आज़ादी का अमृत महोत्सव

गणित पाठ्यपुस्तक

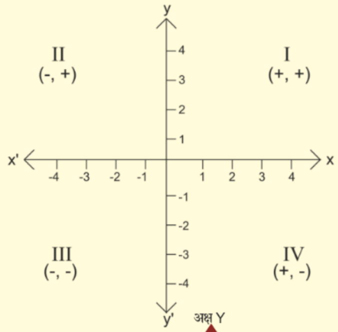
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

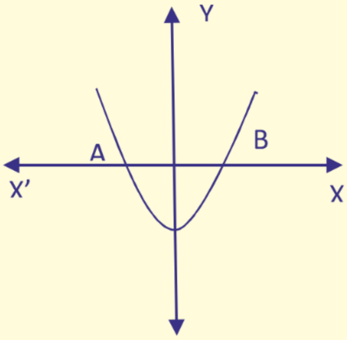
वेद-भूषण - V वर्ष / पूर्वमध्यमा - II वर्ष / कक्षा दसवीं

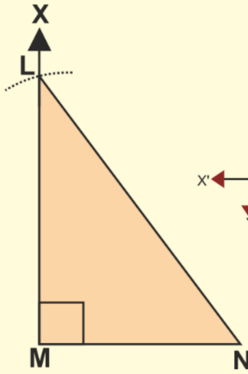
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

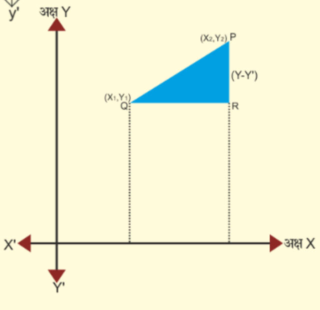
(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

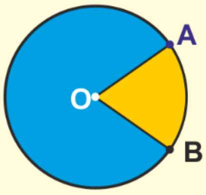
शून्यैषी निर्ऋते याजगन्धोत्तिष्ठाराते प्रपत मेह रंस्था: ।
वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः।
खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा ॥
नञावचश्च शून्यानि संख्या: कटपयादय: ।
मिश्रे तूपाऽन्त्यहल्संख्या न च चिन्त्यो हल: स्वरा: ॥
योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च।
भाज्याच्छेदः शुध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥
वर्गाहतरूपाणामव्यक्तार्धकृतिसंयुतानां यत् ।
पदमव्यक्तार्धोनं तद्वर्गविभक्तमव्यक्त: ॥
चतुराहतवर्गसमैरूपै: पक्षद्वयं गुणयेत् ।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥
वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः ।
द्वादश प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मिन्त्साकं त्रिशता न शंकवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलास:।
आयाममायामगुणं विस्तारं विस्तरेण तु ।
समस्य वर्गमूलं यत्तत्कर्णं तद्विदो विदु: ॥

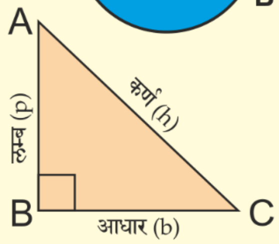












अन्त्ययोर्शतकेऽपि | परावर्त्य योजयेत् | निखिलं नवतश्चरमं दशतः
ध्वजाङ्कः | विलोकनम् | आनुरूप्येण | ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

गणित पाठ्यपुस्तक

वेद-भूषण - V वर्ष / पूर्वमध्यमा - II वर्ष / कक्षा दसवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

लेखकगण : ....

आवरण एवं सज्जा : ....

चित्राङ्कन : ....

तकनीकी सहयोग : ....

अक्षरविन्यास : ....

© महर्षिसान्दीपनिराष्ट्रियवेदविद्याप्रतिष्ठानम्, उज्जयिनी

ISBN : ....

मूल्य : ....

संस्करण : ....

प्रकाशित प्रति : ....

पेपर उपयोगः : आर.सी.टी.बी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रिय वेदविद्या प्रतिष्ठान

(शिक्षामन्त्रालय भारत सरकार की स्वायत्तशासी संस्था)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

email : msrvvpujn@gmail.com,

Web : msrvvp.ac.in

दूरभाषा (0734) 2502255, 2502254

भूमिका

भारतवर्ष में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। इतिहास के अत्यन्त प्राचीन काल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है । वैदिक काल के आरम्भ से ही गणित विद्या को सर्वोच्च स्थान दिया गया है। उदाहरणार्थ, याजुषज्यौतिषम् का सुस्पष्ट कथन है -

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा ।

तद्वत् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितं मूर्द्धनि स्थितम् ॥

(याजुषज्यौतिषम् , 4)

अर्थात् , जिस प्रकार मोरों में शिखा और नागों में मणि का स्थान सबसे ऊपर है, उसी प्रकार सभी वेदाङ्गशास्त्रों मे गणित का स्थान सबसे ऊपर है।

पुरातन ज्ञान का उपयोग एवं प्राचीन उपलब्धियों के तारतम्य से आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के उद्देश्य से इस पाठ्यपुस्तक में वैदिक गणित के साथ संस्कृत ज्ञान प्रणाली में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं का समावेश किया गया है । वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामञ्जस्य बनाकर पूरे भारतवर्ष के वैदिक विद्यार्थियों को गणित विषय में अधिगम स्तर की दक्षता प्रदान करने के लिए राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 में निहित - चर्चा , विश्लेषण ,उदाहरण एवं अनुप्रयोग जैसे मुख्य सिद्धान्तों की दृष्टि को ध्यान में रखते हुए वैदिक विद्यार्थियों के अनुरूप पाठ्यक्रम एवं पाठ्य पुस्तकों का निर्माण किया गया है।

पाठ्यपुस्तक की भाषा बहुत ही सरल और सहज है जिससे विद्यार्थियों को समझने में सुगमता होगी। वेदभूषण पञ्चम (दसवीं समकक्ष) वर्ष की यह पाठ्यपुस्तक प्राय: पूरे भारतवर्ष के कक्षा- 10 गणित पाठ्यक्रम के समकक्ष है।पाठ्यपुस्तक में कई पाठ्य बिन्दुओं को संस्कृत ज्ञान प्रणाली के वैदिक प्रमाणों के साथ-साथ ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त ,शुल्बसूत्र, आर्यभट्टीयम् ,लीलावती एवं बीजगणितम् आदि ग्रन्थों के सन्दर्भों को भी सम्मिलित किया गया है जिससे वैदिक विद्यार्थी आधुनिक गणित के साथ प्राचीन गणितीय सङ्कल्पनाओं को भी समझने में सक्षम होंगे एवं अपनी भारतीय परम्परा की गरिमा का अनुभव कर सकेंगे। पूर्व कक्षा के अनुभव को दोहराते हुए, पाठ्यपुस्तक में कुल 14 अध्यायों की रचनाएँ वेद विद्यालयों के वेद भूषण पञ्चम वर्ष पाठ्यक्रम के आवश्यकता के अनुसार की गई है। अध्याय 1 में गणित के इतिहास का विस्तृत वर्णन है। अध्याय 2 में समुच्चय के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार के समुच्चयों को विस्तार से वर्णित किया गया है। अध्याय 3 में बहुपद के अन्तर्गत बहुपद के शून्यक और गुणांक में

सम्बन्ध एवं बहुपदों के मध्य विभाजन की सङ्क्रिया का अध्ययन करेंगे। अध्याय 4 में दो चर वाले रैखिक समीकरण को वैदिक विधि के अन्तर्गत युगपत एवं परावर्त्य द्वारा हल करना सीखेंगे। अध्याय 5 में द्विघात समीकरण को प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 6 में निर्देशाङ्क ज्यामिति के बारे में बताया गया है। अध्याय 7 में वैदिक गणित में विभिन्न सूत्रों के द्वारा गणितीय सङ्क्रियाओं को प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 8 में समान्तर श्रेणी के बारे में विस्तार से वर्णन किया गया है। अध्याय 9 में प्रायोगिक रचनाओं के अन्तर्गत कोण एवं त्रिभुज की रचना करना सीखेंगे। अध्याय 10 में वृत्त के अन्तर्गत त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल एवं चाप की लम्बाई ज्ञात करना सीखेंगे। अध्याय 11 में त्रिकोणमिति के अन्तर्गत बोधायन त्रिक एवं त्रिकोणमिति अनुपात की गणना के विषय में बताया गया है। अध्याय 12 में सांख्यिकी के अन्तर्गत माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात करना सीखेंगे। अध्याय 13 में प्रायिकता के अन्तर्गत अनुकूल घटनाओं का परिणाम ज्ञात करना सिखाया गया है। अध्याय 14 में संख्यात्मक एवं तार्किक अभियोग्यता के अन्तर्गत प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले प्रश्नों में श्रृंखला, रक्त-सम्बन्ध, दिशा और दूरी, क्रम निर्धारण ,घड़ी , कैलेण्डर एवं आकृतियों की गणना करना सीखेंगे।

पाठ्यपुस्तक में वैदिक विद्यार्थियों की गणित की समझ को विकसित करने के साथ-साथ तथ्यों की पुनः खोज करने की दक्षता का विकास करने के लिए विभिन्न गतिविधियाँ दी गई हैं। जिन्हें **'करो और सीखो'** का नाम दिया गया है, साथ ही विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर को बढ़ाने के लिए प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण सङ्कल्पनाओं एवं परिणामों को " **हमने सीखा** " के रूप में स्थान दिया गया है ।

भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीय गणितज्ञों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति विद्यार्थियों की समझ बनाने के लिए पाठ्यपुस्तक के अन्त में **भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान** का भी उल्लेख किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं को समझकर वैदिक विद्यार्थी प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी में सक्षम होंगे। उक्त पुस्तक के अध्ययनोपरान्त विद्यार्थी कक्षा दसवीं की NCERT तथा विषय विशेष से सम्बन्धित पुस्तकों का अध्ययन करें।

लेखक पाठ्यपुस्तक के त्रुटि सुधार हेतु प्रेषित सकारात्मक सुझाव के लिए आपका कृतज्ञ होगा।

प्रस्तावना

(राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के आलोक में)

शिक्षा मन्त्रालय (उच्चतर शिक्षा विभाग), भारत सरकार ने माननीय शिक्षा मन्त्री जी (तत्कालीन मानव संसाधन विकास मन्त्री) की अध्यक्षता में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान की स्थापना दिल्ली में 20 जनवरी, 1987 को सोसायटी पञ्जीकरण अधिनियम, 1860 के तहत की थी। भारत सरकार ने वेदों की श्रुति परम्परा का संरक्षण, संवर्धन, प्रसार और विकास के लिए प्रतिष्ठान की स्थापना का संकल्प संख्या 6-3/85-SKT-IV दिनाङ्क 30-3-1987 को भारत के राजपत्र में अधिसूचित किया था। वेदों के अध्ययन की श्रुति परम्परा (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, वेदाङ्ग, वेद भाष्य आदि), वेदों का पाठ संरक्षण, वैदिक स्वर तथा वैज्ञानिक आधार पर वेदों की व्याख्या का दायित्व वेद विद्या प्रतिष्ठान को दिया गया था। वर्ष 1993 में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान के कार्यालय को उज्जैन में स्थानान्तरित करने के पश्चात् संगठन का नाम महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान कर दिया गया। वर्तमान में यह संगठन मध्यप्रदेश सरकार द्वारा प्रदत्त भूमि- परिसर, महाकाल नगरी, उज्जैन में स्थित है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति-1986 के संशोधित नीति-1992 और कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन)-1992 में भी वैदिक शिक्षा को बढ़ावा देने के लिए राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान को उत्तरदायित्व दिया गया था। भारत के प्राचीन ज्ञान कोष, मौखिक परम्परा और इस तरह की शिक्षा के लिए पारंपरिक गुरुओं को संयोजित करने के उद्देश्य को 1992 के कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन) में उल्लेखित किया गया था।

राष्ट्र की आकांक्षाओं के अनुरूप, राष्ट्रीय स्तर पर वेद और संस्कृत शिक्षा के लिए एक बोर्ड की स्थापना के पक्ष में राष्ट्रीय सहमति, जनादेश, नीति, विशिष्ट उद्देश्य और कार्यान्वयन रणनीतियों के अनुरूप, भारत सरकार के माननीय शिक्षा मन्त्रीजी की अध्यक्षता में महासभा और शासी परिषद के समावेश में ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड'' की स्थापना 2019 में हुई है। MSRVVP का वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड भी वैदिक शिक्षा का एक भाग है और MSRVVP के उद्देश्यों की पूर्ति के लिए आवश्यक है जैसा कि MOA और नियमों में संकल्पना की गई है। महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड को शिक्षा मन्त्रालय,भारत सरकार तथा भारतीय

विश्वविद्यालय संघ, केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली से मान्यता प्राप्त है।

यहाँ यह भी उल्लेखनीय है कि भारत सरकार के शिक्षा मन्त्रालय द्वारा वर्ष 2015 में श्री एन. गोपालस्वामी (पूर्व चुनाव आयुक्त) की अध्यक्षता में गठित समिति ''संस्कृत के विकास के लिए विजन और रोडमैप - दस वर्षीय परिप्रेक्ष्य योजना'' की रिपोर्ट में अनुशंसा की गई है कि माध्यमिक विद्यालय स्तर तक वेद संस्कृत शिक्षा के पाठ्यक्रम मानकीकरण, संबद्धता, परीक्षा मान्यता, प्रमाणीकरण के लिए राष्ट्रस्तर पर वेद संस्कृत परीक्षा बोर्ड की स्थापना की जाए। समिति की अनुशंसा थी कि प्राथमिक स्तर का वैदिक एवं संस्कृत अध्ययन अभिप्रेरक, सम्प्रेरक एवं आनन्ददायी होना चाहिए। आधुनिक शिक्षा के विषयों को वैदिक और संस्कृत पाठशालाओं में सन्तुलित रूप से सम्मिलित करना भी आवश्यक है। इन पाठशालाओं की पाठ्यक्रम सामग्री को समकालीन समाज की आवश्यकताओं के अनुरूप और प्राचीन ज्ञान का उपयोग करते हुए आधुनिक समस्याओं का समाधान खोजने के लिए प्रारूपित किया जाना चाहिए।

वेद पाठशालाओं के संबंध में समिति ने यह संस्तुति की है कि संस्कृत और आधुनिक विषयों की श्रेणीबद्ध सामग्री के परिचय के साथ-साथ वेद पाठ कौशल संवर्धन और वेद उच्चारण में मानकीकरण की आवश्यकता है ताकि वेद छात्र अन्ततः वेद भाष्य के अध्ययन तक पहुंच सकें और छात्रों को आगे की पढ़ाई के लिए मुख्यधारा में लाया जा सके। उचित स्तर पर वेदों के विकृति पाठ के अध्ययन पर बढ़ावा दिया जाना चाहिए। समिति के सदस्यों ने यह भी चिंता व्यक्त की है कि वैदिक सस्वर पाठ पूरे भारत में समान रूप से नहीं फैला है, इसलिए वैदिक सस्वर पाठ की शैलियों और शिक्षण पद्धति की क्षेत्रीय विविधताओं में हस्तक्षेप किए बिना स्थिति में सुधार के लिए उचित कदम उठाया जाना है।

यह भी अनुभव किया गया कि वेद और संस्कृत अविभाज्य हैं और एक दूसरे के पूरक हैं और देश भर में सभी वेद पाठशालाओं और संस्कृत पाठशालाओं के लिए परीक्षा मान्यता और सम्बद्धता की समस्याएँ समान है, इसलिए दोनों के लिए एक साथ वेद संस्कृत हेतु एक बोर्ड का गठन किया जा सकता है। समिति ने यह पाया कि बोर्ड द्वारा आयोजित परीक्षाओं को कानूनी रूप से वैध मान्यता प्राप्त होनी चाहिए, जो शिक्षा की आधुनिक बोर्ड प्रणाली के साथ समानता रखे। समिति ने पाया कि महर्षि सान्दीपनि

राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान उज्जैन को ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत विद्या परिषद्'' के नाम से परीक्षा बोर्ड का दर्जा दिया जाये, जिसका मुख्यालय उज्जैन में रहे। परीक्षा बोर्ड होने के अतिरिक्त अब तक जो सभी वेद कार्यक्रम और वेद पर गतिविधियाँ हैं, वे सभी प्रतिष्ठान में जारी रहेंगे।

वैदिक शिक्षा का प्रचार भारत की गौरवशाली ज्ञान परम्परा का एक व्यापक अध्ययन है और इसमें वैदिक अध्ययन (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, स्वर का सम्यक् प्रयोग ज्ञान आदि), सस्वर पाठ कौशल, मन्त्र उच्चारण और संस्कृत ज्ञान प्रणाली सामग्री की बहुस्तरीय श्रुति परम्परा सम्मिलित है। प्रतिष्ठान में NEP 2020 अनुरूप 3 + 4 (सात साल तक) के वेद अध्ययन की योजना में पारम्परिक छात्रों को मुख्य धारा में लाने की नीति के परिप्रेक्ष्य में अन्य विभिन्न आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि पाठ्यक्रम के अनुसार तथा वैदिक शिक्षा पर केन्द्रित नीति निर्धारक निकायों में राष्ट्रीय सहमति, समय की उपलब्धता के आधार पर सभी अध्ययन संयोजित हैं। अध्ययन की यह योजना NEP 2020 के परिप्रेक्ष्य में भारतीय ज्ञान प्रणाली पर ध्यान केन्द्रित करने वाले पाठ्यक्रम सामग्री में आधुनिक ज्ञान के साथ एवं भारतीय ग्रंथों से तैयार वैदिक ज्ञान के उपयुक्त सामग्री के साथ है।

प्रतिष्ठान बोर्ड की वेद पाठशालाओं, गुरु शिष्य ईकाइयों और गुरुकुलों में, पाठ्यक्रम मुख्य रूप से सम्पूर्ण सस्वर कण्ठस्थीकरण के साथ संपूर्ण वेद शाखा का अध्ययन होता है तथा संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि और SUPW जैसे अतिरिक्त सहायक विषयों के साथ वेद अध्ययन होता है।

यह सर्वविदित तथ्य है कि वेदों की 1131 शाखाएँ सस्वर पाठ के साथ थे, अर्थात् 21 ऋग्वेद में, 101 यजुर्वेद में, 1000 सामवेद में और 9 अथर्ववेद में। समय के साथ इन शाखाओं की एक बड़ी संख्या विलुप्त हो गई और वर्तमान में केवल 10 शाखाएँ, अर्थात् ऋग्वेद में एक, यजुर्वेद में 4, सामवेद में 3 और अथर्ववेद में 2 सस्वर पाठ के रूप में विद्यमान हैं, जिन पर भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित है, इन 10 शाखाओं के संबंध में भी बहुत कम प्रतिनिधि वेदपाठी पंडित है जो श्रुति परम्परा/पाठ/वेद ज्ञान परम्परा को उसके प्राचीन और पूर्ण रूप में संरक्षित किये हुए हैं। जब तक श्रुति परम्परा के अनुसार वैदिक शिक्षा पर मूलरूप से ध्यान नहीं दिया जाएगा, तब तक यह व्यवस्था सुदृढ नहीं हो पायेगी। वैदिक

श्रुति परम्परा की श्रुति अध्ययनों के पहलुओं को सामान्य/अध्ययन में स्कूल में न तो पढ़ाया जाता है और न ही किसी स्कूली शिक्षा के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया जाता है, और न ही स्कूलों/बोर्डों के पास उन्हें आधुनिक स्कूल पाठ्यक्रम में सम्मिलित करने और सञ्चालित करने की विशेषज्ञता है।

वैदिक छात्र जो श्रुति परम्परा / वेद का पाठ सीखते हैं, वे दूर-दराज के गाँवों, सीमावर्ती गाँवों आदि में वेद गुरुकुलों में, वेद पाठशालाओं में, वैदिक आश्रमों में हैं, और वेद अध्ययन के लिए उनका समर्पण लगभग 1900 - 2100 घंटे प्रतिवर्ष है। जो अन्य स्कूल बोर्ड की सीखने की प्रणाली के समय से दोगुना है और वैदिक छात्रों को ''गुरु-मुख-उच्चारण अनुच्चारण'' - वेद गुरु के सामने बैठकर शब्दशः उच्चारण सीखना होता है, संपूर्ण वेद, शब्दशः उच्चारण (उदात्त, अनुदात्त, स्वरित आदि) के साथ कण्ठस्थ करना होता है और स्मृति के बल पर बिना किसी पुस्तक/पोथी को देखे।

ज्ञात हो कि इस प्रकार के वैदिक अध्ययन, वेद मन्त्रपाठ की रीति, गुरु शिष्य की अखण्ड मौखिक परम्परा से प्रचलित क्रम के कारण वेदों के मौखिक प्रसारण को मानवता की अमूर्त सांस्कृतिक विरासत रूप में यूनेस्को-विश्व मौखिक विरासत सूची में मान्यता प्राप्त हुई है। इसलिए, सदियों पुरानी वैदिक शिक्षा (श्रुति परम्परा/सस्वर पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) की प्राचीनता और सम्पूर्ण अखण्डता को बनाए रखने के लिए सुयोग्य कार्यनीति की आवश्यकता है। इसलिए, प्रतिष्ठान और इस बोर्ड ने राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 द्वारा निर्धारित कौशल और व्यावसायिक विषयों के साथ-साथ आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि के साथ विशिष्ट प्रकार के वेद पाठ्यक्रम को अपनाया है।

कोई भी व्यक्ति तब सुखी होकर जी सकता है जब वह परा-विद्या और अपरा-विद्या दोनों का अध्ययन करता है। वेदों में से भौतिक ज्ञान, उनकी सहायक शाखाएँ और भौतिक रुचि के विषय अपरा-विद्या कहलाते थे। सर्वोच्च वास्तविकता का ज्ञान, उपनिषदों की अंतिम खोज, परा-विद्या कहलाती है। वेद और उसके सहायक के रूप में अध्ययन किए जाने वाले विषयों की कुल संख्या 14 है। विद्या की 14 शाखाएँ ये हैं - चार वेद, छह वेदांग, मीमांसा (पूर्व मीमांसा और उत्तर मीमांसा), न्याय, पुराण और धर्मशास्त्र। आयुर्वेद, धनुर्वेद, गन्धर्ववेद और अर्थशास्त्र सहित चौदह विद्याएं अठारह हो जाते हैं। सदियों

से भारत उपमहाद्वीप में सभी शिक्षा संस्कृत भाषा में ही थी, क्योंकि इस उपमहाद्वीप में लम्बे समय तक संस्कृत बोली जाने वाली भाषा रही। इसलिए वेद भी सुलभता से समझे जाते थे।

