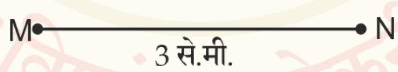
➢ **एक त्रिभुज की रचना जब समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा दी हो**

उदाहरण : Δ LMN की रचना कीजिए जिसका LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 से.मी. और MN = 3 से.मी हो ।

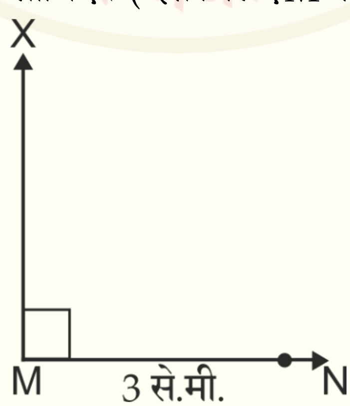
हल :चरण 1) एक कच्चा चित्र खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अङ्कित कीजिए । समकोण अङ्कित करना याद रखिए ।



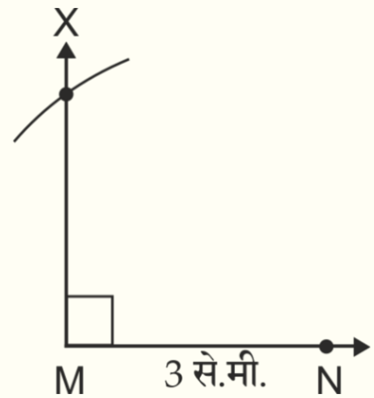
चरण 2) 3 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड MN खींचिए ।



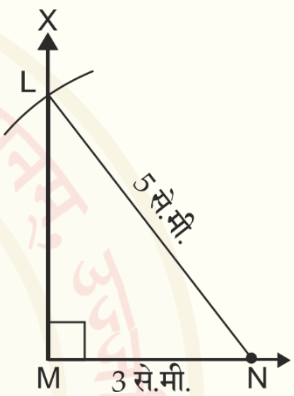
चरण 3) M पर MX ⊥ MN खींचिए । (इसके लिए M पर 90^0 का कोण बनाइए।)



चरण 4) N को केन्द्र मानकर 5 से.मी. का एक चाप खींचिए। (L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए क्योंकि यह N से 5 से.मी. की दूरी पर है।)



चरण 5) L को लम्ब रेखा MX पर और केन्द्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अत: L इनको दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा। LN को जोड़िए। अब त्रिभुज LMN प्राप्त होता है।



अभ्यास प्रश्नावली - 9

1. परकार व रूलर (स्केल) की सहायता से निम्न कोणों की रचना किजिए।

   अ) 90^0 ब) 45^0 स) 120^0 द) 60^0

2.. किसी त्रिभुज की रचना के अभीष्ट मापों के आधार लिखिए।

3.. ΔABC की रचना कीजिए जब $AB = 4$ से.मी., $BC = 3$ से.मी.,$CA = 5$ से.मी. हो।

4. ΔPQR की रचना कीजिए जब $PR = 6$ से.मी., $PQ = 4.5$ से.मी.तथा $\angle P = 90^0$ हो।

5. Δxyz की रचना कीजिए जब $xy = 4$ से.मी., $\angle x = 45^0$ तथा $\angle y = 50^0$ है।

6. ΔABC की रचना कीजिए जहाँ $\angle B = 90^0$, $AC = 5$ से.मी., $BC = 3$ से.मी. हो।

अध्याय - 10

वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल

वृत्त की परिधि – भारत के महान् गणितज्ञ 'श्रीधराचार्य' द्वारा लिखित **(त्रिशतिका क्षेत्र. श्लो. 45)** (पाटीगणितसार) पुस्तक में वृत्त की परिधि के बारे निम्न श्लोक बताया गया है।

'वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः'

अर्थात् $\text{परिधि} = \sqrt{\mathbf{10} \times \text{व्यास}^2}$

अत: पाई $= \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$

$\text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास}$ या $\text{परिधि} = \pi \times 2 \times \text{त्रिज्या}$

या **वृत्त कि परिधि** $= 2\,\pi r$

- एक महान प्रतिभाशाली **भारतीय गणितज्ञ 'श्रीनिवास रामानुजन'** (1887 – 1920) की एक सर्वसमिका का प्रयोग करके गणितज्ञ π का मान दशमलव के लाखों स्थानों तक परिकलित करने में समर्थ हुए। व्यवहारिक कार्यों के लिए हम प्राय: यह मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं।

उदाहरण : वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें। जिसकी परिधि 44 से.मी. है।

हल : दिया है, वृत्त की परिधि = 44 से.मी. हम जानते हैं,

वृत्त की परिधि $= \mathbf{2\pi r}$

या $2\pi r = 44$ से.मी.

$r = \frac{44}{2\pi}$

$r = \frac{44}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7$ से.मी.

अत:, वृत्त की त्रिज्या = 7 से.मी. हैं।

वृत्त का क्षेत्रफल - **वृत्त का क्षेत्रफल** $(A) = \pi r^2$

उदाहरण : उस वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिकी त्रिज्या 7 से.मी. है ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 से.मी. हम जानते हैं कि -

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

$= 2 \times 22$

= 44 से.मी.

वृत्त का क्षेत्रफल $(A) = \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (7)^2$

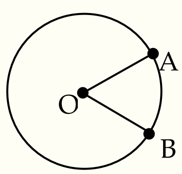
$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 22 \times 7$

= 154 (से.मी.)^2

अत:, वृत्त की परिधि = 44 से.मी. एवं वृत्त का क्षेत्रफल = 154 (से.मी.)^2 हैं ।

वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल – किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए, क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्याखण्ड कहते है ।



वृत्त के त्रिज्याखण्ड के द्वारा घेरे गये क्षेत्र को **त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल** कहते है ।

त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$

त्रिज्या के चाप AB की लम्बाई ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र -

चाप की लम्बाई $= 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

उदाहरण : यदि वृत्त का क्षेत्रफल 180 (से.मी.)^2 है और त्रिज्याखण्ड का कोण 90^0 है, तो चाप द्वारा बने लघु त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है, वृत्त का क्षेत्रफल = 180 (से.मी.)^2

त्रिज्याखण्ड का कोण = 90^0 तब हम जानते हैं,

त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$

$= 180^0 \times \frac{90}{360}$

$= \frac{90}{2}$

= 45 (से.मी.)^2

उदाहरण : यदि वृत्त की परिधि 90 से.मी. है तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 80^0 है, तो चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है, वृत्त की परिधि $(2\pi r)$ = 90 से.मी.