तक्षशिला के विद्यालयों के सम्बन्ध में अठारह शिल्प-या औद्योगिक और तकनीकी कला और शिल्प का उल्लेख किया गया है। छान्देग्य उपनिषद् तथा नीति ग्रन्थों में भी इन का विवरण है। निम्नलिखित 18 कौशल/व्यावसायिक विषय अध्ययन के विषय बताए गए हैं- (1) गायन सङ्गीत (2) वाद्य सङ्गीत (3) नृत्य (4) चित्रकला (5) गणित (6) लेखाशास्त्र (7) इञ्जीनियरिङ्ग (8) मूर्तिकला (9) प्रजनन (10) वाणिज्य (11) चिकित्सा (12) कृषि (13) परिवहन और कानून (14) प्रशासनिक प्रशिक्षण (15) तीरंदाजी, किला निर्माण और सैन्य कला (16) नये वस्तु या उपज का निर्माण । उपर्युक्त कला और शिल्प में तकनीकी शिक्षा के लिए प्राचीन भारत में एक प्रशिक्षु प्रणाली विकसित की गई थी। विद्या और अविद्या मनुष्य को इस प्रपंच में सन्तुष्ट जीवन व्यतीत करने के लिए समर्थ और परलोक में मुक्ति योग्य सिद्ध करती है ।

दुनिया की सबसे पुरानी सभ्यताओं में सर्व प्रथम भारतीय सभ्यता में शास्त्रों, विज्ञान और प्रौद्योगिकी को सीखने की एक विशाल एवं सुदृढ परम्परा रही है। भारत प्राचीन काल से ही ऋषियों, ज्ञानियों और संतों की भूमि के साथ-साथ विद्वानों और वैज्ञानिकों की भूमि भी रही है। शोध से पता चला है कि भारत सीखने सिखाने (विद्या-आध्यात्मिक ज्ञान और अविद्या- भौतिक ज्ञान) के क्षेत्र में विश्व गुरु तो था ही, सक्रिय रूप से भी सम्पूर्ण प्रपञ्च में योगदान दे रहा था और भारत में आधुनिक विश्वविद्यालयों जैसे सीखने के विशाल केन्द्र स्थापित किए गए थे, जहाँ हजारों शिक्षार्थी आते थे। प्राचीन ऋषियों द्वारा खोजी गई कई विज्ञान और प्रौद्योगिकी तकनीकी, सीखने की पद्धतियाँ, सिद्धान्तों और तकनीकों ने कई पहलुओं पर हमारे विश्व के ज्ञान के मूल सिद्धान्तों को बनाया और प्रबल किया है, खगोल विज्ञान, भौतिकी, रसायन विज्ञान, गणित, चिकित्सा, प्रौद्योगिकी, ध्वन्यात्मकता, व्याकरण आदि पर दुनिया में भारत का योगदान समझा जाता है। प्रत्येक भारतीय बालक, बालिका द्वारा इस महान् देश का गौरवान्वित नागरिक होने के कारण इन विषयों का ज्ञान प्राप्त कर लेना चाहिये। भारत की संसद् के प्रवेश द्वार पर उद्धृत ''वसुधैव कुटुम्बकम्'' जैसे भारत के विचार और विभिन्न अवसरों पर संवैधानिक प्राधिकरणों द्वारा उद्धृत कई वेद मंत्र के अर्थ वेदों के अध्ययन से ही ज्ञात होते हैं और उन पर मनन करके

ही वास्तविक प्रेरणा प्राप्त की जा सकती है। वेदों और सम्पूर्ण वैदिक साहित्य में "सत, चित, आनंद" के रूप में सभी प्राणियों की अन्तर्निहित समानता पर जोर दिया गया है।

यह भी उल्लेख किया गया है कि वेद वैज्ञानिक ज्ञान के स्रोत हैं और हमें आधुनिक समस्याओं के समाधान के लिए वेदों और भारतीय शास्त्रों के स्रोतों की ओर पुनः निष्ठा से देखना होगा। जब तक छात्रों को वेदों का पाठ, शुद्ध वैदिक ज्ञान सामग्री और वैदिक दर्शन को आध्यात्मिक ज्ञान और वैज्ञानिक ज्ञान के रूप में नहीं पढ़ाया जाता है, तब तक आधुनिक भारत की आकांक्षा को पूरा करने के लिए वेदों के सन्देश का प्रसार पूर्ण रूप से सम्भव नहीं है।

वेद की शिक्षा (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परंपरा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) केवल धार्मिक शिक्षा नहीं है। यह कहना अनुचित होगा कि वेदों का अध्ययन केवल धार्मिक निर्देश है। वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं और इनमें केवल धार्मिक सिद्धान्त ही नहीं हैं, बल्कि वेद शुद्ध ज्ञान के कोष है, मानव जीवन की कुञ्जी वेदों में है इसलिए, वेदों में निर्देश या शिक्षा को केवल "धार्मिक शिक्षा/धार्मिक निर्देश" के रूप में नहीं माना जा सकता है।

2004 की सिविल अपील संख्या 6736 में माननीय सर्वोच्च न्यायालय (AIR 2013: 15 SCC 677); (निर्णय की दिनाङ्क- 3 जुलाई 2013), जैसा कि माननीय सर्वोच्च न्यायालय के निर्णय में यह स्पष्ट है कि वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं। वेदों में गणित, खगोल विज्ञान, मौसम विज्ञान, रसायन विज्ञान, हाइड्रोलिक्स, भौतिक विज्ञान और प्रौद्योगिकी, कृषि, दर्शन, योग, शिक्षा, काव्यशास्त्र, व्याकरण, भाषा विज्ञान आदि के विषय सम्मिलित हैं, जिन्हें माननीय भारतीय सर्वोच्च न्यायालय द्वारा प्रकाशित किया गया है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के अनुपालन में प्रतिष्ठान एवं बोर्ड के माध्यम से वैदिक शिक्षा -

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 में भारतीय ज्ञान प्रणाली 'संस्कृत ज्ञान प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है, उनके महत्त्व और पाठ्यक्रम में उनका समावेश और विविध विषयों के संयोजन में लचीले दृष्टिकोण को मजबूती से प्रदर्शित किया गया है। कला एवं मानविकी के छात्र भी विज्ञान सीखेंगे, प्रयास करना होगा कि सभी व्यावसायिक विषय और व्यावहारिक कौशलों (सॉफ्ट स्किल्स) को प्राप्त करें। कला, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में भारत की गौरवशाली परम्परा इस तरह की शिक्षा की ओर बढ़ने में

सहायक होगी। भारत की समृद्ध, विविध प्राचीन और आधुनिक संस्कृति और ज्ञान प्रणालियों और परम्पराओं को संयोजित करने और उससे प्रेरणा पाने हेतु यह नीति बनायी गयी है। भारत की शास्त्रीय भाषाओं और साहित्य के महत्त्व, प्रासङ्गिकता और सुन्दरता की उपेक्षा नहीं की जा सकती है। संस्कृत, संविधान की आठवीं अनुसूची में वर्णित एक महत्त्वपूर्ण आधुनिक भाषा है यदि सम्पूर्ण लैटिन और ग्रीक साहित्य को मिलाकर भी इसकी तुलना की जाए तो भी वह संस्कृत शास्त्रीय साहित्य की बराबरी नहीं कर सकता। संस्कृत साहित्य में गणित, दर्शन, व्याकरण, सङ्गीत, राजनीति, चिकित्सा, वास्तुकला, धातुविज्ञान, नाटक, कविता, कहानी, और बहुत कुछ (जिन्हें "संस्कृत ज्ञान प्रणालियों" के रूप में जाना जाता है) के विशाल भण्डार हैं । विश्व विरासत के लिए इन समृद्ध संस्कृत ज्ञान प्रणाली विरासतों को न केवल पोषण और भविष्य के लिए संरक्षित किया जाना चाहिए बल्कि हमारी शिक्षा प्रणाली के माध्यम से शोध कराकर इन्हें बढ़ाते हुए नए उपयोगों में भी रखा जाना चाहिए। इन सबको हजारों वर्षों में जीवन के सभी क्षेत्रों के लोगों द्वारा, सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि के एक विस्तृत जीवन्त दर्शन के साथ लिखा गया है । संस्कृत को रूचिकर और अनुभावात्मक होने के साथ-साथ समकालीन रूप से प्रासङ्गिक विधियों से पढ़ाया जाएगा । संस्कृत ज्ञान प्रणाली का उपयोग विशेष रूप से ध्वनि और उच्चारण के माध्यम से है। फाउंडेशन और माध्यमिक स्कूल स्तर पर संस्कृत की पाठ्यपुस्तकों को संस्कृत के माध्यम से संस्कृत पढ़ाने (एस्.टी.एस्.) और इसके अध्ययन को आनन्ददायी बनाने के लिए सरल मानक संस्कृत (एस्.एस्.एस्.) में लिखा जाना है। ध्वन्यात्मकता और उच्चारण वेदों की मौखिक परम्परा पर लागू होता है। वैदिक शिक्षा ध्वन्यात्मकता और उच्चारण पर आधारित है।

कला और विज्ञान के बीच, पाठ्यक्रम और पाठ्येतर गतिविधियों के बीच, व्यावसायिक और शैक्षणिक धाराओं, आदि के बीच कोई स्पष्ट विभेद नहीं किया गया है। सभी ज्ञान की एकता और अखण्डता को सुनिश्चित करने के लिए, एक बहु-विषयक दुनिया के लिए विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कला, मानविकी और खेल के बीच एक बहु-विषयक (Multi-Disciplinary) एवं समग्र शिक्षा के विकास पर बल दिया गया है। नैतिकता, मानवीय और संवैधानिक मूल्य जैसे, सहानुभूति, दूसरों के लिए सम्मान, स्वच्छता, शिष्टाचार, लोकतान्त्रिक भावना, सेवा की भावना, सार्वजनिक सम्पत्ति के

लिए सम्मान, वैज्ञानिक चिन्तन, स्वतन्त्रता, उत्तरदायित्व, बहुलतावाद, समानता और न्याय पर जोर दिया गया है ।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.23 में अनिवार्य विषयों, कौशलों और क्षमताओं का शिक्षाक्रमीय एकीकरण के विषय में निर्देश है। विद्यार्थियों को अपने व्यक्तिगत पाठ्यक्रम को चुनने में बड़ी मात्रा में लचीले विकल्प मिलेगें, लेकिन आज की तेजी से बदलती दुनिया में सभी विद्यार्थियों को एक अच्छे, सफल, अनुभवी, अनुकूलनीय और उत्पादक व्यक्ति बनने के लिए कुछ विषयों, कौशलों और क्षमताओं को सीखना भी आवश्यक है। वैज्ञानिक स्वभाव और साक्ष्य आधारित सोच, रचनात्मकता और नवीनता, सौंदर्यशास्त्र और कला की भावना, मौखिक और लिखित अभिव्यक्ति और संवाद, स्वास्थ्य और पोषण, शारीरिक शिक्षा, शारीरिक दक्षता, स्वास्थ्य और खेल, सहयोग और टीम वर्क, समस्या को हल करने और तार्किक चिन्तन, व्यावसायिक एक्सपोजर और कौशल, डिजिटल साक्षरता, कोडिंग और कम्प्यूटेशनल चिन्तन, नैतिकता और नैतिक तर्क, मानव और संवैधानिक मूल्यों का ज्ञान और अभ्यास, लिङ्ग संवेदनशीलता, मौलिक कर्तव्य, नागरिकता कौशल और मूल्य, भारत का ज्ञान, पर्यावरण सम्बन्धी जागरूकता, जिसमें पानी और संसाधन संरक्षण, स्वच्छता और साफ-सफाई, समसामयिक घटना और स्थानीय समुदायों, राज्यों, देश और दुनिया द्वारा जिन महत्त्वपूर्ण मुद्दों का सामना किया जा रहा है उनका ज्ञान, भाषाओं में प्रवीणता के अलावा, इन कौशलों में सम्मिलित है। बच्चों के भाषा कौशल संवर्धन के लिए और इन समृद्ध भाषाओं और उनके कलात्मक निधि के संरक्षण के लिए, सार्वजनिक या निजी सभी विद्यालयों में सभी छात्रों को भारत की एक शास्त्रीय भाषा और उससे सम्बन्धित साहित्य सीखने का कम से कम दो साल का विकल्प मिलेगा।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.27 में "भारत का ज्ञान" के विषय में महत्त्वपूर्ण निर्देश है। "भारत का ज्ञान" में आधुनिक भारत और उसकी सफलताओं और चुनौतियों के प्रति प्राचीन भारत का ज्ञान और उसका योगदान - भारतीय ज्ञान प्रणाली जैसे गणित, खगोल विज्ञान, दर्शन, योग, वास्तुकला, चिकित्सा, कृषि, इंजीनियरिंग, भाषा विज्ञान, साहित्य, खेल के साथ –साथ शासन, राजव्यवस्था, संरक्षण आदि जहाँ भी प्रासङ्गिक हो, विषयों में सम्मिलित किया जाएगा। इसमें औषधीय

प्रथाओं, वन प्रबन्धन, पारम्परिक (जैविक) फसल की खेती, प्राकृतिक खेती, स्वदेशी खेलों, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में प्राचीन और आधुनिक भारत के प्रेरणादायक व्यक्तित्वों पर ज्ञानदायी विषय हो सकेंगे।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 11.1 में समग्र और बहु-विषयक शिक्षा की ओर प्रवृत्त करने के निर्देश हैं। भारत में समग्र एवं बहु-विषयक विधि से सीखने की एक प्राचीन परम्परा पर बल दिया गया है, तक्षशिला और नालन्दा जैसे विश्वविद्यालयों के उल्लेख सहित 64 कलाओं के ज्ञान के रूप में गायन और चित्रकला, वैज्ञानिक क्षेत्र जैसे रसायनशास्त्र और गणित, व्यावसायिक क्षेत्र जैसे बढ़ई का काम और कपड़े सिलने का कार्य, व्यावसायिक कार्य जैसे औषधि तथा अभियान्त्रिकी और साथ ही साथ सम्प्रेषण, चर्चा और वाद-संवाद करने के व्यावहारिक कौशल (सॉफ्ट स्किल्स) भी सम्मिलित है । यह विचार है कि गणित, विज्ञान, व्यावसायिक विषयों और सॉफ्ट स्किल सहित रचनात्मक मानव प्रयास की सभी शाखाओं को 'कला' माना जाना चाहिए, जिसका मूल भारत है। 'कई कलाओं के ज्ञान' या जिसे आधुनिक समय में प्राय: 'उदार कला' कहा जाता है (अर्थात्, कलाओं की एक उदार धारणा) की इस धारणा को भारतीय शिक्षा में वापस लाया जाना चाहिए, क्योंकि यह ठीक उसी तरह की शिक्षा है जो 21वीं सदी के लिए आवश्यक है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.1 में भारतीय भाषाओं, कला और संस्कृति का संवर्धन हेतु निर्देश हैं। भारत संस्कृति का समृद्ध भण्डार है – जो हजारों वर्षों में विकसित हुआ है, और यहाँ की कला, साहित्यिक कृतियों, प्रथाओं, परम्पराओं, भाषायी अभिव्यक्तियों, कलाकृतियों, ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक धरोहरों के स्थलों इत्यादि में परिलक्षित होता हुआ दिखता है। भारत में भ्रमण, भारतीय अतिथि सत्कार का अनुभव होना, भारत के आकर्षक हस्तशिल्प एवं हाथ से बने कपड़ों को खरीदना, भारत के प्राचीन साहित्य को पढ़ना, योग एवं ध्यान का अभ्यास करना, भारतीय दर्शनशास्त्र से प्रेरित होना, भारत के अनुपम त्यौहारों में भाग लेना, भारत के वैविध्यपूर्ण सङ्गीत एवं कला की सराहना करना और भारतीय फिल्मों को देखना आदि ऐसे कुछ आयाम हैं जिनके माध्यम से दुनिया भर के करोड़ो लोग प्रतिदिन इस सांस्कृतिक विरासत में सम्मिलित होते हैं, इसका आनन्द उठाते हैं और लाभ प्राप्त करते हैं।

यही सांस्कृतिक एवं प्राकृतिक सम्पदा है भारत की इस सांस्कृतिक सम्पदा का संरक्षण, संवर्धन एवं प्रसार, देश की उच्चतर प्राथमिकता होनी चाहिए क्योंकि इस देश की पहचान के साथ-साथ इसकी अर्थव्यवस्था के लिए भी बहुत महत्त्वपूर्ण है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.2 में कलाओं के विषय में निर्देश हैं। भारतीय कला एवं संस्कृति का संवर्धन राष्ट्र एवं राष्ट्र के नागरिकों के लिए महत्त्वपूर्ण है । बच्चों में अपनी पहचान और अपनेपन के भाव तथा अन्य संस्कृतियों और पहचानों की सराहना का भाव पैदा करने के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति जैसी प्रमुख क्षमताओं को बच्चों में विकसित करना जरूरी है। बच्चों में अपने सांस्कृतिक इतिहास, कला, भाषा एवं परम्परा की भावना और ज्ञान के विकास द्वारा ही एकता, सकारात्मक सांस्कृतिक पहचान और आत्म-सम्मान निर्मित किया जा सकता है । अत: व्यक्तिगत एवं सामाजिक कल्याण के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति का योगदान महत्त्वपूर्ण है ।

प्रतिष्ठान की मुख्य वैदिक शिक्षा (वेदों की श्रुति या मौखिक परम्परा/वेद पाठ/वैदिक ज्ञान परम्परा) सहित अन्य आवश्यक आधुनिक विषय- संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि, भारतीय कला, SUPW आदि महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड की पाठ्य पुस्तकों की नींव/स्रोत भारतीय ज्ञान परम्परा (IKS) विषयों की अनुप्रविष्टि (इनपुट) पर आधारित हैं। ये सभी निर्देश राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के दिशानिर्देशों के अनुरूप है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 एवं महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के शैक्षिक चिन्तकों, प्राधिकरणों के परामर्श एवं नीति को ध्यान में रखते हुए प्रारूप पुस्तकें पीडीएफ फॉर्मेट में उपलब्ध करायी गयी हैं। इन पुस्तकों को भविष्य में NCF के अनुरूप अद्यतन किया जाएगा और अन्त में प्रिन्ट रूप में उपलब्ध कराया जाएगा।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के राष्ट्रीय आदर्श वेदविद्यालय के अध्यापक महानुभावों ने, वेद अध्यापन (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परम्परा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) में समर्पित आचार्यों ने, सम्बद्ध वेद पाठशालओं के संस्कृत एवं आधुनिक विषयों के अध्यापकों ने, आधुनिक विषय पाठ्यपुस्तकों को इस रूप में प्रस्तुत करने में पिछले दो वर्षों में अथक परिश्रम किया है। उन सभी को हृदय की गहराई से धन्यवाद समर्पण करता हूँ। राष्ट्र स्तर के विविध विशेषज्ञों ने

समय-समय पर पधार कर पाठ्यपुस्तकों में गुणवत्ता लाने में विशेष सहायता प्रदान की है। उन सभी विशेषज्ञों एवं विद्यालयों के अध्यापक महानुभावों को भी धन्यवाद अर्पित करता हूँ। अक्षर योजना हेतु, चित्राङ्कन हेतु, पेज सेटिंग हेतु मेरे सहयोगी कर्मचारियों ने कार्य किया है, उन सभी को हृदय की गहराई से कृतज्ञता समर्पण करता हूँ।

पाठ्य पुस्तकों की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए रचनात्मक आलोचना सहित सभी सुझावों का स्वागत है।

आपरितोषात् विदुषां न साधु मन्ये प्रयोगविज्ञानम्।
बलवदपि शिक्षितानाम् आत्मन्यप्रत्ययं चेतः॥

(अभिज्ञानशाकुन्तलम् १.०२)

(जब तक विद्वानों को पूर्ण सन्तुष्टि न हो जाए तब तक विशिष्ट प्रयोग को सब तरह से सफल नहीं मानता क्योंकि प्रयोग में विशेष योग्यता प्राप्त विद्वान भी पहले प्रयोग के सफलता में आश्वस्त नहीं रहता है।)

प्रो. विरूपाक्ष वि जड्डीपाल्
सचिव
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

विषयानुक्रमणिका

क्र. सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	गणित का इतिहास	1 - 16
2	समुच्चय	17 - 27
3	बहुपद	28 - 48
4	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	49 - 60
5	द्विघात समीकरण	61 - 69
6	निर्देशाङ्क ज्यामिति	70 - 84
7	वैदिक गणित	85 - 102
8	समान्तर श्रेणी	103 - 114
9	प्रायोगिक रचनाएँ	115 - 129
10	वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल	130 - 139
11	त्रिकोणमिति का परिचय	140 - 152
12	सांख्यिकी	153 - 161
13	प्रायिकता	162 - 168
14	संख्यात्मक एवं तार्किक अभियोग्यता	169 - 192

❖ भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान 193 - 195

अध्याय – 1

गणित का इतिहास

गणित शास्त्र का अर्थ एवं महत्त्व

भारतीय विद्या परम्परा में प्रारम्भ से ही गणित को समस्त शास्त्रों में शीर्षस्थ कहा जाता है ।

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा ।

तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां गणितंमूर्ध्नि संस्थितम् ॥ (वेदाङ्गज्योतिष 2)

आचार्यों ने तो यहाँ तक कहा है कि त्रैलोक्य में कुछ भी गणित के बिना सम्भव नहीं है ।

बहुभिर्विप्रलापैः किं त्रैलोक्ये सचराचरे ।

यत्किञ्चिद्वस्तु तत्सर्वं गणितेन विना न हि ॥

1. गणित शब्द 'गण' धातु में 'क्त' प्रत्यय लगाकर बना है । गण् धातु का अर्थ है- गिनना और इस प्रकार गणित का अर्थ जिसमें, गणना की जाती है । इस अर्थ में मित = 'नापा हुआ' **'मितोगणितो'** (कौटिल्य अर्थशास्त्र पृ.110) और संख्यात = गिनती किया हुआ **'संख्यातं गणितम्'** (अमरकोश) शब्दों का भी प्रयोग कभी-कभी होता रहा है ।परन्तु शास्त्र का नाम प्राय: 'गणित' ही रहा हैं ।
2. कौटिल्य अर्थशास्त्र के अनुसार प्राचीन काल में गणित के पर्याय थे –

   (1) गणना (2) संख्यान (3) संख्याशास्त्र

गणित शास्त्र का उद्भव

गणित शास्त्र भारत के प्राचीन शास्त्रों में से एक है । प्राचीनतम वैदिक वाङ्मय में गणित के ज्ञान का पर्याप्त परिचय मिलता है । दैनिक जीवन में कामकाज चलाने के लिए सभी अपने-अपने ढंग से आवश्यकतानुसार गणित का प्रयोग करते हैं । विश्व के सभी देशों ने प्राय: गणित का प्रारम्भ अङ्कों

तथा गिनती से ही हुआ, यही गिनती कुछ काल के पश्चात् अङ्कगणित में परिणत हो गई तथा दीर्घकाल के पश्चात् गणित रूपी वृक्ष की अनेक शाखाएँ बीजगणित, त्रिकोणमिति एवं ज्यामिति आदि अस्तित्त्व में आयीं ।