चाप द्वारा बना कोण = 80^0

तब हम जानते हैं,

चाप की लम्बाई $= 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

$= 90 \times \frac{80}{360}$

= 20 से.मी.

अभ्यास प्रश्नावली - 10

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) 44 मीटर परिधि वाले वृत्त की त्रिज्या होगी –

(I) 14 मीटर (II) 7 मीटर (III) 5 मीटर (IV) 44 मीटर

(ब) दो वृत्तों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 1 है, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात –

(I) 4 : 1 (II) 2 : 1 (III) 1 : 2 (IV) 1 : 4

(स) π (पाई) = ...

(I) परिधि (II) $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ (III) $\frac{\text{व्यास}}{\text{परिधि}}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

(द) किसी वृत्त का क्षेत्रफल 64π cm^2 है। उसका व्यास कितना होगा ?

(I) 15 cm (II) 16 cm (III) 20 cm (IV) 17 cm

2. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें, जिसकी परिधि 66 से.मी. हो ।

3.. यदि वृत्त की त्रिज्या 14 से.मी. है, तो वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

4. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. हो ।

5. निम्न सूत्रों को लिखकर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये ।

(अ) वृत्त का क्षेत्रफल = ...

(ब) वृत्त का परिधि = ...

(स) त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल = ...

(द) त्रिज्याखण्ड की चाप की लम्बाई = ...

6. त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की परिधि ($2\pi r$), त्रिज्याखण्ड द्वारा अन्तरित कोण (θ) निम्नलिखित है ।

अ) परिधि ($2\pi r$) = 120 से.मी. , $\theta = 180^0$

7. त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2) दोनों त्रिज्या द्वारा अन्तरित कोण निम्नलिखित है ।

अ) वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2) = 90 (से.मी.$)^2$, $\theta = 120^0$

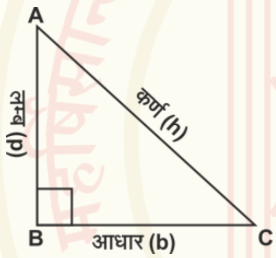
अध्याय - 11

त्रिकोणमिति का परिचय

- दूरी अथवा ऊँचाईयों कुछ गणितीय तकनीक जो **त्रिकोणमिति** नामक गणित की एक शाखा के अन्तर्गत आते हैं ।

त्रिकोणमिति – समकोण त्रिभुज का न्यूनकोण के सापेक्ष भुजाओं के अनुपात का अध्ययन करेंगे । जिन्हें कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात कहते हैं ।

समकोण त्रिभुज – त्रिभुज जिसमें एक कोण 90^0 हो, उसे समकोण त्रिभुज कहा जाता है । इसमें एक कोण समकोण (90^0) तथा दो न्यूनकोण (90^0 से कम) होते हैं ।



यहाँ $\angle B$ = समकोण (90^0)

$\angle A$, $\angle C$ = न्यूनकोण हैं ।

कर्ण (Hypotenous) – समकोण त्रिभुज में समकोण (90^0) के सामने वाली भुजा कर्ण कहलाती है । यह त्रिभुज सबसे बड़ी भुजा होती है । इसे ‘h’ दर्शाते हैं ।

आधार (Base) –

समकोण त्रिभुज किसी एक न्यूनकोण के संलग्न भुजा **आधार** कहलाती है । इसे ‘b’ दर्शाते हैं।

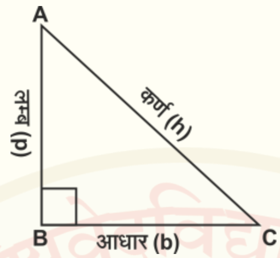
लम्ब (perpendicular)– समकोण त्रिभुज में न्यूनकोण के सामने वाली भुजा लम्ब कहलाती है इसे ‘P’ से दर्शाते हैं ।

बौधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय) – समकोण त्रिभुज में

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$(h)^2 = (p)^2 + (b)^2$ जहाँ h = कर्ण, p = लम्ब एवं b = आधार है ।

त्रिकोणमिति अनुपात – समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों के सापेक्ष त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात कोणों के त्रिकोणमिति अनुपात कहलाते हैं ।



मान लीजिए कि ∠C न्यूनकोण है, तब न्यूनकोण के सामने वाली भुजा AB लम्ब होगी व BC संलग्न भुजा आधार है तथा समकोण ∠B के सामने वाली भुजा AC कर्ण (h) है ।

∠C का sine को संक्षेप में "$\sin C$" लिखा जाता है ।

नोट : यहाँ "$\sin C$" का अर्थ "sin" गुणा C नहीं होता है । बल्कि ∠C का $\sin C$ है ।

$$\text{sine}\ C = \frac{\text{लम्ब}\ (p)}{\text{कर्ण}\ (h)} \quad , \quad \text{cosecant}\ C = \frac{\text{कर्ण}\ (h)}{\text{लम्ब}\ (p)}$$

$$\text{cosine}\ C = \frac{\text{आधार}\ (b)}{\text{कर्ण}\ (h)} \quad , \quad \text{secant}\ C = \frac{\text{कर्ण}\ (h)}{\text{आधार}\ (\text{b})}$$

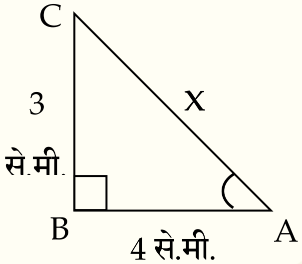
$$\text{tangent}\ C = \frac{\text{लम्ब}\ (p)}{\text{आधार}\ (b)} \quad , \quad \text{cotangent}\ C = \frac{\text{आधार}\ (\text{b})}{\text{लम्ब}\ (p)}$$

- समकोण त्रिभुज के भुजाओं से तीन अनुपात को संक्षेप में $\sin C$, $\cos C$ एवं $\tan C$ त्रिकोणमिति अनुपात है । इन तीन अनुपात को बदल देने पर तीन और अनुपात $\operatorname{cosec} C$, $\sec C$, $\cot C$ बनेंगे। अतः, न्यूनकोण के सापेक्ष **छः त्रिकोणमिति अनुपात** होते हैं ।

उदाहरण : यदि $\tan A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\sin A$ का मान परिकलित कीजिए ।

हल : दिया है, $\tan A = \frac{3}{4}$

तब हम जानते हैं $\tan A = \frac{3}{4} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$



तब बौधायन प्रमेय से

(कर्ण)^2 = (लम्ब)^2 + (आधार)^2

(कर्ण)$^2 = (3)^2 + (4)^2$

(कर्ण)$^2 = 9 + 16$

(कर्ण)$^2 = 25$

कर्ण $= \sqrt{25} = 5$ से.मी.

तब, $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$

- **वैदिक गणित में तीव्र गति से बौधायन (पाइथागोरस) त्रिक की गणना**

तासां त्रिक चतुष्कयो: द्वादशिक पंचिकयो: पञ्चदशिकाष्टिकयो: सप्तिक चतुर्विंशिकयो: द्वादशिक पञ्चत्रिंशिकया: पञ्चदशिक षट्त्रिंशिकयो: इत्येतासु उपलब्धि:। (**बौधायन शुल्बसूत्र** 1.38)

उपर्युक्त सूत्र में बौधायन प्रमेय से समकोण त्रिभुज के वर्ग का सामान्य सूत्र बताया गया है ।

जो निम्न है- $(5n)^2 = (3n)^2 + (4n)^2$

आइए, पाइथागोरस त्रिक की गणना करना सीखते हैं ।

स्थिति 1: जब संख्या विषम हो - हम जानते हैं कि किसी विषम संख्या का वर्ग भी विषम संख्या होता है यह वर्ग दो क्रमागत संख्याओं का योग होता है, अगर आप त्रिक में से किसी एक का मान जानते हैं, तो शेष दो के मान सरलता से ज्ञात कर सकते हैं । निम्न उदाहरण को ध्यान से देखिए ।

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

स्थिति 2: **जब संख्या सम हो -** संख्या को 2 , 4 , 8 आदि से भाग दें जिससे आपको विषम संख्या प्राप्त होती है । विषम संख्या प्राप्त **स्थिति** 1 में बताये गये , नियम लागु करें । अगर आपने संख्या को सम संख्या 2, 4, 8 आदि से भाग दिया है तो अन्तिम उत्तर का भागफल से गुणा करने पर त्रिक मिलेगी । आइए, उदाहरण से समझते हैं ।

उदाहरण : त्रिक का मान 6 है, तो अन्य दो मान ज्ञात करें ।

हल : संख्या 6 को 2 से भाग देकर विषम संख्या हासिल करें । ऊपर बताए अनुसार 3 के लिए -

त्रिक $3^2 = 9 = 4 + 5$

अत: त्रिक 3, 4 और 5 है, चूंकि हमने 2 से भाग दिया था ।

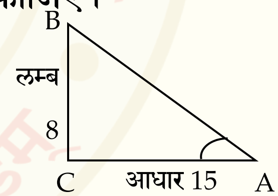
इसलिए, हमें सभी मानों में 2 से गुणा करने पर

$$2 \times 3\ ,\ 2 \times 4\ ,\ 2 \times 5$$

अत:, 6 द्वारा बनने वाला त्रिक 6 , 8 , 10 है ।

त्रिकोणमिति अनुपात की गणना -

उदाहरण : अगर $\tan A = \frac{8}{15}$ तो अन्य त्रिकोणमिति अनुपात ज्ञात कीजिए ।



हल : $\tan A = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{आधार } (b)} = \frac{8}{15}$

वैदिक गणित त्रिक सारणी से ज्ञात हो सकता है ।

लम्ब = 8, आधार = 15, कर्ण = 17

अत :, $\sin A = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{कर्ण } (h)} = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $\text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{लम्ब } (p)} = \frac{17}{8}$

$\cos A = \frac{\text{आधार } (b)}{\text{कर्ण } (h)} = \frac{15}{17}$ $\qquad$ $\sec A = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{आधार } (\text{b})} = \frac{17}{15}$

$\text{Cot } A = \frac{\text{आधार } (\text{b})}{\text{लम्ब } (p)} = \frac{15}{8}$

अभ्यास प्रश्नावली - 11

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) यदि sin A = 3/4, तो cosec A का मान होगा –

(I) 4/3 (II) 3/4 (III) 3/5 (IV) 5/4

(ब) यदि sec A = 5/3, तो tan A का मान क्या होगा ?

(I) 4/3 (II) 3/4 (III) 3/5 (IV) 5/4

(स) निम्न में कौन $\cot\theta$ के बराबर है।

(I) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (II) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (III) $\frac{1}{\sec\theta}$ (IV) $\frac{1}{\sin\theta}$

2. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

($\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, cosec A, कर्ण, (लम्ब)^2, लम्ब)

अ) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने बननी वाली भुजा................कहलाती है।

ब) बौधायन का प्रमेय - (कर्ण)^2 = ... + (आधार)^2

स) समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा..................होती है।

द) sin A का विलोमानुपाती.......................होता है।

प) tan A= ________________ है।

3. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$ है, तो $cotA$ का मान क्या ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ है, तो $tanA$ व $cotA$ का मान ज्ञात करें।

5. यदि $\cos A = \frac{5}{13}$ है, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें।

अध्याय - 12

सांख्यिकी

- अवर्गीकृत आंकड़ों के प्रस्तुत करने के लिए एक मान प्रयोग किया जाता है इस मान को **केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप** (Measure of Central Tendancy) कहते हैं । सामान्यत: केन्द्रिय प्रवृत्ति की माप के लिए समान्तर माध्य या माध्य (औसत), माध्यिका और बहुलक का प्रयोग किया जाता है ।

माध्य (Mean) की गणना - अवर्गीकृत आंकड़ों से समान्तर की गणना करना ।

परिभाषा – समान्तर माध्य (माध्य) वह संख्या है जो पद मानों के योगफल को पद-संख्या द्वारा विभाजित करने से प्राप्त होता है । माध्य को ($\bar{x}$) से दर्शाया जाता है ।