भारतीय परम्परा में गणित, नाट्यशास्त्र आदि का स्रोत यज्ञ रहा है । यज्ञ की सिद्धि के लिए वेदियों को उचित गणना के द्वारा निर्मित करना अथवा ज्योतिष सम्बन्धी गणना, गति, स्थिति आदि की आवश्यकता पड़ती हैं । मनुष्य मात्र के अविर्भाव से ही ज्योतिष्क पिण्डों (Celestial Bodies) का अवलोकन प्रारम्भ हो गया था, लेकिन खगोलगणित (Mathematical Astronomy) का विकास तभी हो पाया होगा जब मनुष्य जाति परिकलन (Calculation) में अधिक आगे बढ़ चुकी होगी, इसलिए ज्यामिति (Geometry) और खगोलगणित (Astronomy) का अध्ययन आवश्यक था ।

गणित शास्त्र का क्रमिक विकास -

वैदिक वाङ्मय में गणितीय चिन्तन :

वैदिक वाङ्मय में गणना की दृष्टि से ऋग्वेद का प्रथम स्थान है । ऋग्वेद में गणक, गण, गण्या आदि शब्द में मिलते हैं । गणित नक्षत्रविद्या के अन्तर्गत आता था । यज्ञों को यथाकाल करने से ही शुभ फल की प्राप्ति तथा अनिष्टों की निवृत्ति होती थी । काल जानने के लिए ज्योतिष की आवश्यकता पड़ी तथा उसका सम्यक् ज्ञान नक्षत्र, वेध और ग्रहगणित से ही सम्भव था । **वैदिक वाङ्मय की सबसे बड़ी देन संख्याओं का आविष्कार तथा दाशमिक प्रणाली (Decimal System) है** । एक से लेकर सहस्र (1000) तक की संख्याओं के नाम तथा अरब (अर्बुद) संख्या का नाम अब तक चला आ रहा है । बाद की संख्याओं के नाम परार्ध (10^{12}) तक हैं । बौद्ध साहित्य में दश सहस्र (10,000), लक्ष (1,00,000) कोटि (एक करोड़), खर्व, नील, पद्म, समुद्र शब्द प्रचलित हो गए ।

असंख्याता सहस्राणि ये रुद्रा अधि भूम्याम् ।

तेषा॰ सहस्रयोजनेऽव धन्वानि तन्मसि ॥ (यजुर्वेद. 16-54)

उपर्युक्त मन्त्र में असंख्य सहस्त्र का भी उल्लेख आता है। वेदों में भिन्न संख्या के बारे आए शब्द- अर्ध $\left(\frac{1}{2}\right)$, पाद $\left(\frac{1}{4}\right)$, शफ $\left(\frac{1}{8}\right)$ तथा कुष्ठ $\left(\frac{1}{12}\right)$ आदि हैं। यजुर्वेद की तैत्तिरीय संहिता (अनुवाक् 11-20) में सम (even) तथा विषम (odd) संख्याओं का उल्लेख हैं तथा 100 तक सारणियाँ (tables) भी उपलब्ध है : यथा -

$4 \times 1 = 4$	$100\times 1 = 100$	
$4 \times 2 = 8$	$100\times 2 = 200$	
$4 \times 3 = 12$	$100\times 3 = 300$	इत्यादि

तैत्तिरीय संहिता के निम्नलिखित मन्त्र में बड़ी से बड़ी संख्याएँ बताई गयी है –

शताय स्वाहा सहस्त्रायस्वाहाऽयुताय स्वाहा नियुताय स्वाहा प्रयुतायस्वाहाऽर्बुदायस्वाहा न्यर्बुदाय स्वाहा समुद्राय स्वाहा मद्ध्याय स्वाहाऽन्ताय स्वाहा परार्द्धाय स्वाहोषसे स्वाहा व्युष्टयै स्वाहोदेष्यते स्वाहोद्यते स्वाहोदिताय स्वाहा सुवर्गाय स्वाहालोकाय स्वाहा सर्वस्मै स्वाहा ।

(तैत्तिरीय संहिता- 7/2/20)

10^2 = शत	10^3 = सहस्त्र	10^4 = अयुत	
10^5 = नियुत	10^6 = प्रयुत	10^7 = अर्बुद	
10^8 = न्यर्बुद	10^9 = समुद्र	10^{10} = मध्य	
10^{11} = अन्त	10^{12} = परार्ध	10^{13} = उषस	
10^{14} = व्युष्टि	10^{15} = देष्यत	10^{16} = उद्यत	
10^{17} = उदित	10^{18} = सुवर्ग	10^{19} = लोक	10^{20} = सर्व

सामान्य अङ्कगणितीय सङ्क्रियाएँ (Arithmetical Operations) जैसे – जोड़ या भाग, बहुत परिष्कृत रूप में वैदिक साहित्य में ही मिल जाते हैं। तैत्तिरीय संहिता में 10 सर्व तक की संख्याओं

के नाम दशमलव पद्धति से दिये गये हैं । इस प्रकार, तैत्तिरीय संहिता की सूची न केवल दाशमिक पद्धति (decimal system) के ज्ञान का प्रमाण है अपितु बड़ी संख्याओं के लिए नाम गढ़ने की वैज्ञानिक जरूरत का भी प्रमाण है ।

वेदाङ्गों में "गणित" :

गणित शब्द का सर्वप्रथम प्रयोग वेदाङ्गज्योतिष में मिलता है – **गणितं मूर्ध्नि संस्थितम्** , जिसके कर्ता आचार्य 'लगध' माने जाते हैं । उनके अनुसार वेदों की प्रवृत्ति यज्ञों के निमित्त हुई तथा यज्ञ यथाकाल किये जाते हैं । वेदाङ्गज्योतिष के अध्ययन से ज्ञात होता है कि उस समय (800 ई. पूर्व) ज्योतिषीय योग, वियोग, गुणा, भाग करना जानते थे । उनको भिन्नों की भी उक्त प्रक्रियाएँ आती थी। इस प्रकार शुल्बसूत्रों में आए गणित की आधारभूत प्रक्रियाएँ तथा भिन्नों की प्रक्रियाएँ ज्यामितीय प्रयोग के लिए काम आती थी, फलत: अङ्कगणितीय मूलभूत प्रक्रियाओं का ज्ञान उन्नति पर था ।

शुल्बसूत्रों में गणितीय चिन्तन :

शुल्बसूत्र : शुल्ब का अर्थ 'धागा अथवा रस्सी' है । रस्सी की सहायता से भिन्न-भिन्न की वेदि, अग्निचिति, मण्डप इत्यादियों का विन्यास करने की रीतियाँ सूत्ररूप में जहाँ दी हैं उसे **शुल्बसूत्र** कहते हैं । अब तक आठ शुल्बसूत्रों की उपलब्धि ज्ञात है । कृष्ण यजुर्वेदान्तर्गत सात शुल्बसूत्र हैं : बौधायन, आपस्तम्ब, सत्याषाढ, वाधुल, मानव, मैत्रायणी और वाराह और शुक्ल यजुर्वेदान्तर्गत कात्यायन शुल्बसूत्र आठवाँ शुल्बसूत्र है ।

शुल्बकाल में प्रमुखतः यज्ञ कार्य के लिये वेदि, अग्निचिति आदि की नापतौल, विन्यास की अनेक पद्धतियाँ, इनकी निर्मिति के लिये ईंटों की रचना आदि की जानकारी दी है । अंगुल, पुरुष आदि परिमाण, इनका परस्पर सम्बन्ध, वेदि, चिति, मण्डप के विन्यास के लिये साधन, जैसे की रस्सी, बांस, शंकू (खूंटियाँ), भूमिति के सिद्धान्त, अनेक भौमितिक कृतियाँ, ईंटों के आकार, संख्या, अग्निचिति निर्माण के नियम आदि कि जानकारी शुल्बसूत्र में मिलती हैं । शुल्बसूत्र में दी हुई भूमिति के ज्ञान सम्बन्ध की जानकारी कुछ उदाहरणों से नीचे स्पष्ट की है ।

अग्निहोत्री के घर में तीन अग्नि नित्यस्वरूप होते हैं । ये तीन अग्नि कुण्ड हैं : गार्हपत्य, आहवनीय और दक्षिणाग्नि । गार्हपत्य वृत्ताकार, आहवनीय वर्गाकार और दक्षिणाग्नि अर्धचन्द्रकार यानि अर्धवृत्ताकार होते हैं । तीनों अग्निकुण्ड के क्षेत्रफल समान (बराबर) ही होने चाहिये । यज्ञ की वेदि की उपर्युक्त रचना के लिए निम्नलिखित रेखागणितीय प्रक्रियाओं का ज्ञान अपेक्षित था -

शताब्दियों से प्रचलित इन नियमों को बताने के लिए ऋषियों ने शुल्बसूत्रों की रचना की जिसमें रज्जु (Rope) से वेदी बनायी जाती थी । उस समय जो कार्य रज्जु से करते थें । वह आज फुट्टा (Scale) तथा परकार (Compass) से किया जाता है । मानव और मैत्रायणी शुल्बसूत्रों में शुल्बविज्ञान शब्द का प्रयोग हुआ हैं । शुल्बसूत्रों में गणित की मूलभूत प्रक्रियाओं के पारिभाषिक नाम चरम उत्कर्ष पर है । जिसके निम्न उदाहरण हैं -

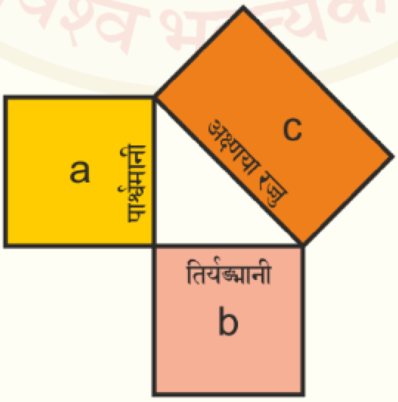
1. **पाइथागोरस प्रमेय का ज्ञान** -

पाइथागोरस प्रमेय जिसे मूलरूप से बौधायन प्रमेय के नाम से जानते हैं । इस प्रमेय का सर्वप्रथम उल्लेख बौधायन शुल्बसूत्र (1-48) में मिलता है -

दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी

च यत्पृथग्भूते कुरुतस्यदुभयं करोति ।

(बौधायन शुल्बसूत्र 1.48)



अर्थात् दीर्घचतुरश्र (आयत) अक्षण्यारज्जु के वर्ग का क्षेत्रफल, पार्श्वमानी और तिर्यङ्गमानियों के अलग - अलग वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है । पाइथागोरस (540 ई. पूर्व) से 460 वर्ष पूर्व बौधायन (1000 ई. पूर्व) उपर्युक्त सिद्धान्त का पूर्णतया प्रतिपादन कर चुके थे ।

2. **पाई (π) का मान** – वर्ग के बराबर वृत्त खींचने के प्रसंग में पाई का मान अन्तर्निहित हो जाता है । मानव शुल्बसूत्र में कहा जाता है कि दो हाथ का वर्ग, एक हाथ, तीन अंगुल अर्धव्यास पर बने हुए वृत्त के बराबर होता है, जिसको यदि गणितीय भाषा में लिखे तो यह समीकरण बनेगा।

$$2^2 = \pi\left(\frac{9}{8}\right)^2$$

अर्थात्

$$\pi = 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$= 4 \times \frac{64}{81}$$

$$= 3.16049$$

बौधायन शुल्बसूत्र में π (पाई) का मान 3 बताया है -

यूपावटा: पदविष्कम्भा: त्रिपदपरिणाहानि यूपोपराणीति ।

(बौधायन शुल्बसूत्र 1-82,83)

वृत्त को वर्ग में परिणत करने (Squaring the circle) की समस्या प्राचीन समस्याओं की प्रमुख समस्याओं में से एक है । बौधायन ने वृत्त को वर्ग में परिणत करने के लिए एक नियम बताया था, जिसमें

$$\pi = \left[1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.29} + \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}\right]$$

$$= 3.0885$$

बौधायन ने एक अन्य स्थान पर पाई (π) का यही मान 3.088 माना है । इससे यह प्रमाणित होता है कि (π) के सूक्ष्म तथा स्थूल मानों की कई परिशुद्धता स्तरों पर आवश्यकता पड़ती रही है । अभी भी पाई (π) का यह मान स्थूल था । आर्कमिडीज के बाद में पाई का मान $\frac{22}{7}$ = 3.1428 निकाल लिया था । 499 ई. में आर्यभट्ट ने इससे सूक्ष्मतर पाई (π) का मान निकाला था ।

इसलिए, $\pi = \frac{62,832}{20,000} = 3.1416$

3. करणी (Surd) का ज्ञान आपस्तम्ब शुल्बसूत्र में उल्लेखित है -

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्च चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोनेन स विशेषः ।

(आपस्तम्ब शुल्बसूत्र 1-12)

अर्थात्

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.34}$$

इस समय तक वर्ग का द्विगुणित तथा पञ्चगुणित आदि करने में $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ आदि करणियों का ज्ञान समुद्भूत हो गया था ।

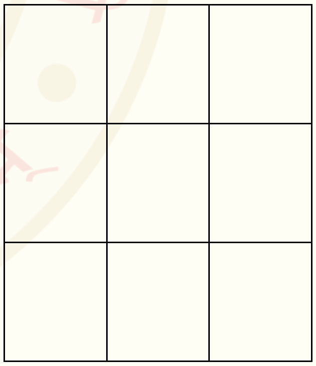
4. **वर्ग का क्षेत्रफल -**

कात्यायन शुल्बसूत्र में वर्ग के क्षेत्रफल के बारे में निम्नलिखित श्लोक मिलता है ।

यावत्प्रमाणा रज्जुर्भवति तावतस्तावन्तो वर्गा भवति तान्त्समत्स्येत् ।

(कात्यायन शुल्बसूत्र (कण्डिका 3 -7))

अर्थात्, रज्जु (रस्सी) जितनी लम्बी होती है उतने गुणित उतने ही एकक वर्गों की पङ्क्तियाँ बनती हैं । उन सबको मिलाकर क्षेत्रफल निकल आता है, यथा- इस चित्र में 3 एकक लम्बी रज्जु ने 3×3 वर्ग क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर (Horizontal and Vertical) बनाये हैं, उनको मिलाने से वर्ग का क्षेत्रफल 9 $(\text{एकक})^2$ हुआ ।



5. **भिन्न (Fraction) –**

भिन्न के परिकर्मों का भी उस समय ज्ञान था ।

यथा - **अर्धप्रमाणेन पादप्रमाणं विधीयते**, अर्थात्

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

इसी प्रकार - **अध्यर्धपुरूषा रज्जुद्वौ सर्पादौ करोति** अर्थात्

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\ \frac{1}{4}$$

शून्य का आविष्कार :

अङ्कगणित का आधार अङ्क है जिसमें शून्य का महत्त्वपूर्ण स्थान है। वैदिक वाङ्मय की सबसे बड़ी देन संख्याओं का आविष्कार तथा दाशमिक प्रणाली (Decimal System) है। जहाँ **'शून्य शब्द'** का सर्वप्रथम प्रयोग अथर्ववेद के निम्नलिखित मन्त्र में मिलता है।

शून्यैषी निर्ऋते याजगन्धोत्तिष्ठाराते प्रपत मेह रंस्था: ।

अथर्ववेद (14/02/19)

उपर्युक्त मन्त्र में आये **'शून्यैषी'** शब्द का प्रयोग किसी अनुपलब्ध वस्तु को चाहने वाले के लिए किया गया है। वैदिक वाङ्मय के अन्तर्गत यजुर्वेद (17/2), तैत्तिरीय संहिता (7/2/20) एवं अथर्ववेद (10/08/24) के मन्त्रों में बड़ी से बड़ी संख्या के दश, शत, सहस्त्र, अयुत, नियुत, अर्बुद, न्यर्बुद इत्यादि सभी अगली संख्याएँ पिछली संख्याओं के सापेक्ष दशगुणित मान को प्रकट करती है। **तैत्तिरीय संहिता** के ही मन्त्र को ले लीजिए जिसमें स्थानीय मान के अनुसार **न केवल दाशमिक पद्धति (decimal system) के ज्ञान का प्रमाण है अपितु बड़ी संख्याओं के लिए नाम रखने की वैज्ञानिक प्रक्रिया का भी प्रमाण है**। दाशमिक प्रणाली में शून्य के बिना बड़ी से बड़ी संख्याओं की चिन्तन नहीं किया जा सकता है।

> शताय स्वाहा सहस्रायस्वाहाऽयुताय स्वाहा नियुताय स्वाहा प्रयुतायस्वाहाऽर्बुदायस्वाहा न्यर्बुदाय स्वाहा समुद्राय स्वाहा मद्ध्याय स्वाहाऽन्ताय स्वाहा परार्द्धाय स्वाहोषसे स्वाहा व्युष्टयै स्वाहोदेष्यते स्वाहोद्यते स्वाहोदिताय स्वाहा सुवर्गाय स्वाहालोकाय स्वाहा सर्वस्मै स्वाहा। (तैत्तिरीयसंहिता-(7/2/20)

शून्य का चिह्न :

वैदिक वाङ्मय के अन्तर्गत ऋग्वेद में **शून्य चिह्न** के सन्दर्भ में निम्नलिखित मन्त्र उपलब्ध है।

खे अराँ इव खेदया- (**ऋग्वेद** : 8/77/3)

अर्थात् वेद में आकाश से परिपूर्ण गोल छिद्र के लिये 'ख' का प्रयोग प्राप्त होता है । गणित-शास्त्र शून्य के चिह्न को समझना अत्यन्त ही रोचक है कि जब भी हम आकाश को देखते है तब हमें आकाश एक गोलाकार के रूप में दिखाई देता है । गणितसार संग्रह ग्रन्थ के निम्न श्लोक के अनुसार आकाश के स्वरूप से प्रेरणा प्राप्त करते हुए विद्वानों ने आकाश के शून्य को पर्यायवाचक शब्दों को शून्य का पर्याय निरूपित किया है ।

आकाशं गगनं शून्यमम्बरं खं नभो वियत् **(गणितसार संग्रह)**

गणित-शास्त्र में यह शून्य अभावस्वरूप होकर भी संख्या के अन्तर्गत है । इसका अलग नाम तथा प्रतीक चिह्न है । वेदों में उपलब्ध ज्ञान को समझने के लिये वेदमन्त्रों के लघु एवं गुरु वर्णों को स्पष्ट करने के लिये वेदाङ्गों के अन्तर्गत छन्दशास्त्र को जानना अत्यन्त आवश्यक है । **'शून्य चिह्न'** के प्रतीक का सर्वप्रथम प्रयोग में आचार्य पिंगल के छन्दसूत्र के निम्न सूत्रों में प्राप्त होते हैं ।

रुपे शून्यम् **(पिंगल छन्द , अष्टमोऽध्याय: 29)**

द्विः शून्ये **(पिंगल छन्द , अष्टमोऽध्याय: 30)**

उपर्युक्त सूत्रानुसार जब वृत्त की विषम संख्या का भेद ज्ञात करना हो अथवा समसंख्या का आधा करते-करते हुए यदि विषम संख्या उपस्थित हो जाए तो **रूपे** - विषम संख्या से एक संख्या कम करने पर ऊपर लिखे दो अङ्क के नीचे **शून्यम्** - शून्य (0) स्थापित कर दें । विषम संख्या से एक संख्या निकालने पर जो समसंख्या शेष रही, उसका आधा करने पर उसके निमित्त शून्य के नीचे पुन: 2 (दो) अङ्क लिख दें । इसी भाँति समसंख्या का आधा हो जाने पर उसके लिए दो अङ्क तथा विषम संख्या आने पर एक न्यून करके शून्य स्थापित करते जाएँ, जब तक अभीष्ट संख्या न्यून करते-करते एक संख्या तक न पहुँच जाए । इतना करने पर **शून्ये** - जहाँ शून्य प्राप्त है उसके सामने वाली अर्थात् दायीं ओर (=) बराबर रखी हुई एक संख्या को **द्विः** = दोगुणा कर दें ।

उपर्युक्त वैदिक वाङ्मय के तथ्यों से स्पष्ट है कि **'शून्य शब्द'** का सर्वप्रथम प्रयोग वेदों में उपलब्ध है साथ ही सर्वप्रथम **'शून्य चिह्न'** का प्रयोग षड् वेदाङ्गों के अन्तर्गत आचार्य पिंगल द्वारा रचित छन्दसूत्र में मिलता है ।

वर्णाङ्क प्रणाली –

किसी संख्या को जब अक्षर के रूप में व्यक्त किया जाता है उसे **'कूटाङ्क' या वर्णाङ्क** कहते हैं । गणितज्ञों ने इस सङ्कल्पना का प्रयोग संख्याओं को अभिव्यक्त करने में किया था । वर्णाङ्कों या 'कूटाङ्कों' का संस्कृत एवं वैदिक वाङ्मय का प्रयोग अनेक स्थलों पर प्राप्त होता है ।

आर्यभट्टीयम् (दशगीतिकापाद) के निम्न श्लोक में वर्णांक प्रणाली के बारे बताया गया है ।

वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात् ङ्मौ यः ।

खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा ॥

(आर्यभट्टीयम्, दशगीतिका पाद -2)

अर्थात् , वर्गाक्षर (जिनका आरम्भ 'क' अक्षर से म तक होता है) वर्ग स्थानों में प्रयुक्त किए गए हैं और अवर्गाक्षर (य , र , ला , व , श , ष , स , ह) अवर्ग स्थानों में प्रयुक्त किये गये हैं । इस प्रकार ङ्मौ (ङ् + म) का मान वही है जो य् अक्षर का है । नौ स्वर शून्यों के वर्ग के लिए तथा अवर्ग स्थान वाले नौ जोड़ो के लिए प्रयुक्त किये गये हैं । नौ स्वरों (अ , इ , उ , ऋ , ल , ए , ऐ , ओ , औ) का उपयोग नौ वर्ग स्थानों (विषम स्थानों) के लिए और नौ अवर्ग स्थानों (सम स्थानों) के लिए इस प्रकार मात्रा के लिए अठारह स्थान बताए गये हैं । आर्यभट्ट ने एक श्लोक में बड़ी-बड़ी संख्याओं को लिखने के लिए वर्णमाला के अक्षरों के उपयोग कर एक सर्वथा मौलिक विधि वर्णाङ्क प्रणाली का प्रतिपादन किया ।

इसके अनुसार वर्णमाला के अक्षरों को आर्यभट्ट ने अधोलिखित मान प्रदान किये ।

वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क	वर्ण	अङ्क
क	1	च	6	ट	11	त	16	प	21
ख	2	छ	7	ठ	12	थ	17	फ	22
ग	3	ज	8	ड	13	द	18	ब	23
घ	4	झ	9	ढ	14	ध	19	भ	24
ङ	5	ञ	10	ण	15	न	20	म	25
य	र	ल	व	श	ष	स	ह		
30	40	50	60	70	80	90	100		

स्वर	अ	इ	उ	ऋ	ऌ	ए	ऐ	ओ	औ
वर्ग	10^0	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}
अवर्ग	10^1	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}	10^{15}	10^{17}

वर्णाङ्क के रूप में अङ्क विद्या का प्रयोग -

इसका प्रयोग केवल वे ही व्यक्ति कर सकते हैं जो परस्पर मिलकर एक-दूसरे से सहमत होकर सङ्केतों को समझ लेते हैं। प्रेषक एवं प्रेप्य ही परस्पर शब्द व उससे प्राप्त सङ्केत को निश्चित कर लेते हैं। **जैसे -**

निर्धारित वर्ण	क	ख	ग	घ	ङ	च	छ	ज	झ	ञ
अङ्क	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

संख्याओं के लिए शब्दों / वर्णों का प्रयोग निम्न प्रकार सम्भव है -

कमल = क्×अ + म्×अ + ल्×अ $= 1\times 10^0 + 25\times 10^0 + 50\times 10^1$

$= 1\times 1 + 25\times1 + 50\times 10$

$= 1 + 25 + 500 = 526$

ख्युघृ = ख्यु + यु + घृ = ख्×उ + य्×उ + घ्×ऌ = $2\times 10^4 + 30\times 10^4 + 4\times 10^6$

$= 2\times 10000 + 30\times 10000 + 4\times 1000000 = 43{,}20{,}000$

आर्यभट्ट ने ख्युघृ के द्वारा एक युग में सूर्य के भगणों की संख्या 43 लाख 20 हजार बतायी है । इस विधि में बड़ी से बड़ी संख्या कुछ थोड़े से वर्णों में दी जाती है ।

करो और सीखो -

निम्न शब्दों को अङ्कों में परिवर्तित करने पर कौन-सी संख्या बनेगी -

1. रमण = ... गणित = ...

2. अपने परिवारजनों के नाम को अङ्कों में लिखकर परिवारजनों से चर्चा करें।

कटपयादि - पद्धति

यह पद्धति 5वीं शती इस्वी में प्रचलित थी । आर्यभट्टीयम् के एक व्याख्याकार सूर्यदेव का कथन है कि- यह कटपयादि पद्धति आर्यभट्ट प्रथम (473 ई.) को ज्ञात थी । आर्यभट ने इसके स्थान पर अपनी नई पद्धति का आविष्कार किया । इससे ज्ञात होता है कि यह कटपयादि - पद्धति पाँचवी शती से पहले विद्यमान थी । इस पद्धति का 'सद्रत्नमाला' ग्रन्थ में सूत्र मिलता है -

नञावचश्च शून्यानि संख्या: कटपयादय: ।

मिश्रे तूपाऽन्त्यहल्संख्या न च चिन्त्यो हल: स्वरा: ।

अर्थात् न , ञ और केवल स्वरशून्य के सूचक हैं । क् , ट् , प् और य् से प्रारम्भ होने वाले व्यंजन (1 , 2 , 3 आदि) संख्याओं को सूचित करते हैं । मिश्र व्यंजनों में केवल स्वरयुक्त अन्तिम व्यंजन संख्या - सूचक होता है । स्वर - रहित व्यंजनों से कोई संख्या न समझें । **'अंकाना वामतो गति:'** अङ्कों की गणना दायीं ओर से बायीं ओर करें । स्थानीयमान प्रकिया (इकाई, दहाई आदि) इसमें भी चलती है । वर्ग के प्रथम वर्ण से 1 संख्या, वर्ग के द्वितीय से 2 संख्या आदि समझें । कटपयादि – पद्धति का स्वरूप यह हैं –

वर्ण		किस संख्या के बोधक हैं।
क , ट , प , य	-	1
ख , ठ , फ , र	-	2
ग , ड , ब , ल	-	3
घ , ढ , भ , व	-	4
ङ , ण , म , श	-	5
च , त , ष	-	6
छ , थ , स	-	7
ज , द , ह	-	8
झ , ध	-	9
ञ, न और केवल स्वर	-	0

अभिलेखों और दानपत्रों आदि में इस पद्धति के उदाहरण मिलते हैं। जैसे –

क) 2 4 4 1

रा घ वा य - 1442

ख) 6 4 3 1

त त्वा लो के - 1346

भूतसंख्या पद्धति (शब्दाङ्क) -

पद्धति में अङ्कों के लिए प्रयुक्त होने वाले कुछ प्रचलित सङ्केत शब्द ये हैं। (इनके पर्यायवाची भी इसी अर्थ में आते हैं।)

अङ्क	सङ्केत – शब्द
0	शून्य, ख, अम्बर, गगन, नभ, वियत्, अनन्त

1	चन्द्र, इन्दु, विधु, सोम, अब्ज, भू, धरा, गो, रूप, तनु
2	यम, अश्विन, नेत्र, अक्षि, कर्ण, कर, पक्ष, द्वय, अयन, युगल
3	राम, गुण, त्रिगुण, भुवन, काल, अग्नि, त्रिनेत्र, लोक, पुर
4	वेद, श्रुति, सागर, वर्ण, आश्रम, युग, तुर्य, कृत, अय, दिश
5	बाण, शर, इषु, भूत, प्राण, तत्त्व, इन्द्रिय, विषय, पाण्डव
6	रस, अंग, ऋतु, दर्शन, अरि, तर्क, कारक, षण्मुख
7	नग, अग, पर्वत, ऋषि, मुनि, वार, स्वर, छन्द, द्वीप, धातु, अश्व
8	वसु, अहि, नाग, राज, सर्प, सिद्धि, भूति, अनुष्टुप्
9	अङ्क, नन्द, निधि, ग्रह, रन्ध्र, छिद्र, द्वार, दुर्गा
10	दिश्, दिशा, अंगुलि, पङ्क्ति, ककुभ्, रावणशिर, अवतार
11	रुद्र, ईश्वर, हर, ईश, भव, महादेव, अक्षौहिणी
12	रवि, सूर्य, अर्क, मास, राशि, व्यय, भानु, दिवाकर
13	विश्वेदेवा:, विश्व, काम, अतिजगती
14	मन, विद्या, इन्द्र, शक्र, लोक
15	तिथि, दिन, अहन्
16	नृप, भूप, भूपति, अष्टि, कला
17	अत्यष्टि
18	धृति, पुराण
19	अतिधृति
20	नख, कृति
21	उत्कृति, प्रकृति, स्वर्ग
22	आकृति

23	विकृति
24	गायत्री, जिन, अर्हत्, सिद्ध
27	नक्षत्र, उडु, भ
33	देव, अमर, सुर, त्रिदश
49	तान

प्रश्नावली 1.1

प्र.1 गणित शब्द का क्या अर्थ हैं ?

प्र.2 दाशमिक अङ्कलेखन प्रणाली किस युग की देन है ?

प्र.3 यज्ञवेदी बनाने के लिए किस ज्ञान की आवश्यकता होती थी ?

प्र.4 वर्णाङ्क पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए।

प्र.5 शून्य के अविष्कार पर प्रकाश डालिए।

प्र.6 पाई के मान में आर्यभट्ट का योगदान क्या है ? लिखिए।

प्र.7 कापित्थका गुरुकूल उज्जैन का गणित क्षेत्र में क्या योगदान रहा है ?

प्र.8 वर्णाङ्क प्रणाली को स्पष्ट कीजिए एवं आर्यभट्टीयम् शब्दाङ्क प्रणाली से अपने परिवार के पाँच सदस्य के नाम को अङ्कों में बदलिए।

प्र.9 कटपयादि पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए।

प्र.10 वैदिक गणित ग्रन्थ के रचयिता का नाम लिखिए एवं ग्रन्थ का संक्षिप्त परिचय दीजिए।

प्र.11 सही-जोड़ी मिलान कीजिए।

आर्यभट्ट	-	वैदिक गणित
भास्कराचार्य	-	पञ्च सिद्धान्त
ब्रह्मगुप्त	-	आर्यभट्टीयम्
वाराहमिहिर	-	सिद्धान्त शिरोमणि
भारतीय कृष्णतीर्थ	-	ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त

अध्याय - 2

समुच्चय

प्रिय बटुकों ! आपकी वेद पाठशाला में विद्यार्थियों का समूह जो सुबह पाठशाला में प्रार्थना के बाद आप अपनी अपनी कक्षाओं में चले जाते हैं । पाठशाला के विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों के समूह अलग-अलग होते हैं । आपने दैनिक जीवन में अनेक प्रकार के समुच्चय (समूह) के नाम सुने होंगे -

जैसे :

1. अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय
2. सूर्य के ग्रहों का समुच्चय
3. सप्ताह के दिनों का समुच्चय
4. 15 से छोटी प्राकृत संख्या का समुच्चय

कुछ ऐसे समुच्चय जो परिभाषित नहीं है ।

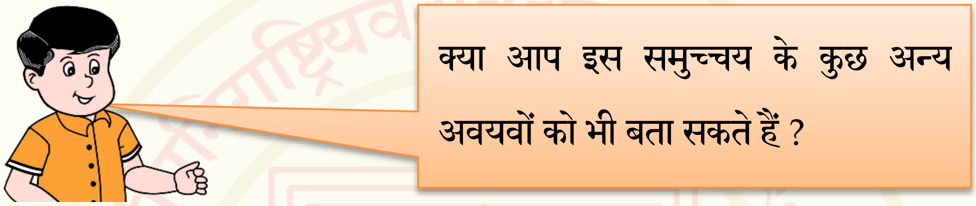
1. सुन्दर फूलों का समूह
2. लम्बे छात्रों का समूह इत्यादि

समुच्चय (Sets) :

वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह को **समुच्चय** कहते हैं । वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह का अर्थ यह है कि हम बता सकें कि कोई वस्तु उस समूह के अन्तर्गत है या नहीं । उदाहरण के लिये 'b' अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय में नहीं है । जबकि 'a' इस समूह में है । स्वरों की संख्या तथा उनकी विशेषताएँ निश्चित हैं । अतः स्वरों का समूह सुपरिभाषित हैं । इसलिए यह एक समुच्चय हैं ।

हम समुच्चय का सङ्केत, अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों A , B , C , D , X ,Y , Z , ….. इत्यादि द्वारा प्रदर्शित करेंगे । किसी समुच्चय के सदस्यों के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों a , b , c,…. इत्यादि का प्रयोग करेंगे ।

यदि A एक समुच्चय हो तो A के प्रत्येक सदस्य को उसका **अवयव** कहते हैं । मान लीजिए A , 8 से छोटी सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है अर्थात् इस समूह में 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 अवयव है तो 5 इस समुच्चय का अवयव हैं ।



क्या 10 इस समुच्चय का अवयव है ? संख्या 5, समुच्चय A का एक अवयव है इस तथ्य को प्रतीक द्वारा प्रदर्शित करने के लिए हम लिखते हैं ।

$$5 \in A$$

और यह प्रतीक पढ़ा जाता है ; “5 अवयव है समुच्चय A का” या “5 सदस्य है समुच्चय A का”

इसी प्रकार हम लिखेंगे $5 \in A$

जैसा की हम देख सकते हैं, 10 इस समुच्चय का अवयव नहीं है, इस तथ्य को एक प्रतीक द्वारा प्रदर्शित करने के लिए हम लिखते हैं ।

$$10 \notin A$$

यह प्रतीक पढ़ा जाता है - “10 अवयव नहीं है समुच्चय A का” या ‘’10 सदस्य नहीं है समुच्चय A का”।

व्यापक रूप से यदि a, समुच्चय A का सदस्य है तो हम लिखते है, $a \in A$ और इसे पढ़ते है । “a सदस्य है A का” । यदि a, समुच्चय A का सदस्य नहीं है तो हम लिखते हैं । $a \notin A$ और इसे पढ़ते हैं । “a सदस्य नहीं है A का”

समुच्चय का निरूपण –

किसी समुच्चय का निरूपण करने के लिए प्राय: नीचे दी गई दो विधियों का प्रयोग करते हैं ।

1) सारणीबद्ध रूप

2) समुच्चय निर्माण रूप

1) सारणीबद्ध रूप –

एक समुच्चय को सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुत करने के लिए हम उसके सभी अवयवों को कोष्ठक { }, के अन्दर सारणी के रूप में लिखते हैं, और सारणी के प्रत्येक दो अवयवों को पृथक करने के लिए उनके बीच अर्द्धविराम चिह्न का प्रयोग करते हैं ।

उदाहरण : यदि 1, 3, 5, 7, 9 समुच्चय A के अवयव है , तो हम लिखते हैं -

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

किसी समुच्चय को सारणीबद्ध रूप से व्यक्त करते समय इस बात का ध्यान रखते हैं कि प्रत्येक अवयव को केवल एक बार ही लिखा जाए तथा इस बात का कोई महत्त्व नहीं दिया जाता है कि अवयवों को किस क्रम में लिखा जाये । इस प्रकार समुच्चय {3, 2, 1}, {2, 1, 3} , {1, 2, 3} ,{ 3, 1, 2} एक ही समुच्चय को दर्शाते हैं ।

2) समुच्चय निर्माण रूप - इस रूप का प्रयोग हम तभी करते हैं जब हम समुच्चय के उस गुणधर्म की व्याख्या कर सकते हैं जो समुच्चय के सभी अवयवों में सामान्य हो, परन्तु समुच्चय से बाहर अन्य वस्तु में नहीं हो । **उदाहरण:** के लिए समुच्चय {a, e, i, o, u} के अवयवों का यह सामान्य गुणधर्म है कि उनमें से प्रत्येक, अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है । इस समुच्चय को सङ्केत 'V' द्वारा प्रदर्शित करते हुए हम लिखते हैं ।

V = { x : x अंग्रेजी वर्णमाला में एक स्वर है }

इसे पढ़ते है " V सभी x का समुच्चय इस प्रकार है कि x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।"

चिह्न : या / को "इस प्रकार है कि" (such that) पढ़ा जाता है ।

उदाहरण : कुछ समुच्चयों के सारणीबद्ध रूप में नीचे दिए गए है ।

1. $A = \{ x / x$ प्राकृत संख्या है ; और $5 < x \leq 10 \}$

   यहाँ $A = \{ 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$

2. $A = \{ x / x$ धनात्मक विषम संख्या है $\}$

   यहाँ $A = \{ 1 , 3 , 5 , 7..... \}$

परिमित समुच्चय –

वह समुच्चय जिसके अवयवों की संख्या परिमित हो, उसे **परिमित समुच्चय** कहते हैं ।

उदाहरण :

1. $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$
2. $B = \{$ भारत का प्रधानमन्त्री $\}$

अपरिमित समुच्चय –

अपरिमित समुच्चय उस समुच्चय को कहते हैं जो परिमित समुच्चय नहीं है अर्थात् जिसमें अवयवों की संख्या परिमित नहीं हो, अर्थात् अपरिमित या अनन्त हों ।

उदाहरण : सभी पूर्णाङ्कों का समुच्चय

$Z = \{ ...... -2 , -1 , 0 , 1 , 2 ...... \}$

$P = \{ x : x$ कोई संख्या है $\}$

रिक्त समुच्चय (Empty Set or Null Set) -

वह समुच्चय जिसमें कोई अवयव न हो ,उसे **रिक्त समुच्चय** कहते हैं । इसे सङ्केत में ''∅ '' (Phie) द्वारा प्रदर्शित करते है । रिक्त समुच्चय को सारणीबद्ध रूप में सङ्केत { } से प्रकट करते है।

अतः $\emptyset = \{ \}$

उदाहरण : 1) $A = \{ x : x$ विषम प्राकृत संख्या है और $7 < x < 9 \}$

यह रिक्त समुच्चय है क्योंकि 7 और 9 के मध्य कोई विषम प्राकृत संख्या नहीं है।

2) A = { x: x दो समानान्तर रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है }

उप समुच्चय –

यदि किसी समुच्चय के एक भाग को लेकर नया समुच्चय बनाए तो यह नया समुच्चय दिये गये समुच्चय का **उप समुच्चय** कहलाता हैं ।

उदाहरण :

A = { a , e , i , o , u } तथा B = { a , b , c , d , e ...... x , y , z }

हम देखते हैं कि समुच्च का A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी अवयव है, अर्थात् समुच्चय A, समुच्चय B का एक भाग है तो इसे A ⊂ B से निरूपति करते हैं और ''A उपसमुच्चय है B का'' पढ़ते हैं एवं B को A का **अधिसमुच्चय** कहते हैं ।

याद रखें

1. रिक्त समुच्चय, प्रत्येक समुच्च का उप समुच्चय होता हैं ।
2. प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता हैं ।

उदाहरण : समुच्चय A = { 2 , 3 } के सभी उपसमुच्चय लिखिए ।

हल : समुच्चय A = { 2 , 3 }

उपसमुच्चय ={ 2 } , { 3 } , { 2 , 3 } , { }

उदाहरण : यदि A = { a , b , c } और B = { b , c , a , d } तो A ⊂ B या B ⊂ A क्या सही है ।

हल : दिया है समुच्चय A = { a , b , c } और B = { b , c , a , d }

उपर्युक्त दोनों समुच्च को हम देखते हैं तो पाएंगे कि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव समुच्चय B का एक भाग है, अतः

A ⊂ B

समुच्चयों का संघ (Union of Set) –

दो समुच्चयों का **संघ** एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों में से कम से कम किसी एक का अवयव अवश्य होता है ।

मान लीजिए , A और B दो समुच्चय है, अब एक नए समुच्चय का निर्माण करते हैं जिसमें A और B के सभी सदस्य आ जाए और इनके अतिरिक्त अन्य कोई सदस्य न हो । इस नए समुच्चय को A और B का **संघ** 'Union' कहते हैं ।

$$A \cup B = \{ x \ / \ x \in A , x \in B \}$$

इन A और B के संघ को सङ्केत 'A ∪ B' से प्रकट करते हैं और इसे 'A संघ B' पढ़ते हैं :

उदाहरण : समुच्चय A = { 2 , 3 , 4 } और B = { 2 , 4 , 5 , 6 } हैं तब समुच्चयों का संघ,

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ –

मान लीजिए A और B दो समुच्चय है। A और B का सर्वनिष्ठ समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय होता है। A और B के सर्वनिष्ठ (Intersection) को प्रतीक 'A ∩ B' से लिखते हैं और इसे 'A सर्वनिष्ठ B ' पढ़ते हैं ।

इस प्रकार,

$$A \cap B = \{ x \ / \ x \in A \text{ और } x \in B \}$$

उदाहरण: A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } और B = { 2 , 3 , 5 , 7 , 8 } तो A ∩ B ज्ञात करें ।

हल : दिये है समुच्चय A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } और B = { 2 , 3 , 5 , 7 , 8 }

हम जानते हैं कि, A ∩ B में वह समुच्चय है। जिसका प्रत्येक अवयव A और B दोनों का अवयव हो, यहाँ समुच्चय A और B में 2 , 3 , 5 उभयनिष्ठ अवयव है इसलिए,

$$A \cap B = \{ 2 , 3 , 5 \}$$

समष्टि समुच्चय –

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए ।

Universal set (∪)= { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

A = { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 }   C = { 7 , 8 , 9 , 6 }

B = { 2 , 3 , 5 , 7 , 8 }   D = { 6 , 7 , 1 , 9 , 5 }

हम देखते हैं कि समुच्चय A , B , C एवं D समुच्चय , ∪ के उप समुच्चय है। समुच्चय ∪ को समुच्चय A , B , C और D का **समष्टि समुच्चय** कहते हैं ।

एक ऐसा समुच्चय जिसके अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय उपसमुच्चय हो, **समष्टि समुच्चय** कहलाता है इसे ' ∪ 'से प्रदर्शित करते हैं ।

उदाहरण : समुच्चय A = { 2 , 3 } , B = { 3 , 4 , 5 } , C = { 5 , 6 , 8 , 11 } एवं D = { 15 , 17 , 19 , 2 } का समष्टि समुच्चय लिखिए ।

हल : दिये है समुच्चय

A = { 2 , 3 }   B = { 3 , 4 , 5 }

C = { 5 , 6 , 8 , 11 }   D = { 15 , 17 , 19 , 2 }

हम जानते हैं कि A , B , C व D समुच्चय समष्टि समुच्चय ∪ के उपसमुच्चय होते हैं। अर्थात्

∪ = { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 11 , 15 , 17 , 19 }

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) यदि $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ और $B = \{5, 7, 9, 11\}$ तो $A \cup B$ का मान होगा।

(I) $\{1, 3, 7, 9\}$ (II) $\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 11\}$

(III) $\{5, 7\}$ (IV) $\{1, 3, 8, 11\}$

(ब) यदि $A = \{2, 4, \{5, 6\}, 8\}$ तब निम्नलिखित में से कौन-सा असत्य है?

(I) $\{5, 6\} \subset A$ (II) $\{5, 6\} \in A$

(III) $8 \notin A$ (IV) $2, 4, 8 \in A$

(स) समुच्चय $A = \{a, b\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या है ?

(I) 3 (II) 2 (III) 1 (IV) 4

(द) समुच्चयों A तथा B में क्रमशः 5 तथा 10 अवयव हैं। $(A \cup B)$ में अवयवों की न्यूनतम संख्या होगी ?

(I) 15 (II) 10 (III) 8 (IV) 5

2. यदि $A = \{3, 4, 6\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तो $A \subset B$ या $B \subset A$ क्या सही है ?

3. यदि समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ हो तो समुच्चयों का संघ एवं सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिये ?

4. निम्न समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

(अ) $\{1, 2\}$ (ब) $\{3, 4, 5\}$ (स) $\{5\}$

5. निम्न उप समुच्चयों के स्थान पर एक समुच्चय लिखिए। समुच्चय

अ) $\{a\}, \{a, b\}, \{b\}, \{\emptyset\}$

ब) { b } , { ∅ }

स) { 1 } , { 4 } , { 5 } , { 4 , 5 } , { 1 , 5 } , { 1 , 4 } , { 1 , 4 , 5 } , { ∅ }

6. निम्नलिखित समुच्चयों का संघ ज्ञात करें ।

अ) (A ∪ B) ज्ञात करें यदि समुच्चय A = { a , e , i , o , u } एवं B = { a , b , c }

ब) (X ∪ Y) ज्ञात करें यदि समुच्चय X = { 1 , 3 , 5 } एवं Y = { a , b }

स) (A ∪ B) ज्ञात करें यदि समुच्चय A = { a , 4 , 5 , 2 , c } एवं B = { 1 , 4 , c }

द) (X ∪ Y) ज्ञात करें यदि समुच्चय X = { 1 , 3 , 5 , 7 , 7 } एवं Y = { 1 , 8 , 9 }

इ) यदि समुच्चय X = { 2 , 0 , 5 , 8 , 8 } एवं Y = { 1 , 1 , 6 } हो तो (X ∪ Y) ज्ञात करें।

7. मान लीजिए A = { a , b } , B = { a , b , c } क्या A ⊂ B तथा A ∪ B = B है ?