अत: , माध्य $= \dfrac{\text{पदमानों का योगफल}}{\text{पदों की कुल संख्या}}$ या $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

नोट : प्रतीक $\sum_{i=1}^{n} X_i$ योगफल को प्रदर्शित करता है । '$\sum$' यह ग्रीक भाषा का अक्षर है । जिसे **सिग्मा** पढ़ते है ।

उदाहरण : किसी टोकरी से निकाले गये 10 सेबों का भार निम्नलिखित है ।

150 ग्रा., 200 ग्रा., 175 ग्रा., 170 ग्रा., 250 ग्रा., 215 ग्रा., 220 ग्रा., 260 ग्रा., 270 ग्रा., 190 ग्रा. है तो एक सेंब का माध्य भार ज्ञात कीजिए ।

हल : एक सेंब का माध्य भार $= \dfrac{\text{फलों का भार}}{\text{फलों की संख्या}}$

$$= \frac{150+200+175+250+215+220+260+270+190}{10}$$

$$= \frac{2100}{10} \text{ ग्राम} \quad = 210 \text{ ग्राम}$$

यदि सभी सेबों का भार का अवलोकन करें तो हम देखते हैं, कि सेबों के भार माध्य के आस-पास है । **माध्य सबसे कम एवं सबसे अधिक भार के बीच होता है ।**

माध्यिका (median) –

1) यदि n विषम है तो माध्यिका = $\frac{n+1}{2}$ वे पद का मान

2) यदि n सम है तो माध्यिका $= \frac{\frac{n}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$

➢ **जब n विषम हो**

उदाहरण : निम्नलिखित मानों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

15 , 35 , 18 , 26 , 19

हल : आरोही क्रम में रखने पर,

15 , 18 , 19 , 26 , 35

यहाँ n = 5 (विषम संख्या)

माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ के पद का मान

$= \frac{5+1}{2}$ के पद का मान

$= \frac{6}{2} = 3$ वें पद का मान

अत:, 3 वें पद का मान = 19 है ।

➢ **जब n सम हो**

उदाहरण : निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

17 , 15 , 8 , 1 , 6 , 5 , 11 , 3

हल : दिये गये, आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

1 , 3 , 5 , 6 , 8 , 11 , 15 , 17

यहाँ कुल पद (n) = 8 (सम संख्या)

अत: , **माध्यिका** $= \frac{\frac{n}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$

$$= \frac{\frac{8}{2} \text{ वे पद का मान} + (\frac{8}{2}+1) \text{ वे पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{4 \text{ वे पद का मान} + 5 \text{ वे पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{6+8}{2}$$

$$= \frac{14}{2} = 7$$

अत:, दिये गये आंकड़ों की माध्यिका = 7 हैं ।

बहुलक (Mode) – साधारण शब्दों में यह अधिकतम बारम्बारता वाला मान बहुलक होता है ।

उदाहरण : निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

6 , 9 , 2 , 3 , 4 , 2 , 12 , 9 , 7 , 8 , 9 , 5 , 9

हल : हम जानते है कि बहुलक उस पद का मान होता है, जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है । दी गई राशियों की बारम्बारता सारणी निम्न है ।

पदमान	2	3	4	5	6	7	8	9	12
बारम्बरता	2	1	1	1	1	1	1	4	1

यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता वाला आंकड़ा 9 है । (अर्थात् चार बार 9 आया है)

अत:, उपर्युक्त आंकड़ों का बहुलक = 9 है ।

अभ्यास प्रश्नावली - 12

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य है –

(I) 2 (II) 3 (III) 2.5 (IV) 4

(ब) यदि 1, 4 , x, 5, 12 का माध्य 7 है , तब x बराबर है –

(I) 15 (II) 13 (III) 14 (IV) 16

(स) संख्या a ,b तथा c का गणितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन-सा होगा–

(I) abc (II) $\frac{a+b+c}{3}$ (III) b (IV) $\frac{a+c}{3}$

(द) 18, 13, 17, 12, 16, 19 की माध्यिका है –

(I) 15 (II) 16.5 (III) 19 (IV) 17.5

प) 5 , 3 , 7, 6 , 4 , 2 , 1 की माध्यिका क्या होगी ?

(I) 5 (II) 4 (III) 3 (IV) 6

(फ) किसी बारम्बारता का बहुलक होता है –

(I) कम से कम बारम्बारता मान (II) माध्यतम बारम्बारता मान

(III)अधिकतम बारम्बारता मान (IV) इनमें से कोई नहीं

2. एक गुरुकुल में वेदभूषण पञ्चम वर्ष के 10 विद्यार्थी के गणित विषय के परीक्षा में प्राप्तांक क्रमशः 7, 8, 5, 7 , 7, 8, 9, 6, 7, 6 अङ्क हैं तो प्राप्तांक का माध्य या औसत ज्ञात कीजिए।

3. मोटर साइकिल सवारी की गति कि.मी./घण्टा रिकार्ड की गई जो निम्नलिखित है ।

55, 60, 30, 45, 40 इनका माध्य ज्ञात कीजिए ।

4. निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करें ।

अ) 21 , 18 , 12 , 14 , 3 , 4

ब) 1 , 12 , 17 , 8 , 5 , 21 , 34 , 42 , 3

स) 2 , 4 , 5 , 6 , 17, 11 , 0

5. निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

अ) 10 , 8 , 15 , 10 , 12 , 10 , 8 , 15 , 10 , 12 , 13

ब) 1 , 5 , 4 , 5 , 3 , 5 , 2 , 1 , 5 , 5 , 2 , 3

अध्याय - 13

प्रायिकता

- प्रायिकता किसी घटना होने पर सम्भावनाओं का परिणामों बोधक संख्यात्मक निरूपण है। प्रायिकता वह अवधारणा है, **जिनसे घटनाओं के घटित होने या न होने की सम्भावनाओं को संख्यात्मक रूप से व्यक्त किया जा सके।**

प्रायिकता की परिभाषा – यदि किसी अभिप्रयोग के कुल n परिणामों और उनमें से m परिणाम किसी विशेष (अनुकूल परिणाम) A घटना के अनुकूल हो, तो A की प्रायिकता का अनुपात $\frac{m}{n}$ द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे सङ्केत P(A) से व्यक्त करते हैं। अत:

$$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}} = \frac{m}{n}$$

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना का घटना निश्चित हो, तो (n = m) होगा तथा $P(A) = \frac{n}{n} = 1$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो, तो m = 0 तथा $P(A) = \frac{0}{n} = 0$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