8. निम्नलिखित समुच्चयों का सर्वनिष्ठ ज्ञात करें।

अ) A = { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 } , B = { 1 , 3 , 5 , 7 }

ब) A = { a , b , c , e , d , f } ,B = { e , f , a , i , b }

स) A = { 4 , b , 3 , e , 5 , f } ,B = { e , 2 , a , 4 , b }

द) A = { 1 , b , 3 , e , 5 , f } ,B = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , f }

9. निम्नलिखित समुच्चयों का समष्टीय समुच्चय ज्ञात करें ।

अ) A = { 1 , 3 } , B = { 2 , 3 , 4 } , C = { 3 , 4 , 5 , 6 }

ब) X = { a , b } , Y = { 1 , 3 , 6 } , Z = { 5 , 7 , 6 }

स) A = { 0 , 5 } , B = { a , b , c , e } , C = { 3 , e , 5 , f }

द) X = { a , b } , Y = { 8 , 0 , 6 } , Z = { 5 , e , 2 , a , 6 }

10. यदि समष्टीय समुच्चय U = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }, B = { 6 , 7 , 8 } तथा A ∪ C = {1,2,3,4,5,6}, तो समुच्चय (A∪B∪C) होगा ।

11. यदि सार्वत्रिक (Universal) समुच्चय U = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } उपसमुच्चय A = {1 , 2 , 5} , B = { 3 , 4 , 5 , 6 } तो समुच्चय $(A \cup B) \cup (A \cap B)$ में अवयवों की संख्या है ।

12. यदि A = { 3 , 4 , 7 , 8 } , B = { 1 , 5 , 6 , 4 , 3 } , C = { 4 , 5 , 9 , 3 , 8 , 6 } तो $A \cup B \cap C$ है।

हमने सीखा –

1) **समुच्चय** - वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह को **समुच्चय** कहते हैं ।

2) **समुच्चय का निरूपण** -

अ) सारणीबद्ध रूप	ब) समुच्चय निर्माण रूप

3) **परिमित समुच्चय** – ऐसे समुच्चय जिसमें सदस्यों (अवयवों) की संख्या परिमित होती है। **परिमित समुच्चय** कहलाता हैं ।

4) **अपरिमित समुच्चय** – ऐसा समुच्चय जो परिमित समुच्चय न हो **अपरिमित समुच्चय** कहलाता है। इसमें सदस्यों की संख्या अनन्त होती हैं ।

5) **रिक्त समुच्चय** – ऐसा समुच्चय जिसमें कोई सदस्य (अवयव) न हो **रिक्त समुच्चय** कहलाता हैं । इसे $\emptyset$ या { } से दर्शाते हैं ।

6) **उपसमुच्चय** – यदि किसी समुच्चय को लेकर नया समुच्चय बनाए तो नया समुच्चय दिये गये समुच्चय का **उपसमुच्चय** कहलाता हैं ।

7) **समुच्चयों का संघ** – दो समुच्चयों का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों में से कम से कम किसी एक का अवयव अवश्य होता है ।

उदाहरण :	A = { 2 , 3 } , B = { 3 , 4 , 5 }

तब, $(A \cup B)$ = { 2 , 3 , 4 , 5 }

8) **समुच्चयों का सर्वनिष्ठ** – दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों में होता हैं ।

उदाहरण : $A = \{3, 4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$

तब, $(A \cap B) = \{5, 6\}$

9) **समष्टि समुच्चय** - एक ऐसा समुच्चय जिन्हें अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय उप समुच्चय हो, **समष्टि समुच्चय** कहलाता है इसे '∪' से प्रदर्शित करते हैं ।

उदाहरण : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

$C = \{e, f, g\}, D = \{4, 5, 6\}$

तब, $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, e, f, g\}$

अध्याय - 3

बहुपद

वेदपाठी बटुकों ! आपने पूर्व कक्षा में बहुपदों के बारे अध्ययन किया है आपको स्मरण होगा । जिस बीजीय व्यंजक में चर की घात पूर्ण संख्या हो बहुपद कहलाता है। किसी चर के लिए बहुपद $P(x)$ में x की उच्चतम घात **बहुपद की घात** कहलाती है ।

घात के आधार पर हम बहुपदों को पहचान सकते हैं । **उदाहरण के लिए** -

1) $4x + 3$ में चर x की 1 घात का बहुपद है ।
2) $2x^2 + 3x + 4$ में चर x की 2 घात का बहुपद है ।
3) $4x^3 + 4x^2 + 5$ में चर x की 3 घात का बहुपद है ।

रैखिक बहुपद

किसी बहुपद में चर की घात 1 होने पर उस बहुपद को **रैखिक बहुपद** कहते हैं।

उदाहरण : $3x + 5$, $4x$, $5x$, $6x + 7$

रैखिक बहुपद का व्यापक रूप $ax + b$ है । जहाँ a, b वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है ।

द्विघातीय बहुपद

किसी बहुपद में चर की घात 2 होने पर उस बहुपद को **द्विघातीय बहुपद** कहते हैं ।

उदाहरण : $5x^2$, $5x^2 + 3$, $4x^2 + 5x + 4$

द्विघातीय बहुपद का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ है । जहाँ a , b व c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है ।

त्रिघातीय बहुपद

किसी बहुपद में चर की घात 3 होने पर उस बहुपद को **त्रिघातीय बहुपद** कहते हैं ।

उदाहरण : $5x^3$, $4x^3 + 2x + 1$, $4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

त्रिघातीय बहुपद का व्यापक रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ है। जहाँ a, b, c व d वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है।

बहुपद के शून्यांक -

अब बहुपद $P(x) = 3x + 2$ में का x मान विचार कीजिए।

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

यदि बहुपद $3x + 2$ में x के स्थान पर $\left(\frac{-2}{3}\right)$ रखते है। तब $P(x) = 0$ प्राप्त होता है।

$$P\left(\frac{-2}{3}\right) = 3\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$$

$$= -2 + 2$$

$$= 0$$

क्योंकि $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$ इसलिए $\left(\frac{-2}{3}\right)$ दिये गये बहुपद $(3x + 2)$ का शून्यक कहलाते हैं।

अत: रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक

$$\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(अचर पद)}}{x \text{ का गुणांक}} \text{ है।}$$

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांक में सम्बन्ध -

आप पहले देख चुके हैं कि रैखिक बहुपद $(ax + b)$ का शून्यक $\left(\frac{-b}{a}\right)$ होता है। रैखिक बहुपद के शून्यक की संख्या केवल एक होती है।

इस प्रकार से,

द्विघात बहुपद में $(ax^2 + bx + c)$ शून्यक की संख्या दो होती है। व्यापक रूप यदि α , β द्विघात बहुपद $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हो तो

शून्यकों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

शून्यकों के गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

यहाँ α एवं β युनानी भाषा के अक्षर है। जहाँ $a \neq 0$ है।

उदाहरण : बहुपद $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का शून्यक ज्ञात करें।

हल : बहुपद $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$ बहुपद के गुणनखण्ड करने पर -

$2x^2 - 2x - 6x + 6$

$2x(x-1) - 6(x-1)$

$(2x-6)(x-1)$

तब $x - 1 = 0$, $2x - 6 = 0$ या $x - 3 = 0$ है

जब $x = 1$ या $x = 3$ हो

अत:

$P(1) = 2(1)^2 - 8(1) + 6 = 2 - 8 + 6 = 0$

$P(3) = 2(3)^2 - 8(3) + 6 = 24 - 24 = 0$

अत: $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक 1 व 3 है।

ध्यान दीजिए -

1) शून्यकों का योगफल = $\frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$1 + 3 = \frac{-(-8)}{2}$

$4 = 4$

2) शून्यकों का गुणनफल = $\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

$1 \times 3 = \frac{6}{2}$

$3 = 3$

उदाहरण : (4x + 5) के शून्यक की जाँच कीजिए।

हल : रैखिक बहुपद (ax + b) के साथ तुलना करने पर a = 4, b = 5 है।

हम जानते हैं, रैखिक बहुपद का शून्य $\left(\frac{-b}{a}\right)$ है।

तब, शून्यक $\left(\frac{-5}{4}\right)$ दिये गए बहुपद का शून्यक है।

उदाहरण : 10x + 7 के शून्यक जाँच करें।

हल : रैखिक बहुपद (ax + b) के साथ तुलना करने पर a = 10, b = 7 है।

हम जानते हैं,

रैखिक बहुपद का शून्यक $\left(\frac{-b}{a}\right)$ है।

अत: शून्यक $\left(\frac{-7}{10}\right)$ होता है।

उदाहरण : द्विघात बहुपद समीकरण के शून्यकों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1) $2x^2 + 5x + 3$ 2) $3x^2 + 4x + 7$

1) $(2x^2 + 5x + 3)$

हल : व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर a = 2, b = 5, c = 3

हम जानते हैं,

शून्यकों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2}$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

अत: द्विघात बहुपद में शून्यकों का योगफल $\left(\frac{-5}{2}\right)$ एवं शून्य कों गुणनफल $\left(\frac{3}{2}\right)$ है।

2) $(3x^2 + 4x + 7)$

हल : व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ से तुलना करने पर a= 3 , b= 4 , c = 7

हम जानते हैं,

शून्यकों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{3}$

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$

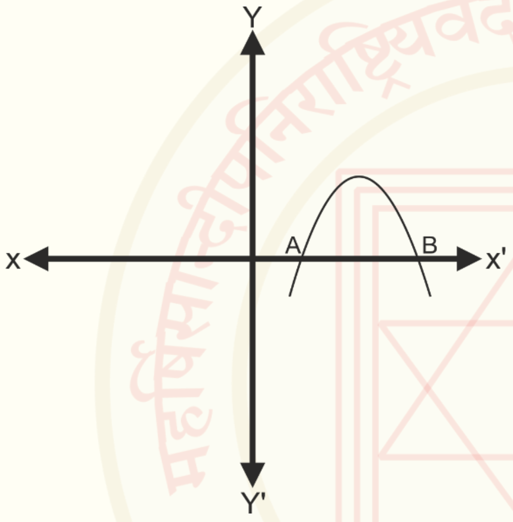
अत: द्विघात बहुपद में शून्यकों का योगफल $\left(\frac{-4}{3}\right)$ एवं शून्यकों गुणनफल $\left(\frac{7}{3}\right)$ है ।

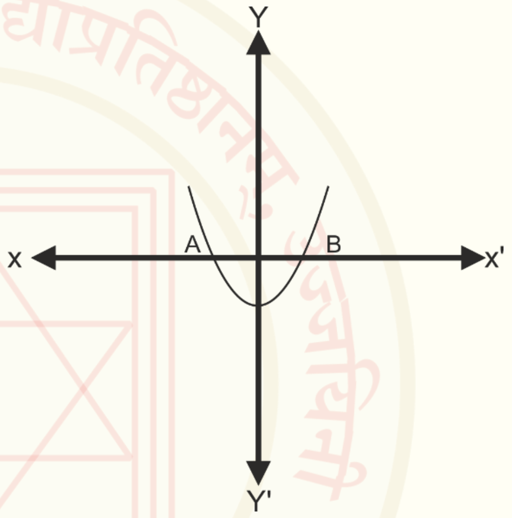
करो और सीखो –

बहुपद $(3x^2 + 4x + 7)$ में शून्यकों का योगफल ज्ञात कीजिए ।

बहुपदों के शून्यकों का ज्यामिति अर्थ

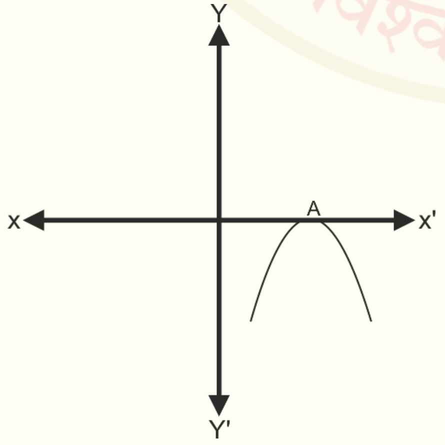
1. यदि x निर्देशाङ्क द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c = 0$ के दो शून्यक हैं । तब,

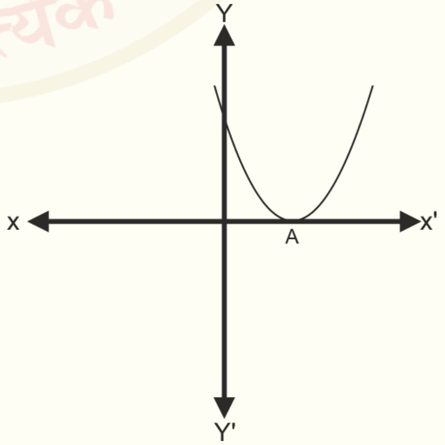




इस स्थिति में ग्राफ x-अक्ष को दो भिन्न-भिन्न बिन्दुओं A और B पर काटता है ।

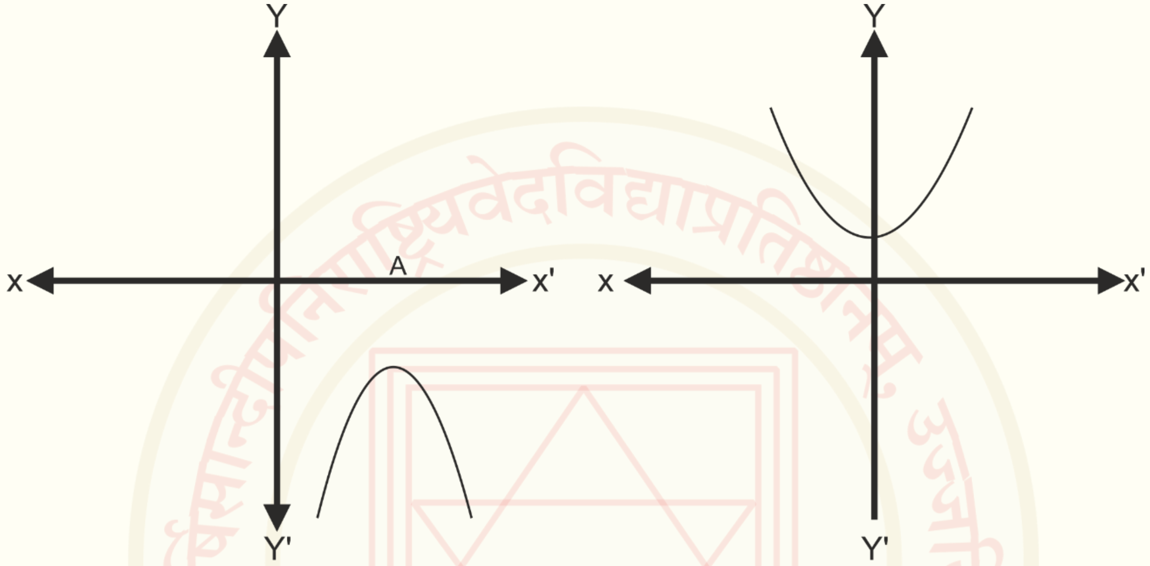
2. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c = 0$ का केवल एक शून्यक हो, तब





इस स्थिति में ग्राफ x-अक्ष को केवल एक बिन्दु A पर स्पर्श करता है ।

3. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c = 0$ का कोई वास्तविक शून्यक नहीं हो, तब



यहाँ ग्राफ या तो पूर्ण रूप से x-अक्ष के ऊपर या पूर्ण रूप से x-अक्ष के नीचे बनता है । यह एक x-अक्ष को कहीं पर नहीं काटता है ।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) एक घात वाला बहुपद कहलाता है ?

(I) रैखिक बहुपद (II) द्विघात बहुपद (III) त्रिघात समीकरण (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) द्विघात बहुपद के शून्यकों की संख्या कितनी होती है ?

(I) 2 (II) 3 (III) 4 (IV) 6

(स) यदि बहुपद $p(x) = x^2 - 2x + 5$ के शून्यक α , β हों , तो $\alpha\beta$ का मान होगा –

(I) 5 (II) – 5 (III) 2 (IV) –2

(द) यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 3x + 5$ के शून्यक α और β हों , तो $4(\alpha + \beta) =$

(I) –12 (II) 12 (III) 20 (IV) –20

(प) यदि बहुपद $x^2 - nx + 5$ के शून्यकों का योग 7 हो , तो n का मान है ?

(I) –1 (II) 7 (III) -5 (IV) 3

(फ) यदि द्विघात बहुपद $P(x) = x^2 - x + 5$ के शून्यक α , β हों , तो $\alpha + \beta$ का मान होगा ?

(I) –1 (II) 5 (III) 1 (IV) 0

(भ) द्विघात बहुपद $4x^2 + 4x + 1$ के शून्यकों का योग होगा –

(I) –1/4 (II) 1 (III) –1 (IV) 1/4

2. रैखिक बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए।

1) $3x + 7$ 2) $5x + 4$ 3) $8x + 5$ 4) $10x - 3$

3. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों का योगफल व शून्यकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1) $5x^2 + 3x + 8$ 2) $3x^2 + 10x + 7$

3) $4x^2 + 7x + 3$ 4) $4x^2 + 9x + 5$

5) $7x^2 + 11x + 4$ 6) $7x^2 + 14x + 2$

बहुपदों के साथ सङ्क्रिया (+, −, ×, ÷)

पूर्व कक्षाओं में आपने बहुपद के योग, अन्तर, गुणा एवं भाग करना सीखा है। आइए, बहुपदों में योग, अन्तर, गुणा व भाग सङ्क्रियाओं को पुनः दोहराते हैं। बहुपदों में योग व अन्तर में एक घात वाले पद साथ रखे जाते हैं, गुणा में पदों की घात योग (जोड़) किया जाता है।

योग (जोड़) –

अव्यक्त राशि के योग एवं अन्तर ज्ञात करने की निम्न विधि बीजगणितम् बताई गयी है।

योगोऽन्तरं तेषु समानजात्यो-र्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च।

(बीजगणितम्, अव्यक्तसंकलनव्यकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्, पृ.20)

अर्थात्, अव्यक्त राशि को प्रकट करने के लिए वर्णों का प्रयोग किया जाता है तथा अव्यक्त राशि के योग एवं अन्तर, समजातीय वर्णों के मध्य होता है, जो पद समजातीय (विभिन्न) नहीं होता है उसकी स्थिति अलग रहती है।

उदाहरण : $5x + 3$ एवं $4x + 2$ का योगफल ज्ञात कीजिये।

हल : $(5x + 3) + (4x + 2)$

$= 5x + 3 + 4x + 2$

$= (5x + 4x) + (3 + 2)$

$= 9x + 5$

उदाहरण : बहुपद $(x^2 + 2x + 3)$ एवं $(x + 4)$ को जोड़िए।

हल : $(x^2 + 2x + 3) + (x + 4)$

$= x^2 + 2x + 3 + x + 4$

$= \quad x^2 + (2x + x) + (3 + 4)$

$= \quad x^2 + 3x + 7$

व्यवकलन (अन्तर) -

उदाहरण : बहुपद $(2x^2 + 5x + 4)$ में $(x^2 - x - 2)$ को घटाइये।

हल : $(2x^2 + 5x + 4) - (x^2 - x - 2)$

$= \quad 2x^2 + 5x + 4 - x^2 + x + 2$

चुंकि : $-(-a) = a$

$= (2x^2 - x^2) + (5x + x) + (4 + 2)$

$= \quad x^2 + 6x + 6$

गुणन (गुणा) -

उदाहरण : $(x + 5)$ में $(x - 7)$ का गुणा कीजिए।

हल : $(x + 5) . (x - 7)$

$= \quad x (x - 7) + 5 (x - 7)$

$= \quad x^2 - 7x + 5x - 35$

$= \quad x^2 - 2x - 35$

ध्यान रखें : बहुपदों के योग एवं अन्तर में समान पद एक साथ रखे जाते हैं तथा गुणा में समान पदों की घात जुड़ जाती है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न बहुपद को हल करें ।

   अ) $(7x + 3) + (4x + 4)$

   ब) बहुपद $(4x + 9)$ व $(3x + 3)$ को जोड़िए ।

   स) बहुपद $(3x^2 + 2x - 3)$ में से $(x^2 - 3x - 4)$ को घटाइये ।

   द) बहुपद $(2x^2 + 3x + 5)$ में से $(x^2 + x + 2)$ को घटाइये ।

2. बहुपदों को गुणा करें -

   अ) $(4x + 5)$ में $(2x + 3)$ का गुणा कीजिए ।

   ब) $(4x^2 + 2x)$ में $(x + 3)$ का गुणा कीजिए ।

भाग (विभाजन):

बीजगणितम् के (भागहारे करणसूत्रं) में निम्न श्लोक में बहुपद के विभाजन से सम्बन्धित निम्न श्लोक मिलता है ।

भाज्याच्छेदः शुध्ययति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥

(बीजगणितम्, भागहारे करणसूत्रं वृत्तम्, पृ. 38)

भाग विधि में "भाज्याध्दर शुद्धयति" इस नियम के अनुसार भाग विधि स्पष्ट है । जब अव्यक्त राशि के विभाजन में भाज्य में से भाजक को घटाने पर जिससे शेष ना रहे इसलिए भाजक में जिस - जिस राशि या रूप का गुणा किया जाता है । वह राशि या रूप भागफल के रूप में प्राप्त होता है । हम बहुपदों के भाग भी कर सकते हैं । भाग करते समय पदों व उनकि घात का हिसाब कैसे रखेंगे ? यह सब सोचने से पहले यह देखे की हमे बहुपदों के भाग की आवश्यकता कब होती है ?

नीचे की परिस्थिति को देखें ।

उदाहरण : एक कार 4 घण्टे में x कि.मी. दूरी तय करती है । कार की चाल ज्ञात कीजिए ?

हल : एक कार द्वारा चली गई दूरी = 4 कि.मी.