अर्थात् किसी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 अधिक नहीं हो सकती है, और **प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है।** घटना के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा दर्शाते हैं।

या $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

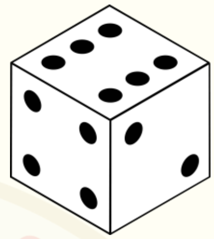
सङ्केत - 1) P(A) = घटना (A) के घटित होने की प्रायिकता

2) $P(\bar{A})$ = घटना (A) की घटित न होने की प्रायिकता

उदाहरण : एक पासे का फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : एक पासे के फेंकने पर 6 तरह अङ्क (1, 2, 3, 4, 5, 6) आ सकते हैं ।

अत: कुल परिणामों की संख्या = 6



अनुकूल परिणामों की संख्या (2, 4, 6) = 3

तब **प्रायिकता** $= \dfrac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

अत: पासे फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{2}$ हैं ।

उदाहरण : दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दोनों सिक्को पर हे.ड (चित्त) आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : दो सिक्कों एक साथ उछालने पर कुल सम्भव परिणाम निम्न होंगे ।

(H, H) , (T, H) , (H, T) , (T, T)

अत:, कुल परिणामों की संख्या = 4

इनमें से घटना के अनुकूल परिणाम = 1 (H, H)

अत: $P(A) = \dfrac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \dfrac{1}{4}$

अत:, दोनों सिक्कों पर हे.ड (चित्त) आने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{4}$ हैं ।

अभ्यास प्रश्नावली - 13

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) किसी पासे को फेंकने में अङ्क 5 के ऊपर आने की प्रायिकता है –

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{1}{3}$ (III) $\frac{1}{5}$ (IV) $\frac{1}{6}$

(द) निश्चित घटना की प्रायिकता या प्रायिकता का अधिकतम मान होता है ।

(I) 0 (II) 1 (III) $\frac{1}{4}$ (IV) 2

(प) किसी प्रयोग के सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग कितना होता है ?

(I) 0 (II) 1 (III) -1 (IV) 4

2. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(0 और 1 , 1 , 0 , 1 , P(A) , 6)

1) प्रायिकता का मान ....और...............के मध्य होता है ।

2) किसी घटना के निश्चित होने की प्रायिकता.................है ।

3) यदि कोई घटना का घटना (e) असम्भव हो तो प्रायिकता................होगी ।

4) एक पासे को फेंकने पर कुल परिणामों की संख्या..............है ।

5) $P(\bar{A}) + P(A) =$ ______

6) $P(\bar{A}) = 1 -$ ________

3. एक पासे को उछालने उसके फलक पर विषम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

4. दो सिक्कों का एक साथ उछालने पर दोनों सिक्कों पर टेल (पट्ट) आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

5. एक पासे को फेंकने उसके फलक पर अङ्क 8 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

6. एक थैले में 4 लाल और 6 काली गोलियाँ हैं । एक गोली निकालने पर इसके काली होने की प्रायिकता है –

7. यदि अङ्कों 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 में से एक अङ्क चुना जाए तो उसके सम होने की प्रायिकता है –

अध्याय - 14

संख्यात्मक एवं तार्किक अभियोग्यता

➢ **श्रृंखला –** श्रृंखला के अन्तर्गत वर्ण, संख्या अथवा मिश्रित (वर्ण, संख्या चिह्न) श्रृंखला के युग्म पर आधारित है । वर्ण श्रृंखला केवल वर्ण उपलब्ध होते हैं । जो एक निश्चित क्रम का अनुसरण करते हैं । प्रतिभागी को इस क्रम को ज्ञात करना पड़ता है और आवश्यक उत्तर देना होता है।

वर्णों स्थिति –

बायें से दायें – सही क्रम ⟶

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

दायें से बाएँ (उल्टे क्रम) ⟵

याद रखने योग्य बिन्दु –

➢ श्रेणी का शुरूआती बिन्दु बायाँ छोर है और श्रेणी का अन्तिम बिन्दु दायाँ छोर है ।

➢ यदि आपको अपनी बायीं ओर से गिनते हुए किसी निश्चित अक्षर के बायीं ओर स्थिति अक्षर को खोजना है तो आपको घटाने का तरीका प्रयोग करना चाहिए ।

➢ यदि आपको अपनी दायीं ओर से गिनते हुए किसी निश्चित अक्षर के दायीं ओर के स्थित अक्षर को खोजना है तो आपको जोड़ने (जमा) करने का तरीका प्रयोग करना चाहिए ।

उदाहरणार्थ 1 निम्नलिखित वर्णों की स्थिति का ध्यान पूर्वक अध्ययन कर प्रश्न का उत्तर दीजिए ।

A B C D E F G H I J K L M N

O P Q R S T U V W X Y Z

(क) उपर्युक्त व्याख्या में ऐसे कितने स्वर है जिसके तुरन्त पहले और तुरन्त बाद व्यंजन है ।

(अ) एक ब) दो स) तीन द) चार

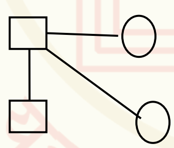
उत्तर: द) चार

व्याख्या -	**व्यंजन**	**स्वर**	**व्यंजन**
	D	E	F
	H	I	J
	N	O	P
	T	U	V

रक्तसम्बन्ध (Blood Relation) – सम्बन्धों के विषय की जानकारी होना बहुत आवश्यक है ।

प्रमुख बिन्दु –

- पुरुष और महिला का वर्गीकरण करना चाहिए ।
- जैसे पति-पत्नि का सम्बन्ध +□—○—
- जैसे पुत्र और पुत्री का सम्बन्ध



- मेरे पिता के एक मात्र पुत्र का अर्थ है – मैं (स्वयं)
- ऋतु के पति के सास-ससुर की एक मात्र पुत्री का अर्थ है – ऋतु (स्वयं वह)

आइए, अब निम्न प्रश्नों पर विचार करते है ।

1. मेरे पिता की बहन के पिता के पुत्र की पुत्री का मुझसे क्या रिश्ता होगा ?

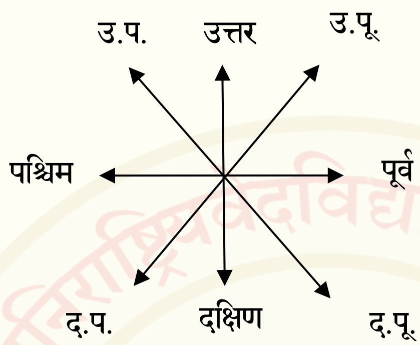
अ) चाची ब) बहन स) पुत्री द) भतीजी

उत्तर: ब) बहन

व्याख्या: पिता के बहन के पिता का अर्थ हुआ दादा । दादा के पुत्र कि पुत्री बहन हुई ।

➢ **दिशा और दूरी -** चार प्रमुख दिशाएँ है – उत्तर, पूर्व, दक्षिण, पश्चिम

चार उपदिशाएँ है - उत्तर-पूर्व (N–E), दक्षिण–पूर्व (S–E), दक्षिण–पश्चिम (S–W) और उत्तर–पश्चिम (N–W)

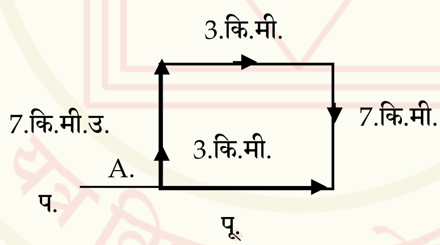


उदाहरण: श्याम 7 कि.मी. उत्तर यात्रा करता है तब वह अपने दायें मुड़ता है और 3 कि.मी. चलता है वह फिर अपने दायें मुड़ता है और 7 कि.मी. आगे चलता है अब वह अपनी शुरूआती बिन्दु से किस दिशा में है ?

अ) उत्तर ब) दक्षिण स) पूर्व द) पश्चिम

उत्तर : स) पूर्व

व्याख्या:



A = शुरूआती बिन्दु

➢ **क्रम निर्धारण:** महत्त्वपूर्ण बिन्दु –

1) किसी कक्षा या पङ्क्ति में कुल व्यक्तियों की संख्या=

(किसी एक व्यक्ति बायें या ऊपर के स्थान)+ (उस व्यक्ति का नीचे या दायें से स्थान)

2) (कुल व्यक्तियों की संख्या+ 1) – (बायें या ऊपर से स्थान) = दायें या नीचे से स्थान

3) (कुल व्यक्तियों की संख्या+ 1) – (दाये या नीचे से स्थान) = बायें या ऊपर से स्थान

उदाहरण: राहुल 40 लड़कों के पङ्क्ति में दायीं ओर से 14वां है बायें छोर से उसकी स्थिति क्या है ?

अ) 24 वाँ ब) 25 वाँ स) 26वाँ द) 27 वाँ

व्याख्या - राहुल के बायें ओर लड़कों की संख्या = (40 - 14) = 26 हैं। अत: राहुल का अन्तिम बायें छोर से 27 वाँ स्थान है ।

➢ घड़ी (Clocks)

घड़ी के अध्याय में प्रतिभागी को ध्यान पूर्वक समय का अध्ययन कर बीच का कोण (घड़ी के कांटो के मध्य) ज्ञात करना होता है। महत्त्वपूर्ण बिन्दु :

(1) **मिनट वाली सुई :**

1 घण्टे = 1 पूरा चक्कर

$60^{\prime}$ (60 मिनट) = 360^{o}

$1^{\prime}$ (1 मिनट) = $\frac{360^{o}}{60}$ = 6^{o}

5 मिनट वाली सुई 1 मिनट में 6^{o} (डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

(2) **घण्टे वाली सुई-**

12 घण्टे = 1 पूरा चक्कर

हम जानते हैं ,1 घण्टे में 60 मिनट होते हैं ।

12 × 60 मिनट = 360^{o}

720 मिनट ($720^{\prime}$) = 360^{o}

$1^{\prime}$ = $\frac{360}{720} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

5 घण्टे वाली 1 मिनट में $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$ (आधे डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

(3) **सेकेण्ड वाली सुई**

1 मिनट = 1 पूरा चक्कर = 360^{o}

60 सेकेण्ड ($1^{\prime}$) = 360^{o}

$60^{\prime\prime}$ = 360^{o}

$1^{\prime\prime}$ = $\frac{360}{60}$ = 6^{o}

5 सेकेण्ड वाली सुई द्वारा 1 सेकेण्ड में 6^{o} (डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

कोण ज्ञात करने का सूत्र :- $\theta = \frac{11}{2} \times$ **मिनट** $- 30^\circ \times$ **घण्टे**

प्राप्त किये θ में (कोण में) धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न का कोई फर्क नहीं होता। यहाँ धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न हर बात की जानकारी देता कि मिनट वाली सुई ने घण्टे वाली सुई को क्रास किया है या नहीं।

क्रास किया हो तो = धनात्मक कोण आता है।

क्रास नहीं किया हो तो = ऋणात्मक कोण आता है।

उदाहरणार्थ : जब घड़ी में समय 7.20 है तब घण्टे की सुई तथा मिनट की सुई के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: समय 7.20 = 7 घण्टे तथा 20 मिनट

$= (7 + \frac{20}{60})$ घण्टे

$= (7 + \frac{1}{3})$ घण्टे $= \frac{22}{3}$ घण्टे

$\because$ घण्टे की सुई द्वारा 12 घण्टे में बनाया गया कोण $= 360^\circ$

$\therefore$ घण्टे की सुई द्वारा $\frac{22}{3}$ घण्टे में बनाया गया कोण $= \frac{360}{12} \times \frac{22}{3} = 220^\circ$

$\because$ मिनट की सुई द्वारा 60 मिनट में बनाया गया कोण $= 360^\circ$

$\therefore$ मिनट की सुई द्वारा 20 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{360}{60} \times 20 = 120^\circ$

अभीष्ट कोण $= (220^\circ - 120^\circ) = 100^\circ$

ट्रिक:

$\theta = \frac{11}{2} \times$ मिनट $- 30^\circ \times$ घण्टे

$\theta = \frac{11}{2} \times 20 - 30^\circ \times 7$

$\theta = 110^\circ - 210^\circ$

$\theta = -100$ (अर्थात् 100°)

अन्य कोण, $\theta = 360^\circ - 100 = 260^\circ$

➢ कैलेण्डर (Calendar)- महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. **अतिरिक्त दिन** – किसी दिए हुए अन्तराल में ऐसे दिनों की संख्या जो पूर्ण-सप्ताहों की संख्या से अधिक हों, अतिरिक्त दिन कहलाते हैं ।
2. प्रत्येक ऐसा वर्ष (शताब्दी न हो), जो 4 से पूर्णतया विभक्त हो तथा प्रत्येक वह शताब्दी 400 से विभक्त न हो, लीप वर्ष नहीं होगी ।

   (1) वर्ष 1620, 1860, 1940,1984, 1996,2004,2008 आदि सभी लीप वर्ष है ।

   (2) वर्ष 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400 आदि लीप वर्ष है

   (3) वर्ष 1726,1982 ,2021,2035 आदि लीप वर्ष नहीं है।
3. 1 साधारण वर्ष = 365 दिन तथा 1 लीप-वर्ष = 366 दिन।
4. अतिरिक्त दिनों की गिनती करना

   (i) 1 साधारण वर्ष = 365 दिन = (52 सप्ताह) + (1दिन)

   अत: 1 साधारण वर्ष में 1 अतिरिक्त दिन होता है

   (ii) 1 लीपवर्ष = 366 दिन = (52 सप्ताह) + (2 दिन)

   अत: 1 लीप वर्ष में 2 अतिरिक्त दिन होता है

   (iii) 100 वर्ष = 76 साधारण वर्ष + 24 लीपवर्ष

   = 76 अतिरिक्त दिन + (24×2) अतिरिक्त दिन

   = 124 अतिरिक्त दिन = (17 सप्ताह + 5 दिन)

   = 5 अतिरिक्त दिन

➢ दिन ज्ञात करने के लिए प्राप्त अतिरिक्त दिनो की संख्या को 7 से विभाजित कर शेषफल से दिन ज्ञात करते है।

दिन ज्ञात करने के ट्रिक :

$$\frac{\text{दिन + महिना + वर्ष + लीप वर्ष + शताब्दी}}{7}$$

महिनों के लिए कोड

माह	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
कोड	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

- वर्ष की अन्तिम दो संख्या लेते है।
- लीप वर्ष के लिए , वर्ष की अन्तिम दो संख्या को 4 से विभाजित कर भागफल (लब्धि) को लिखते हैं।
- **शताब्दी कोड**

-----	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	
	6	4	2	0	6	4	2	0	-----

- दिन के लिए

रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार
1	2	3	4	5	6	0

उदाहरण : 15 अगस्त 1947 को भारत देश स्वतन्त्र हुआ। वह सप्ताह का कौन-सा दिन था ?

हल : 15 अगस्त 1947 = (1946 वर्ष +1 जनवरी 1947 से 15 अगस्त 1947)

1600 वर्ष में अतिरिक्त दिन = 0

300 वर्ष में अतिरिक्त दिन = 15 दिन = (7×2 +1) दिन = 1 दिन।

46 वर्ष = (11 लीप वर्ष + 35 साधारण वर्ष) = (22 + 35) अतिरिक्त दिन

= 57 अतिरिक्त दिन = (8 × 7+ 1)अतिरिक्त दिन

जनवरी फरवरी मार्च अप्रैल मई जून जुलाई अगस्त

(31 +28+31+30+31+30+31+15) = 227 दिन = (7×32+3) दिन = 3 अतिरिक्त दिन

कुल अतिरिक्त दिन = (0+1+1+3)=5

अत: अभीष्ट दिन = शुक्रवार

ट्रिक : दिन + महिना + वर्ष + लीप वर्ष + शताब्दी

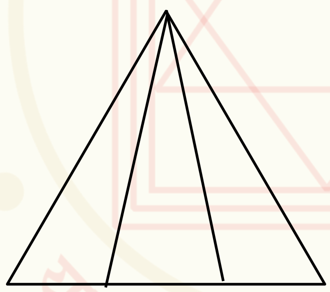
= 15 + 03 + 47 + 11 + 00 = 76

अतिरिक्त दिनों को 7 से विभाजित करने पर

$= \frac{76}{7} = 6$ (शेषफल) 6 शेषफल का मतलब दिन शुक्रवार होगा।

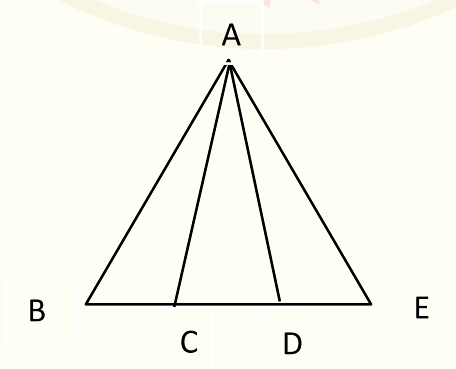
➢ **आकृतियों की गिनती (counting of figure):-** विभेदीकरण के अन्तर्गत आने वाले प्रश्नों में एक आकृति दी गई होती है। दी हुई आकृति में से पूछी गई ज्यामितीय आकृतियों (यथा वृत्त, त्रिभुज , वर्ग, आयत इत्यादि) को पहचान कर उनकी कुल संख्या ज्ञात को करना होती है।

उदाहरण :- निम्न प्रश्न आकृति में दी हुई इस आकृति में कितने त्रिभुज हैं।



a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

हल:- d) 6



उपर्युक्त आकृति में त्रिभुज की संख्या 6 है।

जहाँ त्रिभुज में $\Delta\, ABC$, $\Delta\, ABD$, Δ ABE, Δ ACD, Δ ACE, Δ ADE हैं।

अभ्यास प्रश्नावली -14

1. निम्नलिखित संख्या शृंखला को ध्यान पूर्वक देखकर अध्ययन कीजिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

   1 2 6 5 3 2 1 8 9 6 5 3 2 1 2 3 1

   उपर्युक्त व्यवस्था में ऐसे कितने 1 है जिसके तुरन्त बाद 2 है ।

   अ) एक ब) दो स) तीन द) चार

2.. एक चित्र देखकर बेटा रो कर बोला वह मेरे मामा की अकेली बहन थी मैं उससे किस प्रकार सम्बन्धित हूँ ।

   अ) माता ब) चचेरी बहन स) स्वयं द) बहन

3. A , B की माता है तब B, A से किस प्रकार सम्बन्धित है।

   अ) भाई ब) पुत्री स) बहु द) चचेरी बहन

4. आनन्द, प्रेमा का पुत्र है राजीव, प्रेमा का भाई हैं । नेहा, रश्मी की पुत्री है तो बताइये आनन्द, रश्मी से किस प्रकार सम्बन्धित है ?