तथा इस दूरी को तय करने में लगा समय = 4 घण्टे

सङ्केत –

चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

चूंकि,

चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

चाल = $\frac{x}{4}$ $\frac{\text{कि.मी.}}{\text{घण्टे}}$

यह भाग सरल है क्योंकि एक पद वाले बहुपद ने एक पद वाले स्थिरांक बहुपद (संख्या) भाग है ।

उदाहरण : बहुपद $18x^2 + 9x$ को 3x से भाग दीजिए ।

हल : बहुपद $18x^2 + 9x$ को 3x से भाग करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं ।

$$= \frac{18x^2}{3x} + \frac{9x}{3x}$$

$$= \frac{18x.x}{3x} + \frac{3x}{x}$$

$$= 6x + 3$$

कई पद वाले बहुपद को एक पदीय बहुपद से भाग करने में हम हर पद का अलग-अलग कर सकते हैं। बहुपद $(18x^2 + 9x)$ को गुणनखण्ड करते हुए 3x भाग दीजिए ।

$(18x^2 + 9x)$ से 3x भाग करने को निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं ।

$$= \frac{18x^2 + 9x}{3x}$$

$$= \frac{9x\,(2x+1)}{3x}$$

$$= 3\,(2x + 1)$$

$$= 6x + 3$$

एक अन्य उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण : बहुपद $(4x^4 + 12x^2)$ का गुणनखण्ड करते हुए $4x^2$ से भाग दीजिए।

हल : भाग के लिए निम्नलिखित रूप में लिखिए।

$$= \frac{4x^4+12x^2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2(x^2+3)}{4x^2}$$

$$= x^2 + 3$$

गुणनखण्ड करके भाग करने में हम कई बार गुणनखण्ड को नहीं पहचान पाते हैं। ऐसी परिस्थितियों में हम भाग की दीर्घ भाजन विधि का प्रयोग करते हैं।

अङ्क गणित में आप जानते है कि 25 को 4 से भाग करने का अर्थ है।

$$= \frac{25}{4} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{अंश} \\ \leftarrow \text{हर} \end{matrix}$$

भाज्य

4) 25 (6 भागफल

भाजक   − 24

1 शेषफल

यहाँ $25 = 4 \times 6 + 1$

अर्थात्, **भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल**

इस तरफ भाजक से भाज्य को भाग देने पर भागफल एवं शेषफल मिलेगा यदि भाग पूरा-पूरा हो जाए तो शेषफल शून्य आ जाता है।

उदाहरण : बहुपद $(2x^2 + 5x - 3)$ को बहुपद $(x - 2)$ से भाग दीजिए ।

हल:

भाजक	भाज्य	भागफल
$x - 2$	$2x^2 + 5x - 3$	$2x + 9$
	$_{-}2x^2 \;_{+}{-}\; 4x$	
	$9x - 3$	
	$_{-}9x \;_{+}{-}\; 18$	
	15	
	शेषफल	

यहाँ हमें भागफल = $(2x + 9)$ और शेषफल = 15 प्राप्त हुआ ।

सङ्केत –

बहुपद में बहुपद के भाग विधि के चरण -

चरण 1 – भाज्य एवं भाजक को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखेंगे ।

चरण 2 – भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देंगे ।

यहाँ $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$

यह भागफल का पहला पद होगा ।

चरण 3 – इस भागफल से भाजक का गुणा करेंगे और गुणनफल को भाज्य से घटाये ।

$$2x(x - 2) = 2x^2 - 4x$$

$$= (2x^2 + 5x - 3) - (2x^2 - 4x)$$

$$= 2x^2 + 5x - 3 - 2x^2 + 4x$$

$$= 9x - 3$$

चरण 4 – घटाने पर प्राप्त परिणाम के पद पद को भाजक के प्रथम पद से भाग करेंगे ।

$= \frac{9x}{x} = 9$ यह भाग का दूसरा पद होगा ।

चरण 5 – पुन: इस भागफल का गुणा भाजक के साथ गुणा करेंगे ।

अर्थात्, $9\,(x-2)$

$= 9x - 18$

अब $9x - 3$ में से $9x - 18$ को घटाइये ।

$= (9x - 3) - (9x - 18)$

$= 9x - 3 - 9x + 18$

$= 9x - 9x - 3 + 18$

$= 15$

यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तक की शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात भाजक के चर की घात से कम न हो जाए, इस उदाहरण में शेषफल 15 है । जिससे चर की घात $(x - 2)$ के चर की घात कम है ।

इस भाग का संक्षिप्त प्रतिरूप है ।

$$(2x^2 + 5x - 3) = (x - 2)\,(2x + 9) + 5$$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

उदाहरण : बहुपद $(2x^3 - 12x^2 + 5x - 11)$ को बहुपद $(x - 5)$ से भाग दीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{c|l|l}
x - 5 & 2x^3 - 12x^2 + 5x - 11 & 2x^2 - 2x - 5 \\
 & \underline{\underset{-}{}2x^3 \underset{+}{-} 10x^2} & \\
 & -2x^2 + 5x \quad - 11 & \\
 & \underline{\underset{+}{-}2x^2 \underset{-}{+} 10x} & \\
 & \qquad -5x - 11 & \\
 & \qquad \underline{\underset{+}{-}5x \underset{-}{+} 25} & \\
 & \qquad\qquad -36 &
\end{array}
$$

इस प्रकार, $(2x^3 - 12x^2 + 5x - 11)$ को $(x - 5)$ से भाग देने पर भागफल $(2x^2 - 2x - 5)$ और शेषफल (-36) प्राप्त होता है एवं हम इसे निम्न रुप में लिख सकते हैं।

$$(2x^3 - 12x^2 + 5x - 11) = (x - 5) \times (2x^2 - 2x - 5) + (-36)$$

(अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल)

बहुपदों में भाग के लिये एक अन्य वैदिक विधि :

बहुपदों में भाजन कि क्रिया हेतु हम वैदिक गणित के सूत्र **'परावर्त्य योजयेत्'** से संख्याओं में भाग की तरह बहुपदों के भाग भी सुगमता से किये जा सकते हैं। आइए, निम्न उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण: $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1)$ को $(x - 2)$ से भाग दीजिए ?

हल: सर्वप्रथम संशोधित भाजक क निर्माण करें जिसे अचर पद का चिह्न बदल कर ज्ञात करते हैं।

$$(x^4 + 2x^3 - 3x + x - 1) \quad \div \quad (x - 2)$$

भाज्य	भाजक
$X^4 + 2x^3 - 3x + x - 1$	$X - 2$

भाजक	x – 2	+1	+2	-3	+1	–1
संशोधित भाजक	+2		+2	+8	+10	+22
		+1	+4	+5	+11	+21

चरण 1. सर्वप्रथम संशोधित भाजक का निर्माण करें जिसे अचर पद का चिह्न बदल कर ज्ञात करते हैं।

चरण 2. भाज्य के गुणांक चिह्न सहित लिखें।

चरण 3. संशोधित भाजक (+2) है जिसमें एक अङ्क है इसलिए भाज्य को इकाई की ओर से एक अङ्क छोड़कर खड़ी रेखा (विभाजन रेखा) खींचेंगे। यहाँ –1 के बायें विभाजन रेखा खींचेंगे।

चरण 4. भाज्य का बायाँ प्रथम अङ्क भागफल का प्रथम अङ्क है। नीचे भागफल में लिखें।

चरण 5. इस प्रथम अङ्क का गुणा संशोधित भाजक से कर गुणनफल को भाज्य के बायें से द्वितीय अङ्क के नीचे लिखेंगे।

चरण 6.

$$\begin{array}{r} +2 \\ \underline{+2} \\ +4 \end{array}$$

यह भागफल का द्वितीय अङ्क है। इस +4 का गुणा संशोधित भाजक +2 से करेंगे तथा अगले अङ्क के नीचे लिखेंगे। $(+4) \times (+2) = 8$ को –3 के नीचे लिखेंगे।

चरण 7. अब $-3 + 8 = 5$ भागफल में नीचे लिखेंगे ।

चरण 8. $(+5) \times (+2) = +10$ अगले अङ्क $+1$ के नीचे लिखेंगे ।

दोनों का जोड़ $+1 + 10 = +11$ नीचे भागफल में लिखेंगे ।

चरण 9. $+11 \times (+2) = 22$ को विभाजन रेखा बाद -1 के नीचे लिखेंगे ।

अब $-1 + 22 = 21$

चरण 10. दोनों खड़ी रेखाओं के बीच का हिस्सा भागफल को निरूपित करता है ।

अर्थात् $+1$, 14, $+5$, $+11$ भागफल के गुणांक है ।

अत : $x^3 + 4x^2 + 5x + 11$ भागफल प्राप्त होता है ।

चरण 11. विभाजन रेखा के बाद शेषफल 21 है ।

उत्तर की जाँच :-

भाज्य के गुणांकों का बीजाङ्क = भाजक के गुणांकों का बीजाङ्क × भागफल के गुणांकों का बीजाङ्क + शेषफल का बीजाङ्क

यहाँ बायाँ पक्ष $= 1 + 2 - 3 + 1 - 1 = 0$

एवं दायाँ पक्ष $= (-1 \times 3) + 3$

$0 = -3 + 3$

$0 = 0$

अत : बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत : भागफल की पुष्टि होती है ।

उदाहरण: बहुपद $(4x^3 - 5x - 9)$ को$(2x + 1)$ से भाग दीजिए ?

हल :- यहाँ भाजक : $2x + 1$

भाज्य : $4x^3 - 5x - 9$

भाज्य के घात को घटते क्रम में लिखने पर : $4x^3 + 0x^2 - 5x - 9$

भाजक $(2x + 1)$ में 2 का भाग देकर x का गुणांक 1 कर लेंगे क्योंकि इस विधि में भाजक में चर की अधिकतम घात वाले पद का गुणांक 1 (एक) होना चाहिए ।

अतः $\frac{2\times+1}{2} = x + \frac{1}{2}$

नया भाजक $x + \frac{1}{2} x + 2$, भाज्य के गुणांक चिह्न सहित घात के घटते क्रम में

भाजक	$x + \frac{1}{2}$	+4	+0	−5	−9
संशोधित भाजक	$-\frac{1}{2}$		−2	+1	+2
		+4	−2	−4	−7

चरण 1. संशोधित भाजक का निर्माण करें ।

चरण 2. भागफल का प्रथम अङ्क + 4

चरण 3. संशोधित भाजक × भागफल का प्रथम अङ्क

$-\frac{1}{2} \times 4 = -2$ को शून्य के नीचे लिखेंगे ।

चरण 4. $+0 - 2 = -2$ भागफल का द्वितीय अङ्क

चरण 5. $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$ को अगले बायें अङ्क -5 के नीचे लिखेंगे ।

चरण 6. $-5 + 1 = -4$ भागफल का तीसरा अङ्क

चरण 7. संशोधित भाजक × भागफल का तीसरा अङ्क

$-\frac{1}{2} \times (-4) =$ का विभाजन रेखा के बाद -9 के नीचे लिखेंगे ।

चरण8. $-9 + 2 = -7$ शेषफल है ।

चरण 9. $+4, -2, -4$ भागफल में 2 का भाग देंगे क्योंकि भाजक में 2 का भाग दिया है । अत : $+2, -1, -2$ द्वारा भागफल प्राप्त होगा ।

अर्थात् $\frac{1}{2}(+4 -2 -4) = 2 - 1 - 2$

अत : भागफल $2x^2 - x - 2$ होगा एवं शेषफल -7 होगा ।

प्रश्नावली 3.3

भाग कीजिए।

1. $(x^2 - x + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
2. $(6x^2 - 5x + 1)$ को $(2x - 1)$ से भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।
3. बहुपद $(2x^2 + 3x + 1)$ को $(x + 2)$ से भाग दीजिए।
4. बहुपद $(x^3 - 4x^2 + 7x + 10)$ को $(x - 1)$ से भाग दीजिए।
5. बहुपद $(3x^2 + x^2 + 2x + 5)$ को $(x^2 + 2x + 1)$ से भाग दीजिए।
6. सिद्ध कीजिए कि बहुपद $(2x^3 + x^2 - 5x + 2)$ को$(x + 2)$ से भाग करने पर शेषफल शून्य है।

हमने सीखा –

1) बहुपद में चर की उच्चतम घात 1, 2 और 3 होने पर क्रमश: रैखिक बहुपद , द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं ।

2) एक द्विघात बहुपद व्यापक रूप से $ax^2 + bx + c$ है जहाँ a, b व c वास्तविक संख्या है और $a \neq 0$ है।

3) एक द्विघात बहुपद में अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं ।

4) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α व β हो तो -

$$\textbf{शून्यकों का योगफल } (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$$

$$\textbf{शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\, \beta) = \frac{c}{a}$$

5) बहुपदों में भाग की प्रक्रिया अङ्कगणित से थोड़ी अलग है । इसमें चर की घात का ध्यान रखना होता है ।

6) बहुपदों का भाग करने के लिए भाज्य एवं भाजक की घातों को अवरोही क्रम में लिखते हैं।

7) बहुपदों में भाग करने के लिए दीर्घ विभाजन विधि का उपयोग करते हैं ।

8) दीर्घ भाजन विधि में भाग की प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं जब तब की शेषफल शून्य न हो जाए या शेषफल के चर की घात, भाजक के चर की घात से कम न हो जाए ।

भाग का संक्षिप्त प्रतिरूप –

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अध्याय - 4

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

प्राचीन काल में बीज गणित में अनेक चर वाले समीकरण का विस्तार से अध्ययन किया गया था । उस समय के गणितज्ञ यथा – ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य आदि ने समीकरण के हल प्रदान किए थें । महान गणितज्ञ भास्कराचार्य द्वितीय ने कहा है -

पूर्वं प्रोक्तं व्यक्तमव्यक्तबीजं प्रश्ना नो विनाऽव्यक्तयुक्त्या ।

ज्ञातुं शक्या मन्धीभिर्नितान्तं यस्मात्तस्माद्वच्मि बीजक्रियां च ॥

(बीजगणितम् , मङ्गलाचरण: 3)

अर्थात् , वे लोग जो व्यक्त गणित (अङ्कगणित) की सहायता से जो प्रश्न हल नहीं कर पाते हैं, वे प्रश्न अव्यक्त गणित (बीजगणित) की सहायता से हल कर सकते हैं । दूसरे शब्दों में बीजगणित से अङ्कगणित की कठिन समस्याओं का हल सरल हो जाता है ।

पूर्व कक्षा में हम एक चर वाले समीकरण -

जैसे : $a\,x + b = c$

↑ चर

जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ है और $a \neq 0$ इससे आप परिचित हो चुके हैं ।

अत: याद करने हेतु पुनरावलोकन करें -

जिन राशियों का मान दी गई शर्तों के अनुसार बदलता रहता है । **चर राशि** कहलाती है ।

$x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

$x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$

यहाँ दोनों समीकरणों में x के अलग-अलग मान है पहले समीकरण $x = 2$ तथा दूसरे समीकरण में $x = 3$, अत: x चर है ।

अब हम दो राशियों के रैखिक समीकरण का अध्ययन करेंगे साथ ही वैदिक विधियों द्वारा समीकरण को हल करना सीखेंगे ।

मान x एवं y दो चर है । इनके द्वारा बनाया गया समीकरण $ax + by = c$

जहाँ a, b एवं c वास्तविक संख्या है एवं $a \neq 0$ तथा $b \neq 0$ हैं ।

दो चरों वाला रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें चर x और y की अधिकतम घात (एक) है एवं दो चरों से मिलकर बना समीकरण है । ऐसे समीकरण के हल से हमारा अभिप्राय x और y मानों से होता है जो समीकरण के दोनों पक्षों में बराबर कर दें ।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के युग्म को **युगपत समीकरण** कहते है ।

उदाहरण : निम्न समीकरण को हल कीजिये ।

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + 2y = 3$$

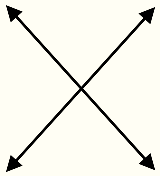
दो चर x और y वाले समीकरण एक निकाय है । रैखिक युगपत समीकरण के व्यापक निकाय रूप में

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

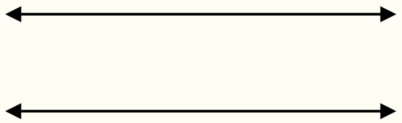
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 व c_2 सभी वास्तविक संख्याएँ और a_1, b_1 एवं a_2, b_2 कोई भी शून्य नहीं है, ये दोनों रैखिक समीकरण उन्हीं दो चरों x एवं y में है । इस प्रकार दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म कहते हैं । दो चरों वाले समीकरण का युग्म ज्यामिति रूप में निम्न प्रकार से आलेखीय होगा। यदि एक तल में दो रेखाएँ हैं, तो निम्न से से केवल एक ही सम्भावना हो सकती है :

1. दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं ।



2. दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, अर्थात वे समान्तर हैं ।



3. दोनों रेखाएँ सम्पाती हैं ।

मान कि दो चरों में रैखिक समीकरण का एक युग्म है:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ तब,

क्रमांक	अनुपातों की तुलना	आलेखिय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती है ।	केवल एक हल(अद्वितीय)
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे के सम्पाती होती है ।	अनन्त हल (अपरिमित)
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	रेखाएँ एक-दूसरे के समान्तर होती है ।	कोई हल नहीं

जब किसी रैखिक समीकरण के युग्म का कोई हल अनन्त या अद्वितीय है, तो निकाय संगत होता है और जब निकाय का कोई हल नहीं होता है तब कह सकते हैं कि निकाय असंगत है ।

उदाहरण : निम्नलिखित समीकरणों को दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म के व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करके निकाय के हल एवं आलेखीय निरूपण कि जाँच करें ।

1. रैखिक समीकरण $2x + 3y - 10 = 0$ तथा $4x + 6y - 20 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = -10$ तथा $a_2 = 4$, $b_2 = 6$, $c_2 = -20$ तब,

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{(-10)}{(-20)}$$

या $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

अर्थात् दो चरों रैखिक समीकरण युग्म का अपरिमित रूप से अनन्त हल होंगे तथा रेखाएँ सम्पाती होगी।

2. रैखिक समीकरण $2x + 7y + 5 = 0$ तथा $4x + 3y + 5 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 2$, $b_1 = 7$, $c_1 = 5$ तथा $a_2 = 4$, $b_2 = 3$, $c_2 = 5$ तब,

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\frac{2}{4} \neq \frac{7}{3}$$

अर्थात् निकाय की रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद् करेगी तथा समीकरण का युग्म केवल एक ही हल अद्वितीय होगा ।

3. रैखिक समीकरण $5x + 2y + 4 = 0$ तथा $15x + 6y + 16 = 0$

हल: व्यापक रूप ($a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$) से तुलना करने पर -

$a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $c_1 = 4$ तथा $a_2 = 15$, $b_2 = 6$, $c_2 = 16$ तब,

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\frac{5}{15} = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{16}$$

या $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$

अर्थात् दो चरों रैखिक समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा तथा रेखाएँ समान्तर होगी।

दो राशियों के रैखिक समीकरण का बीजीय हल –

प्रतिस्थापन विधि -

निम्नलिखित समीकरणों को समीकरण हल कीजिए।

उदाहरण : हल करें।

$$2x - y = 3$$

$$4x - y = 5$$

हल : $2x - y = 3$ ....(1)

$4x - y = 5$ ....(2)

समीकरण (1) से

$$2x - y = 3$$

$2x - 3 = y$ ....(3)

समी (3) से y के मान के समीकरण (2) में रखने पर

$$4x - (2x - 3) = 5$$

$$4x - 2x + 3 = 5$$

$$2x + 3 = 5$$

$$2x = 5 - 3$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

x के इसी मान को समीकरण (3) में रखने पर

$$y = 2 \times 1 - 3$$

$y = 2 - 3$

$\boxed{y = -1}$

अत: $x = 1$ और $y = -1$ समीकरण के हल है

$x = 1 \;,\;\; y = -1$

वैदिक विधि द्वारा युगपत समीकरण का हल –

कल्प्यते अ$_1$ या + व$_1$ का + र$_1$ नी = 0 तथा

अ$_2$ या + व$_2$ का + र$_2$ नी = 0 तदा

$$\frac{\text{या}}{\text{व}_1\text{र}_2 - \text{व}_2\text{र}_1} = \frac{\text{का}}{\text{र}_1\text{अ}_2 - \text{र}_2\text{अ}_1} = \frac{\text{नी}}{\text{अ}_1\text{व}_2 - \text{अ}_2\text{व}_1}$$

(बीजगणितम् , वज्राभ्यासगुणानरीतिः , पृ. 219)

वैदिक सूत्र – ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र इस वैदिक गणित के सूत्र का अर्थ है 'आड़ा-तिरछा' इस सूत्र का प्रयोग कर हम युगपत समीकरण हल करना का बहुत ही कम गणना के साथ आसानी से हल प्राप्त कर सकते हैं ।

माना रैखिक युगपत समीकरण के व्यापक निकाय

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

इन्हें हल करने पर x और y का मान प्राप्त होता है ।

तब उर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से

$$X = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$Y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

उदाहरण : दिये गये निकाय में x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।

$5x + 2y + 6 = 0$

$7x + 4y + 3 = 0$

हल : दो चरों वाले रैखिक समीकरण के व्यापक समीकरण रूप से तुलना करने पर यहाँ समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ से तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर -

$a_1 = 5 ,\ b_1 = 2 , c_1 = 6$

$a_2 = 7 ,\ b_2 = 4 , c_2 = 3$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{2\times2 - 4\times6}{5\times4 - 7\times2} = \frac{6-24}{20-14} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{6\times7-5\times3}{5\times4-7\times2} = \frac{42-15}{20-14} = \frac{27}{6} \text{ या } \frac{9}{2}$$

उदाहरण : दिये गये निकाय में x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।

$2x + 3y + 6 = 0$ ....(1)

$5x + 4y + 2 = 0$ ....(2)

हल : दो चरों वाले रैखिक समीकरण के व्यापक समीकरण रूप से तुलना करने पर यहाँ समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ से तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर -

$a_1 = 2 ,\ b_1 = 3 , c_1 = 6$

$a_2 = 5 ,\ b_2 = 4 , c_2 = 2$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{3\times2 - 6\times4}{2\times4 - 5\times3} = \frac{6-24}{8-15} = \frac{-18}{-7}$$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{5\times6-2\times2}{2\times4-5\times3} = \frac{30-4}{8-15} = \frac{26}{-7}$$

अतः $x = \frac{-18}{-7}$ या $\frac{18}{7}$ तथा $y = \frac{26}{-7}$ या $\frac{-26}{7}$ है।

वैदिक गणित की परावर्त्य विधि –

दो चरों को एक घातीय युगपत समीकरणों को हल करने के लिए परावर्त्य सूत्र का प्रयोग करते हैं । परावर्त्य नियम द्वारा मन ही मन गणना कर उत्तर दिया जा सकता है । प्रश्न हल करने के लिए चक्रिय नियम का उपयोग किया जाता है । परावर्त्य सूत्र से चक्रिय नियम का उपयोग करते हुए समीकरण निकाय को निम्नानुसार हल करते हैं ।

यदि समीकरणों का व्यापक रूप निम्न हैं तब,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

तब x के मान के लिए –

1. y के गुणांक तथा स्वतन्त्र पद से आरम्भ कर पुरोगामी तिर्यक् गुणन (ऊपर की पङ्क्ति से शुरूकर नीचे वाले से तिर्यक् गुणा करते है तथा दो तिर्यक् गुणनफलों के मध्य सम्बन्ध चिह्न सदा ऋण (-) होता है और इस तरह -

   x का मान व्यापक रूप से

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

   x का अंश का मान प्राप्त होता है ।

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{\text{हर}}$$

1. x के मान का हर प्राप्त करने के लिए हम y के गुणांक से प्रारम्भ कर प्रतिगामी तिर्यक् गुणन अर्थात् ऊपर की पङ्क्ति में दाहिने से शुरू कर नीचे की पङ्क्ति के x गुणांक तक करते हैं ।

$$x \text{ का हर} = \frac{\text{अंश}}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

अतः, $$x = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

y के मान के लिए –

चक्रिय नियम का पालन करते हैं, अर्थात् ऊपर की पङ्क्ति के स्वतन्त्र पद से शुरू कर नीचे की पङ्क्ति के x गुणांक से गुणा करते हैं। इस प्रकार,

$$y \text{ के लिए अंश} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{\text{हर}}$$

हर वहीं रहता है। जो x के लिए

अत:,
$$y = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

उदाहरण : परावर्त्य सूत्र से हल कीजिए।

$$5x + 3y + 11 = 0$$

$$6x + 5y + 9 \;\; = 0$$

हल : दो चरों वाले रैखिक समीकरण के व्यापक समीकरण रूप से तुलना करने पर यहाँ समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ से तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर -

x का मान ज्ञात करने के लिए अंश हेतु के तथा स्वतन्त्र पदों के तिर्यक् गुणन से और हर y तथा x के गुणांक के तिर्यक् गुणन से प्राप्त होगा।

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$x = \frac{3\times9 - 5\times11}{5\times5 - 6\times3} = \frac{27-55}{25-18} = \frac{-28}{7} = -4$$

y का मान के लिए अंश हेतु स्वतन्त्र पद तथा x के गुणांक का तिर्यक् गुणा करेंगे तथा हर वहीं रहता है। अत:

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{11\times6 - 9\times5}{5\times5 - 6\times3} = \frac{66-45}{25-18} = \frac{21}{7} = 3$$

अत: x एवं y का मान क्रमश: $x = -4$ एवं $y = 3$ है।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) युगपत समीकरण $2x + 3y = 5, 4x + 6y = 9$ के निकाय का हल होगा -

I) असंगत II) अद्वितीय हल

III) अपरिमित रूप से अनन्त हल IV) इनमें कोई नहीं

(ब) दो रैखिक समीकरणों के आलेखीय प्रतिच्छेदी रेखाएँ है, तब रैखिक समीकरण युग्म का हल :

I) कोई हल नहीं है II) अद्वितीय हल है

III) दो हल है IV) अनन्त हल है

(स) दो रैखिक समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाएँ हो तब रैखिक समीकरण युग्म का हल :

I) कोई हल नहीं है II) एक हल है

III) दो हल है IV) अनन्त हल है

(द) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ निकाय का हल :

I) कोई हल नहीं है II) एक अद्वितीय हल है

III) अनन्त हल है IV) इनमें से कोई नहीं

(प) समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का अद्वितीय हल होगा, जब

I) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ II) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$

III) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ IV) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(फ) जब दो चर वाले समीकरणों का आलेख सम्पाती होता है तब उनके हल होंगे -

I) एक II) दो III) तीन IV) अनन्त

(भ) यदि दो रैखिक समीकरणों के हल अनन्त हों, तो उनके आलेख होंगे -

I) दो समान्तर रेखाएँ	II) दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ

III) दो सम्पाती रेखाएँ	IV) इनमें से कोई नहीं

2. निम्न निकायों के परावर्त्य विधि से हल ज्ञात कीजिए।

1) $x + y = 7$
$3x - 2y = 1$

2) $4m + 2n = 1$
$3m + 2n = 2$

3) $7x + 11y = 1$
$8x + 13y = 3$

4) $p + q = 1$
$p + 2q = 1$

5) $2x + y = 5$
$3x - 4y = 2$

6) $m + 2n = 3$
$3m + n = 4$

7) $x + y = 5$
$8x - 3y = 1$

हमने सीखा –

1) दो चरों वाली रैखिक समीकरण युग्म समीकरण को निकाय कहते हैं ।

2) समीकरण के निकाय का व्यापक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ है ।

3) दो चर राशियों के रैखिक समीकरण का बीजीय हल को वैदिक सूत्र परावर्त्य से हल करने पर -

x के मान के लिए $= \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{\text{अंश प्राप्ति हेतु } y \text{ के गुणांक एवं स्वतन्त्र पदों का तिर्यक् गुणा का अन्तर}}{\text{हर प्राप्ति हेतु } y \text{ के गुणांक और } x \text{ के गुणांको के तिर्यक् गुणा का अन्तर}}$

व्यापक रूप में $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

y के मान के लिए $= \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{\text{अंश प्राप्ति हेतु स्वतन्त्र पद एवं } x \text{ स्वतन्त्र पदों का तिर्यक् गुणा का अन्तर}}{\text{हर प्राप्ति हेतु } y \text{ के गुणांक और } x \text{ के गुणांको के तिर्यक् गुणा का अन्तर}}$

व्यापक रूप में $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

अध्याय - 5

द्विघात समीकरण

प्यारे बटुकों ! प्राचीन काल में गणित में द्विघात समीकरण के हल के लिए अङ्कगणित विधि से अनेक विस्तृत नियम बताए गए है, भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त जी द्वारा लिखित ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त के निम्न श्लोक में द्विघात समीकरण की अव्यक्त राशि का मान ज्ञात करने का उल्लेख मिलता है ।

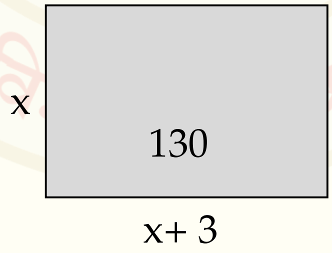
वर्गाहतरूपाणाम् अव्यक्तार्धकृतिसंयुतानां यत् ।

पदमव्यक्तार्धोनं तद्वर्गविभक्तमव्यक्तः ।।

(ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त,कुट्टकाध्याय : 45)

अर्थात्, व्यक्त राशि (c) के साथ अव्यक्त राशि के गुणांक (b) के आधे के वर्ग अर्थात् $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ को जोड़िए । इसके वर्गमूल में अव्यक्त राशि के गुणांक के आधे $\left(\frac{b}{2}\right)$ को घटाइए । पुन: अज्ञात राशि के गुणांक (a) से भाग दीजिए इससे अव्यक्त राशि का मान प्राप्त होता है ।

वास्तविक जीवन से सम्बन्धित कई समस्याओं को हल करने में हम द्विघात समीकरण का प्रयोग करते हैं । माना एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 मीटर अधिक है । यदि कमरे का फर्श का क्षेत्रफल 130 वर्ग मीटर है, तो कमरे की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात करें ।



कमरे का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$130 = (x+3) \times x$$

$$130 = x^2 + 3x$$

आइये, उपर्युक्त समीकरण पर विचार करते हैं । इस समीकरण में x अज्ञात राशि है और x की अधिकतम घात 2 है । अत: इसे **वर्ग समीकरण** कहते हैं । ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए हम इस अध्याय में ऐसे वर्ग समीकरणों की चर्चा करेंगे जिन्हें द्विघात समीकरण कहते हैं ।

द्विघात समीकरण –

वह समीकरण जिसमें अज्ञात राशि की अधिकतम 'घात 2' हो **द्विघात समीकरण** कहलाता है।

द्विघात समीकरण का व्यापक रूप -

$$ax^2 + bx + c = 0$$

जहाँ a, b एवं c वास्तविक संख्या है । जहाँ $a \neq 0$

किसी भी द्विघात समीकरण को हल करने पर हमें हल के रूप में चर राशि के दो मान प्राप्त होते हैं । जिन्हें हम उस वर्ग समीकरण के मूल कहते हैं एवं उन्हें हम α और β द्वारा प्रदर्शित करते हैं ।

द्विघात समीकरण को हल करने विधि -

सूत्र विधि (श्रीधराचार्य विधि)

श्रीधराचार्य का संक्षिप्त परिचय एवं उनका सूत्र -

श्रीधराचार्य का जन्म 750 ई. (लगभग) में हुआ था । गणित के क्षेत्र में श्रीधराचार्य के ग्रन्थ अत्यन्त मूल्यवान है । उन्होनें ऐसे अनेक सूत्र प्रदान किये हैं । जो इनसे पहले अज्ञात थे । इनके दो ग्रन्थ उपलब्ध है –

1) पाटीगणित **2) त्रिशतिका**

वर्ग समीकरण को हल करने की श्रीधराचार्य की विधि को वर्तमान युग में द्विघात पूरक पद्धति के नाम से जाना जाता है ।

चतुराहतवर्गसमैरूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥

(बीजगणितम् , एकवर्णमध्यमाहरण, 4, पृ. 315)

माना कि वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ है दोनों पक्षों को 4a से गुणा करने पर

तथा 4ac का पक्षान्तर करने पर

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a\,(ax^2 + bx + c) = 4a\,(0)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

दोनों पक्षों में b^2 को जोड़ने पर

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

इसे सरल करने पर

श्रीधराचार्य सूत्र : $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

जो कि द्विघात समीकरण के वास्तविक मूल हैं इन मूलों को α और β में प्रदर्शित करते हैं ।

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

श्रीधराचार्य के ग्रन्थ ऐसे आलोक स्तम्भ की भाँति रहे हैं, जिनके प्रकाश में से परवर्ती विद्वानों ने अपनी रचनाएँ प्रस्तुत कीं । ब्रह्मगुप्त (628 ई.) से भास्कराचार्य (1105 ई.) के मध्य श्रीधराचार्य (750 ई.) थे ।

ध्यान रखें :

द्विघात समीकरण के मूलों को हम इसके विविक्तकर(Discriminant) से पहचान सकते हैं ।

द्विघात समीकरण का विविक्तकर $= \sqrt{b^2 - 4ac}$

1. जब $b^2 - 4ac$ का मान धनात्मक हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β का मान वास्तविक और अलग-अलग प्राप्त होता है ।

2. जब $b^2 - 4ac = 0$ हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β का मान वास्तविक और समान प्राप्त होता है ।

3. $b^2 - 4ac < 0$ का मान जब शून्य से कम हो, तब द्विघात समीकरण के दोनों मूल α एवं β के मान वास्तविक नहीं होते हैं ।

उदाहरण : समीकरण $2x^2 + 3x - 2 = 0$ को सूत्र विधि (श्रीधराचार्य सूत्र) द्वारा हल कीजिए ।

हल : $2x^2 + 3x - 2 = 0$

इसकी तुलना द्विघात समीकरण के व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 2 , b = 3 , c = -2$$

हम जानते हैं कि श्रीधराचार्य सूत्र -

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-3 + 5}{4}$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-3-5}{4}$$

$$x = \frac{-8}{4}$$

$$x = -2$$

अत: $x = -2, \frac{1}{2}$ समीकरण के हल है ।

उदाहरण : समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$ सूत्र विधि से हल कीजिए ।

हल : इसकी तुलना द्विघात समीकरण के व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 3, b = -5, c = 2$$

हम जानते हैं कि श्रीधराचार्य सूत्र –

$$\mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर -

$$x = \frac{5+1}{6}$$

$$x = \frac{6}{6}$$

$$x = 1$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर-

$$x = \frac{5-1}{6}$$

$$x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

अतः $x = 1, \frac{2}{3}$ समीकरण के हल है ।

उदाहरण - निम्न समीकरण की द्विघात समीकरण के व्यापक रूप $(ax^2 + bx + c = 0)$ से तुलना कर a, b व c का मान ज्ञात कीजिये ।

1) $x^2 + 3x + 4 = 0$

हम जानते हैं कि द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 1 , b = 3 , c = 4$$

2) $5x^2 - 4x - 7 = 0$

हम जानते हैं कि द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 5 , b = -4 , c = -7$$

3) $x^2 - 9x + 4 = 0$

हम जानते हैं कि द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 1 , b = -9 , c = 4$$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) किसी द्विघात समीकरण के विविक्तकर का मान शून्य से बड़ा होने पर दोनों मूल होंगे-

(I) वास्तविक और भिन्न (II) वास्तविक और समान

(III) अवास्तविक और भिन्न (IV) अवास्तविक और समान

(ब) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान होंगे , यदि –

(I) $b^2 = 4ac$ (II) $ac = 0$

(III) $b^2 + 4ac = 0$ (IV) $b^2 + ac = 0$

(स) द्विघात समीकरण $bx^2 + ax + c = 0$ का विविक्तकर होगा –

(I) $b^2 - 4ac$ (II) $a^2 - 4bc$

(III) $c^2 - 4ab$ (IV) $b^2 - 2ac$

(स) द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का हल है –

(I) $-1, -2$ (II) $-5, -1$ (III) $-3, -2$ (IV) $-1, 5$

(द) द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ का विविक्तकर बराबर है –

(I) 2 (II) -3 (III) 1 (IV) 3

2. निम्नलिखित समीकरणों की तुलना द्विघात समीकरण के व्यापक रूप

($ax^2 + bx + c = 0$) से तुलना कर a, b, c का मान बताइयें -

अ) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ ब) $-x^2 - x + 4 = 0$

स) $-x^2 + 8x + 9 = 0$ द) $-3x^2 - 4x - 5 = 0$

फ) $x^2 + 5x - 7 = 0$

3. सूत्र विधि (श्रीधराचार्य सूत्र) द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

$$\left[\text{सङ्केत : } \mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

अ) $x^2 - 5x - 6 = 0$

ब) $x^2 - 4x + 3 = 0$

स) $x^2 - 3x + 2 = 0$

4. श्रीधराचार्य सूत्र लिखिए।

5. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण है।

अ) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

ब) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

स) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

द) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

हमने सीखा –

1) समीकरण जिसमें चर की अधिकतम घात दो हो, **द्विघात समीकरण** कहलाता है ।

2) चर x में एक द्विघात समीकरण का व्यापक रूप $ax^2 + bx + c = 0$

जहाँ a, b व c वास्तविक संख्याएँ है और $a \neq 0$

3) **श्रीधराचार्य सूत्र :**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के हल करने पदों दो (मूल) हल प्राप्त होते हैं, जो क्रमशः यदि समीकरण के मूलों α और β से प्रदर्शित करते हैं ।

तब,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

अध्याय - 6

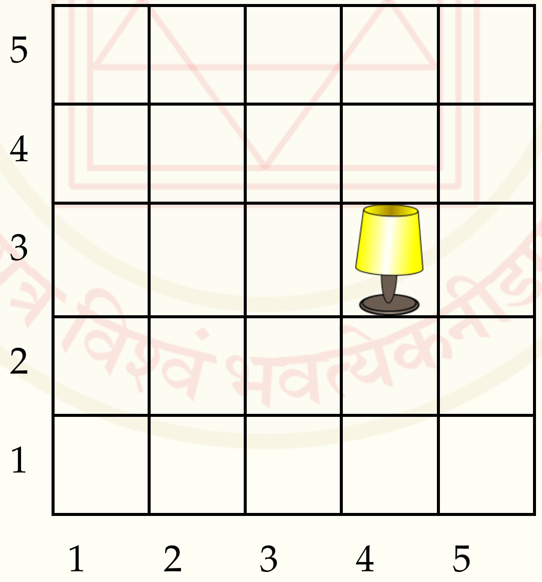
निर्देशाङ्क ज्यामिति

प्रिय बटुको ! निर्देशाङ्क ज्यामिति एक बीजीय साधन है । जिनके द्वारा आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है । निर्देशाङ्क ज्यामिति हमें बीजगणित का उपयोग आकृतियों को समझने में सहायता करता है । यही कारण है कि निर्देशाङ्क ज्यामिति का विभिन्न क्षेत्रों में भौतिकी, इंजीनियरिंग, समुद्री परिवहन, भूकम्प शास्त्र आदि में व्यापक उपयोग होता हैं ।

आइए, उदाहरण से हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए ।

गतिविधि (क्रियाकलाप) –

एक मेंज के ऊपर (सपाट क्षेत्र) पर वर्ग के आकृतियों के रूप में डिजाइन बना हुआ है । इसे मेंज पर एक लेम्प रखा हुआ है । लेम्प मेंज एक दी आकृति की डिजाइन में एक वर्ग में रखा है ।



बटुकों! यदि आप मेंज पर रखे लेम्प की ठीक-ठीक स्थिति का निर्धारण निम्नलिखित दो सूचनाओं की सहायता से किया जाता है ।

1) वह स्तम्भ जिसमें वह लेम्प रखा है ।

2) वह पङ्क्ति जिसमें वह लेम्प रखा है ।

यदि आप उस लेम्प की स्थिति को देखते हैं, जो चौथे स्तम्भ और तीसरी पङ्क्ति में है । जिसे छायांकित वर्ग में दिखाया गया है । यहाँ लेम्प की स्थिति को (4, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । जहाँ पहली संख्या स्तम्भ का प्रकट करती है तथा दूसरी संख्या पङ्क्ति को प्रकट करती है ।

क्या यह स्थिति (3, 4) है ?

आराध्य – यह वह स्थिति नहीं है क्योकि (4 , 3) में 4 स्तम्भ और 3 पङ्क्ति को दर्शाता है । जबकि (3, 4) में अलग है यहाँ 3 स्तम्भ का 4 पङ्क्ति है जो विपरीत है ।

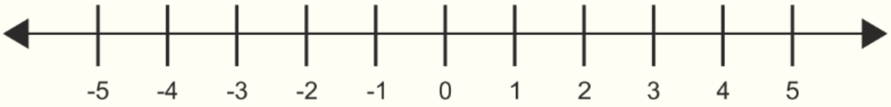
गुरुजी – बिल्कुल सही । बहुत खुब आराध्य

यदि लेम्प पाञ्चवे स्तम्भ और दूसरी पङ्क्ति में रखा होता तो उसके लिए (5, 2) लिखते हैं । क्या आप बता सकते हैं ? यदि लैम्प तीसरे स्तम्भ और पाञ्चवे पङ्क्ति में रखा हुआ हो, तो हम इसे कैसे लिखते हैं ? मेंज और लैम्प की इस गतिविधि के सम्बन्ध में हमें स्तम्भ और पङ्क्ति की संख्या को जानना आवश्यक होता है । इस सरल विचारधारा से दुरगामी परिणाम होते हैं जिसे गणित की अति महत्त्वपूर्ण शाखा " **निर्देशाङ्क ज्यामिति** " नाम से जाना जाता है ।

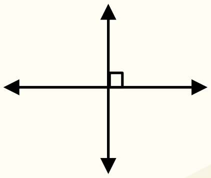
इस अध्याय में हम निर्देशाङ्क ज्यामिति का विस्तार से चर्चा करते हैं ।

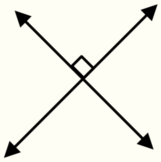
कार्तिय निर्देशाङ्क –

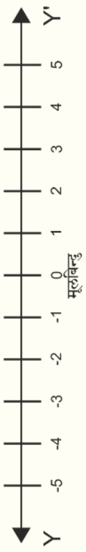
बटुकों ! आपने पूर्व की कक्षा में संख्या रेखा के बारे में पढ़ चुके हैं। संख्या रेखा पर नियत बिन्दुओं से दूरी को बराबर एकाकों में एक दिशा में धनात्मक तथा दूसरी दिशा में ऋणात्मक अङ्क अङ्कित किए जाते हैं । जिस बिन्दु से धनात्मक या ऋणात्मक अङ्क को निरूपित किया जाता है । वह बिन्दु **मूलबिन्दु** कहलाता है ।

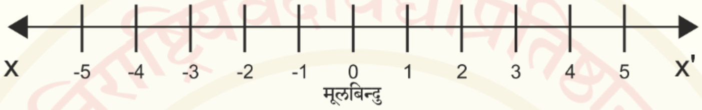


दकार्ते ने दो संख्याओं के एक-दूसरे पर लम्ब होने पर उनके सापेक्ष तल में बिन्दुओं का स्थान निर्धारण का विचार प्रस्तुत किया है ।





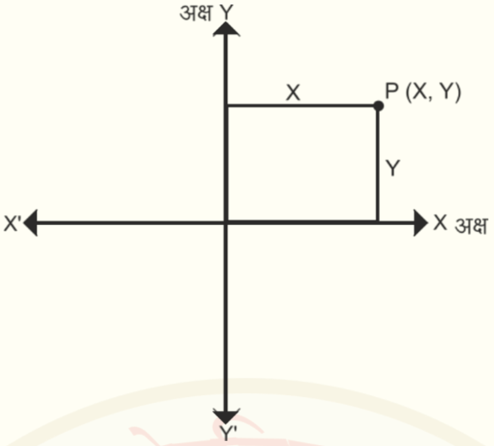




दो संख्या रेखाएँ जिनका नाम xx′ तथा yy′ दीजिए । xx′ संख्या रेखा को क्षैतिज रेखा तथा yy′ संख्या रेखा को ऊर्ध्वाधर रेखा में रखिए ।

दोनों संख्या रेखाओं में अन्तर यह है कि xx′ क्षैतिज रेखा तथा yy′ ऊर्ध्वाधर रेखा है क्षैतिज रेखा xx′ को x अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा yy′ को y अक्ष कहा जाता है । जहाँ दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को मूलबिन्दु पर काटती है जिसे O से प्रकट किया जाता है ।

निर्देशाङ्क अक्षों का एक युग्म हमें समतल तल पर किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने के योग्य बनाता है ।



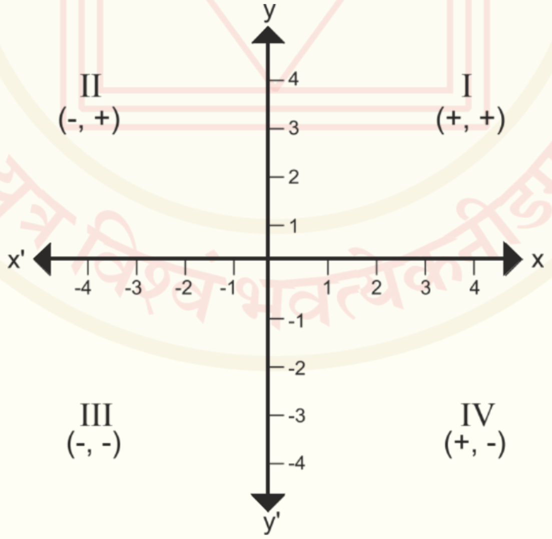
तल में किसी बिन्दु की y अक्ष से दूरी x के निर्देशाङ्क या भुज कहलाता है तथा किसी बिन्दु की x अक्ष की दूरी उस बिन्दु का y निर्देशाङ्क या कोटि कहलाता है ।

यदि (3 , 4) निर्देशाङ्क है तो

(x) भुज (y) कोटि

x के निर्देशाङ्क को 'भुज' एवं y के निर्देशाङ्क 'कोटि' भी कहा जाता है ।

चतुर्थांश निर्देशाङ्क के चिह्न –



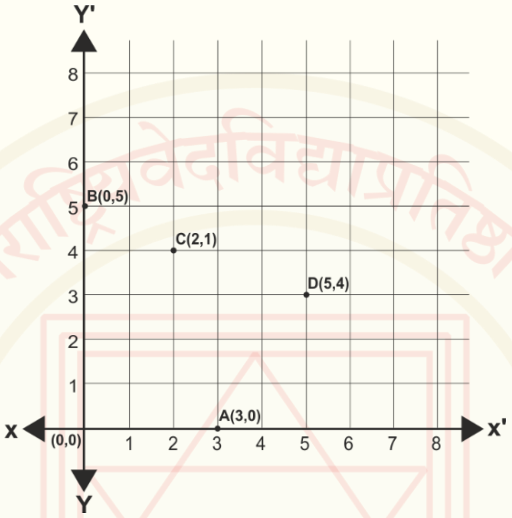
4. x अक्ष के ऊपर निर्देशाङ्क धनात्मक (+) तथा x अक्ष के नीचे निर्देशाङ्क ऋणात्मक होता है ।

इसी प्रकार,

5. y अक्ष के दायें के निर्देशाङ्क धनात्मक (+) तथा y अक्ष के बायें के निर्देशाङ्क ऋणात्मक (-) माने जाते हैं ।

निर्देशाङ्क के कुछ उदाहरण –

दिये गये ग्राफ में –



1) बिन्दु 0 तल का मूल बिन्दु है, किसी तल के मूल बिन्दु का निर्देशाङ्क (0, 0) होता है । इसका अर्थ यह है, कि मूल बिन्दु का x अक्ष से दूरी = 0 तथा इस मूल बिन्दु की y अक्ष से दूरी = 0 है।