   अ) पुत्र ब) दादा स) पोती द) पोता

5. गौरव उत्तर की ओर चलना आरम्भ करता है और 5 कि.मी. चलकर बायें मुड़ता है फिर 10 कि.मी. चलता है और बायें मुडता है तथा 5 कि.मी. कि दूरी तय करता है और अब वह अपने आरम्भिक बिन्दु से कितना दूर हैं ?

   अ) 5 कि.मी. ब) 20 कि.मी. स) 10 कि.मी. द) इनमें से कोई नहीं

6. राम अपने घर से 10 मी. दक्षिण में चलता है। फिर बायें मुड़कर 25 मी. चलता है फिर से बायें मुड़कर 40 मी. चलता है, उसके बाद दायें मुड़कर 5 मीटर चलकर स्कूल जाता है। उसका स्कूल उसके घर के किस दिशा में है।

अ) उत्तर ब) उत्तर पूर्व स) दक्षिण – पश्चिम द) पूर्व

7. एक पङ्क्ति में रवि बायें से 18 वाँ और दायें 19 वाँ है तो पङ्क्ति में कुल कितने छात्र हैं ?

अ) 36 ब) 37 स) 38 द) 35

8. एक पङ्क्ति के 50 विद्यार्थियों सें रेनू का स्थान बायें से 15 वाँ है और राजू का दायें से 18 वाँ है। उन दोनों के बीच कितने विद्यार्थी हैं ?

अ) 17 ब) 16 स) 7 द) 8

9. 3 बजकर 35 मिनट पर घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण कितना है ?

(अ) $107\frac{1^{\circ}}{2}$ (ब) 210° (स) $102\frac{1^{\circ}}{2}$ (द) इनमें से कोई नहीं

10. 26 जनवरी 1950 को सप्ताह का कौन-सा दिन था?

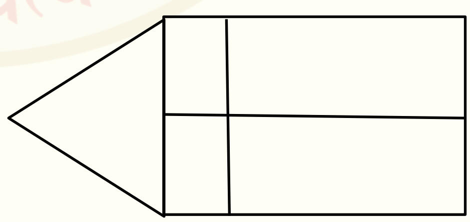
(अ) बृहस्पतिवार (ब) शनिवार (स) मङ्गलवार (द) सोमवार

11. एक वर्ष में कितने सप्ताह होते हैं

(अ) 50 (ब) 52 (स) 51 (द) 58

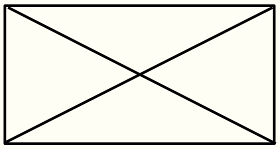
12. लीप वर्ष में फरवरी माह कितने दिनों का होता है

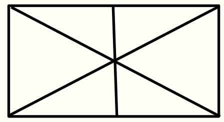
13 . नीचे दी गई आकृति में कितने आयत है।

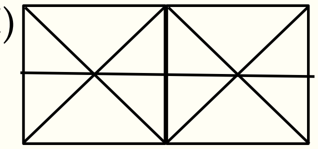


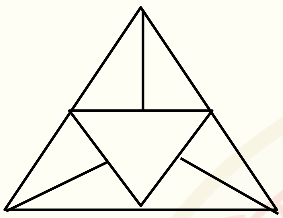
a) 7 b) 8 c) 9 d) 12

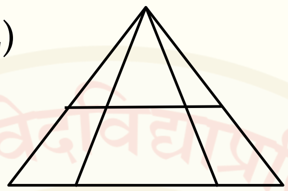
14. नीचे दी गई आकृति में कितने त्रिभुजाकार है -

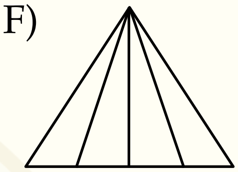
A) 

B) 

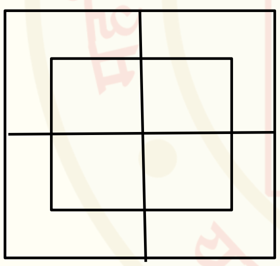
C) 

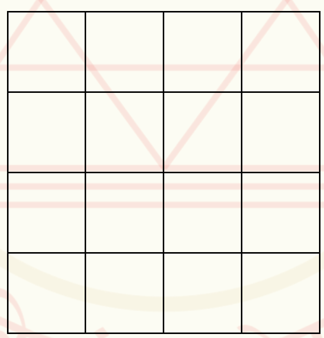
D) 

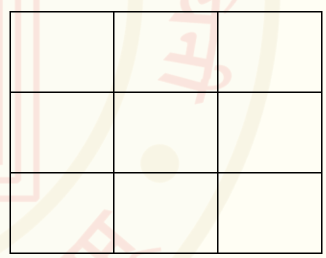
E) 

F) 

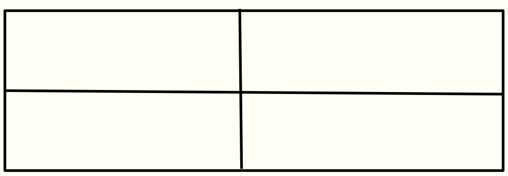
15. निम्न आकृतियों में वर्गों की संख्या कितनी है बताइए।

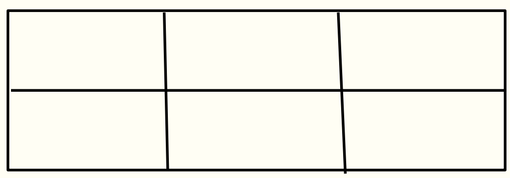
(ख) 

(ग) 

(घ) 

16. निम्न आकृतियों में आयत की संख्या बताइये।





महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in