2) दिए गए A बिन्दु के x अक्ष पर है, अत: बिन्दु A के निर्देशाङ्क = (3, 0) है । इसका अर्थ है, कि बिन्दु A का x अक्ष पर मूल बिन्दु से दूरी = 3 तथा इस बिन्दु की y अक्ष का मूलबिन्दु से दूरी = 0 है ।

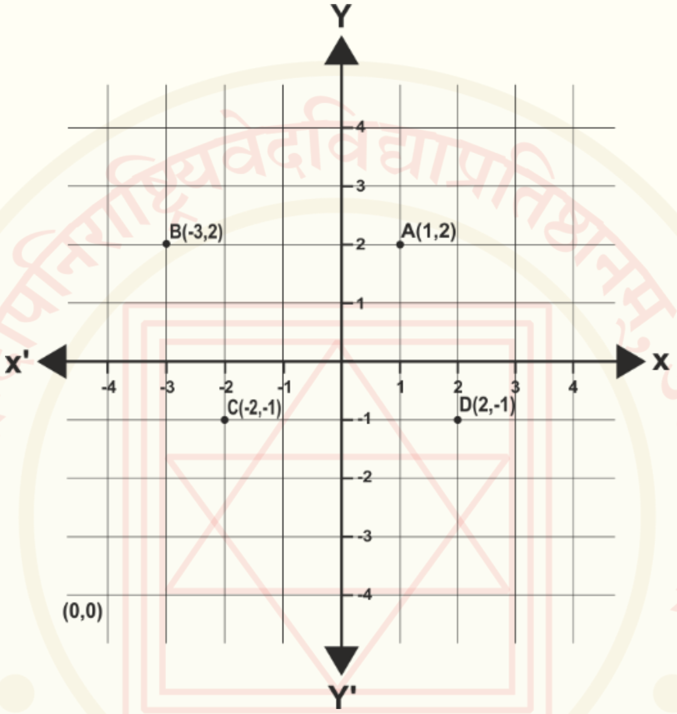
3) बिन्दु B, y अक्ष पर स्थित है । अत: बिन्दु B के निर्देशाङ्क = (0, 5) हैं । इसका अर्थ है, कि बिन्दु B की मूलबिन्दु से दूरी x अक्ष पर दूरी = 0 तथा y अक्ष पर दूरी = 5 हैं ।

4) बिन्दु C का निर्देशाङ्क = (2, 4) है । इसका अर्थ है, कि बिन्दु C की मूल बिन्दु से x अक्ष पर दूरी = 2 तथा y अक्ष पर दूरी = 4 है ।

5) बिन्दु D के निर्देशाङ्क (5, 4) है । इसका अर्थ है, कि बिन्दु D को मूल बिन्दु से x अक्ष पर दूरी = 5 तथा y अक्ष पर दूरी = 4 है ।

धनात्मक तथा ऋणात्मक निर्देशाङ्क -

उदाहरण : आइए, निम्न ग्राफ से समझते हैं ।



उपर्युक्त दिये ग्राफ में A, B, C व D के निर्देशाङ्क स्थित है ।

1) निर्देशाङ्क बिन्दु A = (1, 2) हैं ।इसका अर्थ है, कि इसकी स्थिति y अक्ष के दायीं और 1 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के ऊपर 2 मात्रक की दूरी पर निश्चित है ।

2) निर्देशाङ्क बिन्दु B = (−3, 2) हैं । इसका अर्थ है, कि बिन्दु B के y अक्ष के बायीं और 3 मात्रक की दूरी तथा x के ऊपर 2 मात्रक की दूरी पर है ।

3) निर्देशाङ्क बिन्दु C = (−2, −1) हैं । इसका अर्थ है, कि C बिन्दु y अक्ष के बायीं और 2 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के नीचे 1 मात्रक की दूरी पर है ।

4) निर्देशाङ्क बिन्दु D = (2, −1) हैं। इसका अर्थ है, कि y अक्ष की दायीं और 2 मात्रक की दूरी पर तथा x अक्ष के नीचे 1 मात्रक की दूरी पर स्थित है।

याद रखें –

आप किसी भी निर्देशाङ्क बिन्दु को देखकर ही बता सकते हैं कि यह बिन्दु चतुर्थांश में स्थित है।

उदाहरण : निर्देशाङ्क बिन्दु P (x , y)

↑ भुज ↑ कोटि

एक निर्देशाङ्क बिन्दु भुज एवं कोटि से मिलकर बनता है।

1) प्रथम चतुर्थांश में भुज एवं कोटि दोनों धनात्मक होते हैं। अत: निर्देशाङ्क (+, +)

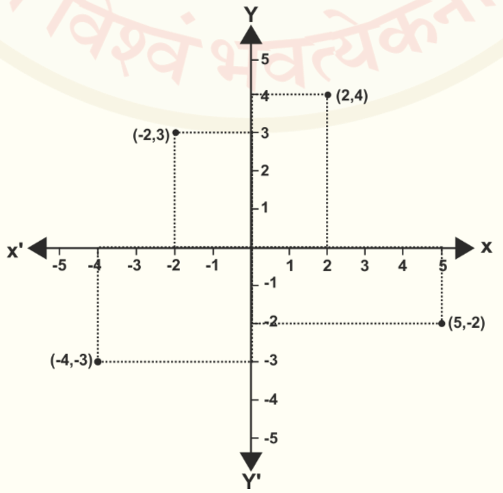
2) द्वितीय चतुर्थांश में भुज ऋणात्मक एवं कोटि धनात्मक होते हैं। अत: निर्देशाङ्क (−, +)

3) तृतीय निर्देशाङ्क में भुज एवं कोटि दोनों ऋणात्मक होते हैं। अत: निर्देशाङ्क (−, −)

4) चतुर्थ चतुर्थांश में भुज व धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक होता है। अत: निर्देशाङ्क (+ , −) है।

उदाहरण : आयतीय निर्देशाङ्क निकाय में बिन्दु (2, 4) , (−2, 3) , (−4, −3) एवं (5, −2) को आलेखित कीजिए।

हल :

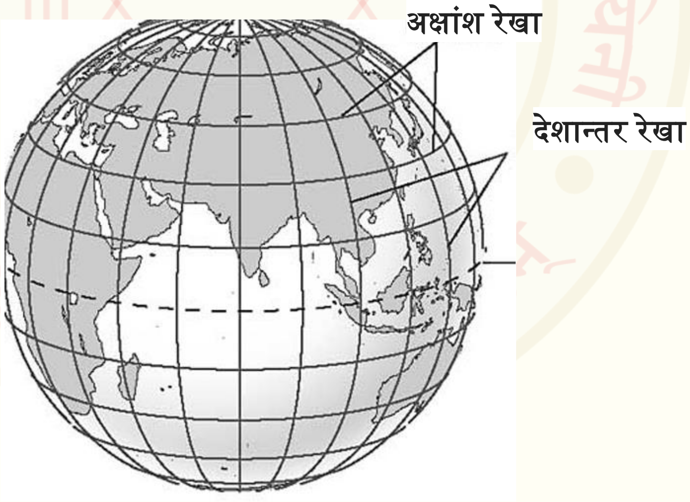


आकृति xox' व yoy' आयतीय निर्देशाङ्क खींचते हैं और दिए गए बिन्दुओं (2 , 4) , (−2 , 3) , (−4 , −3) एवं (5 , −2) को चिह्नित करते हैं ।

करो और सीखो -

निर्देशाङ्क के (2 , 5) , (2 , 3) एवं (−1 , 3) को ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए ।

वेद पाठियों ! जिस प्रकार ग्राफ पेपर पर किसी बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करते हैं । ठीक उसी प्रकार, हमारी पृथिवी पर अक्षांश व देशांतर रेखाएँ भी ग्राफ के समान दिखाई देती है। जिससे हम पृथिवी किसी भी स्थिति का निर्धारण कर सकते हैं। क्या आप पृथिवी पर भारत की अक्षांश एवं देशांतर स्थिति को जानते हैं ? भारत की अक्षांश स्थिति मुख्य भूमि 8°4′ से लेकर 37°6′ उत्तर अक्षांश के बीच एवं देशांतरीय विस्तार 68°7′ पूर्व देशांतर से 97°25′ पूर्व देशांतर के मध्य स्थित है।



वाह ! क्या बात हैं । यह पूरे ग्राफ की तरह है, जिसमें हमने भारत की स्थिति का पता किया है ।

करो और सीखो –

आप भी अपने राज्य का अक्षांश व देशान्तर स्थिति को जाने और नीचे लिखें ।

राज्य का नाम ....

अक्षांश स्थिति ....

देशान्तर स्थिति ....

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) बिन्दु (– 8, 6) किस चतुर्थांश में स्थित है ?

(I) प्रथम (II) द्वितीय (III) तृतीय (IV) चतुर्थ

(ब) दो अक्षों के प्रतिच्छेदी बिन्दु को कहते हैं?

(I) निर्देशाङ्क (II) मूलबिन्दु (III) निर्देशाङ्क अक्ष (IV) इनमें से कोई नहीं

(स) मूलबिन्दु के निर्देशाङ्क क्या होते हैं ?

(I) (1 ,1) (II) (0 , 1) (III) (0, 0) (IV) (1, 0)

(द) बिन्दु (6 , 10) की कोटि है ?

(I) 6 (II) 10 (III) – 4 (IV) 16

(प) y- अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशाङ्क किस रूप के होते हैं ?

(I) (0 , 0) (II) (1 ,1) (III) (x , 0) (IV) (0, y)

(फ) किसी बिन्दु की y- अक्ष से दूरी उस बिन्दु का कहलाता है ?

(I) x – निर्देशाङ्क (भुज) (II) y – निर्देशाङ्क (भुज) (III) y- अक्ष (IV) कोटि

(भ) किसी निर्देशाङ्क बिन्दु का भुज धनात्मक होगा ?

(I) प्रथम चतुर्थांश (II) चतुर्थ चतुर्थांश

(III) प्रथम एवं चतुर्थ चतुर्थांश (IV) केवल द्वितीय चतुर्थांश

(म) x -अक्ष पर किसी बिन्दु का y- निर्देशाङ्क कितना होता है ?

(I) 1 (II) 0 (III) -1 (IV) इनमें से कोई नहीं

2. निम्नलिखित निर्देशाङ्क बिन्दु की चतुर्थांश में स्थित है बताइये ।

अ) (2, 4) ब) (−3, 4) स) (– 2,– 2) द) (3, −4)

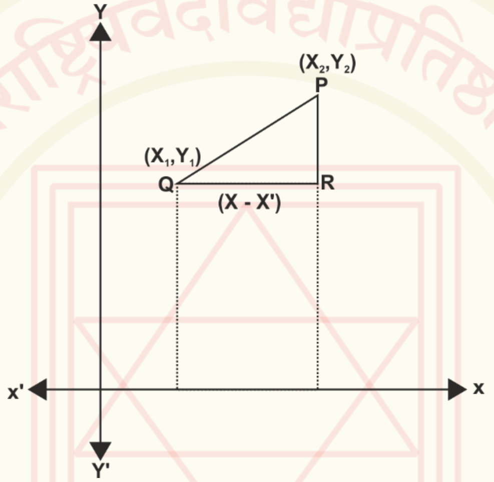
3. आयतीय निर्देशाङ्क निकाय में बिन्दु (2, 4) , (3, 7) , (−4, −2) एवं (4 ,−2) को आलेखित कीजिए ।

4. प्रथम चतुर्थांश में बिन्दु (1, 2) , (1, 3) , (1, 4) एवं (– 2,– 4)को आलेखित कीजिए ।

5. द्वितीय चतुर्थांश में बिन्दु (−1, 2) , (−1, 3) एवं (−1, 4) को आलेखित कीजिए ।

6. ग्राफ पेपर बिन्दु (3, 4) , (1, 2) एवं (−1, 2) को निर्धारित कीजिए ।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी –



अत: समकोण त्रिभुज POR में से बौधायन सूत्र से

P(x_1, y_1) और Q(x_2,y_2)(दो बिन्दुओं) के बीच की दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

या

दूरी = $\sqrt{(\textbf{x}\text{ अक्ष के निर्देशाङ्कों का अन्तर})^2 + (\textbf{y}\text{ अक्ष के निर्देशाङ्कों का अन्तर})^2}$

जो कि दो बिन्दुओं के बीच की **दूरी का सूत्र** है ।

उदाहरण : बिन्दुओं (2, 3) और (5, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना बिन्दु (2, 3) और (5, 6) क्रमश: PQ है । अत: इनके बीच की दूरी

PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

= $\sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$

P (2 , 3) और Q (5 , 6)
↑ ↑ ↑ ↑
x_1 y_1 x_2 y_2

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9 + 9}$

$= \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

उदाहरण : बिन्दुओं (−2, 3) एव (−4, 5) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिन्दु P (−2 , 3) और Q (−4 , 5) है। अत: इनके बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (5 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) किसी बिन्दु की x- अक्ष से दूरी क्या कहलाती है ?

(I) भुज (II) अक्ष (III) आलेख (IV) कोटि

(ब) y- अक्ष से बिन्दु (3 , 5) की दूरी होगी ?

(I) 5 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(स) बिन्दुओं (8 , 3) एवं (4,0) के बीच की दूरी होगी-

(I) 5 इकाई (II) 2 इकाई (III) 3 इकाई (IV) 4 इकाई

(द) वह बिन्दु जो अक्ष की y-ऋणात्मक दिशा में y-अक्ष पर 4 मात्रक दूरी पर स्थित है, वह बिन्दु होगा-

(I) (0 , 4) (II) (0 , - 4) (III) (- 4 , 0) (IV) (4 , 0)

(प) वह बिन्दु जो अक्ष की y -धनात्मक दिशा में x -अक्ष पर 3 मात्रक दूरी पर स्थित है, वह बिन्दु होगा -

(I) (0 , 3) (II) (0 , - 3) (III) (- 3 , 0) (IV) (3 , 0)

(फ) वह बिन्दु जो अक्ष की x-ऋणात्मक दिशा में x -अक्ष पर 6 मात्रक दूरी पर स्थित है, वह बिन्दु होगा -

(I) (0 , 6) (II) (0 , - 6) (III) (- 6 , 0) (IV) (6 , 0)

(भ) वह बिन्दु जो अक्ष की x-धनात्मक दिशा में x -अक्ष पर 6 मात्रक दूरी पर स्थित है, वह बिन्दु होगा -

(I) (0 , 6) (II) (0 , - 6) (III) (- 6 , 0) (IV) (6 , 0)

2. निम्नलिखित दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

अ) A (3, 4) , B (5, 6)

ब) P (3, 4) , Q (6, 7)

स) P (1, 2) , Q (3, 4)

हमने सीखा –

अ) निर्देशाङ्क के तल को **तल** कहा जाता है और रेखाओं के निर्देशाङ्क **अक्ष** कहा जाता है ।

ब) एक आयतीय निर्देशाङ्क चार चतुर्थांश में विभाजित होता है । चतुर्थांश निर्देशाङ्क चिह्न

प्रथम चतुर्थांश में (+, +) के रूप में,

द्वितीय चतुर्थांश में (–, +) के रूप में,

तीसरे चतुर्थांश में (–, –) के रूप में

तथा चतुर्थ चतुर्थांश में (+,–) के रूप में होते हैं ।

यहाँ + एवं – चिह्न (धनात्मक व ऋणात्मक) एक वास्तविक संख्या को प्रदर्शित करता है ।

स) मूल बिन्दू के निर्देशाङ्क (0, 0) होते है । y अक्ष के किसी बिन्दु के दूरी को उसका x निर्देशाङ्क **भुज** कहा जाता है । साथ ही x अक्ष के किसी बिन्दु के दूरी को उसका y निर्देशाङ्क **कोटि** कहा जाता है ।

p (x , y)
↑ ↑
भुज कोटि

द) **दो बिन्दुओं के बीच की दुरी –**

यदि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ है तब, दुरी =

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

अध्याय - 7

वैदिक गणित

प्रस्तावना –

प्यारे वेदपाठियों ! वैदिक गणित का परिचय स्वामी भारतीकृष्ण तीर्थ जी महाराज ने कठोर तपस्या की, साधना के उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होनें वेदग्रन्थों में उल्लिखित गणितीय सूत्रों का अन्त: दर्शन किया और साक्षात्कार की अनुभूति को मन्त्रों 'सूत्रों' के रूप में प्रकट किया, इन वैदिक सूत्रों को वैदिक विद्वानों ने अपौरुषेय कहा । क्योंकि इसे किसी मनुष्य ने विचार कर नहीं बनाया । वेदों का ज्ञान केवल चिन्तन से प्राप्त ज्ञान नहीं है वरन् यह साक्षात् की उच्चतम अवस्था में होने वाले साक्षात्कार की अनुभूति मन्त्रों के रूप में प्रकटीकरण है । इस प्रकार स्वामी जी द्वारा बनाये गये सूत्र को **वैदिक गणितीय सूत्र** कहते हैं ।

वैदिक गणित का महत्त्व –

गणितीय गणना का हल ज्ञात करने में जब वैदिक सूत्रों का निरन्तर मौखिक अभ्यास किया जाता है, तो बच्चों की एकाग्रता व स्मृति का विकास होता है और उनके चिन्तन मनन में प्रखरता आती है । वैदिक गणित के सरलता और रोचकता के कारण गणित में रुचि बढ़ती है । जो विद्यार्थियों के व्यक्तित्व और मस्तिष्क के विकास का आधार बनती है ।

गणितीय मूल सङ्क्रियाओं का अभ्यास –

1) योग सङ्क्रिया –

पिछली कक्षाओं में हमने एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा संख्याओं का योग ज्ञात करने का अभ्यास किया था । आइए, सूत्र एकाधिकेन पूर्वण द्वारा मापक (मुद्रा, दूरी, तौल, धारिता) के योगफल ज्ञात करें ।

उदाहरण : योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल :	**कि.ग्रा.**		**ग्राम**
	1 1 2	.	0 6 5
	3 6 0	.	$\dot{0}\,\dot{7}\,8$
+	$\dot{2}\,\dot{8}\,\dot{9}$	.	$\dot{8}\,7\,2$
	7 6 2	.	0 1 5

सङ्केत –

1) 65 ग्राम को 065 एवं 85 ग्राम 085 ग्राम लिखा ।
2) इकाई स्तम्भ ऊपर से योग प्रारम्भ करते हैं ।
3) 5 + 8 = 13 अत: 8 के पूर्व अङ्क 7 पर एकाधिक का चिह्न शेष 13 – 10 = 3
4) शेष 3 को नीचे अङ्क में जोड़ में हुए ऊपर के स्थान पर नीचे लिखें ($\dot{7}$ = 8)

इसी प्रकार प्रक्रिया आगे करें ।

ध्यान रहे - संख्या को स्तम्भ रचना पूरी करने के बाद सूत्र द्वारा पूर्ण संख्याओं के भाँति योग कर दीजिए ।

उदाहरण : निम्न योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल :	**कि.मी.**		**मीटर**
	1 3	.	7 8
	$7\,\dot{2}$	.	$\dot{2}\,8$
+	$\dot{3}\,9$	.	1 2
	1 2 5	.	1 8

व्यवकलन (अन्तर) –

पिछली कक्षाओं में हमने घटाव के दो वैदिक सूत्रों से अभ्यास किया था ।

1) एकाधिकेन पूर्वेण + परममित्र अङ्क पर आधारित विधि

2) एकन्यून पूर्वेण + परममित्र अङ्क पर आधारित विधि

अत: इस विधि पर पुन: विचार किजिए आपको स्मरण होगा **किन्हीं दो अङ्क एक-दूसरे के परममित्र अङ्क होते हैं।** यदि दोनों अङ्क का योग 10 हो।

घटाव में -

	5	→ वियोज्य
−	2	→ वियोजक
	3	→ शेष

उदाहरण : वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 8\,7\,2 \\ -\ \dot{1}\,\dot{8}\,9 \\ \hline \boxed{6\,8\,3} \end{array}$$

सङ्केत -

1) 2 में से 9 नहीं ही घटता है। इसलिए अत: 9 का परममित्र अङ्क 1 को 2 में जोडा जाता है। योग 3 को उत्तर के स्थान में नीचे लिखा जाता है।

2) 7 में से 9 ($\dot{8}$ = 9) नहीं घटता है अत: 9 का परममित्र अङ्क 1 को 7 में जोड़ने पर 8 को उत्तर में नीचे के स्थान में लिखा $\dot{8}$ के पूर्व अङ्क 1 पर एकाधिकेन का चिह्न लगाए।

3) 8 में से 2 ($\dot{1}$ = 2) को घटाया।

उदाहरण : वैदिक विधि से घटाइए।

हल :

	कि.मी.	**मीटर**	**से.मी.**
	37	128	25
−	$\dot{1}\dot{8}$	$\dot{2}7\dot{1}$	$\dot{4}6$
	18	856	79

गुणन सङ्क्रिया –

गुणन सङ्क्रिया का हमने पिछली कक्षाओं में अभ्यास किया था। फिर पुन: अभ्यास दोहरातें है। इन सूत्रों का इतना अभ्यास करना चाहिए, कि गुणन सङ्क्रिया का कोई प्रश्न देखते ही शीघ्र हल देने वाले श्रेष्ठ सूत्र का चयन कर सके। देखिए, निम्न उदाहरण है।

उदाहरण : गुणा करें।

हल : 588

× 512

दी गई संख्याओं के गुणन के लिए सरलता से गुणफल देने वाले सूत्र का चयन करें।

6. 'अन्त्ययोर्शतकेऽपि' सूत्र से गुणा –

1) यह सूत्र वहाँ प्रयोग किया जाता है,जहाँ गुणा के जाने वाली संख्या के अन्तिम दो अङ्क (इकाई और दहाई) के अङ्कों का योग 100 है शेष अङ्क समान है।

2) अन्तिम दो अङ्कों का गुणा कर गुणनफल के दायें पक्ष में लिखे। ध्यान रहें – **दायें पक्ष में चार अङ्कों की संख्या होना चाहिए। अङ्क कम होने पूर्व में शून्य** लगाए।

3) बायें पक्ष में उसके एकाधिकेन से गुणा कर बायाँ पक्ष में लिखे।

गुणा करें - 588 × 512

100

588

× 512

5 × 6 / 88 × 12

30 / 1056 = 301056

सङ्केत -

1) इकाई दहाई के अङ्कों का योग 88 + 12 = 100 है। आगे अङ्क समान है। तब,

2) बायाँ पक्ष = 5 × (5 का एकाधिकेन)

= 5 × 6 = 30

3) दायाँ पक्ष = 88 × 12 = 1056 (चार अङ्क है)

बायाँ पक्ष / दायाँ पक्ष

(अत: 5 × 6 / 88 × 12 = 301056 है।)

7. ‘आनुरूप्येण’ सूत्र के द्वारा गुणा -

गुणा करें - 588×512

$$\begin{array}{rrr} & 5\,8\,8 & +8\,8 \\ \times & 5\,1\,2 & +1\,2 \\ \hline \end{array}$$

$(588 + 12)\ /\ 88 \times 12$

$600 \times 5\ /\ 1056$

$3000\ /\ 1056$

$+10$

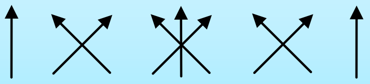
$= 301056$

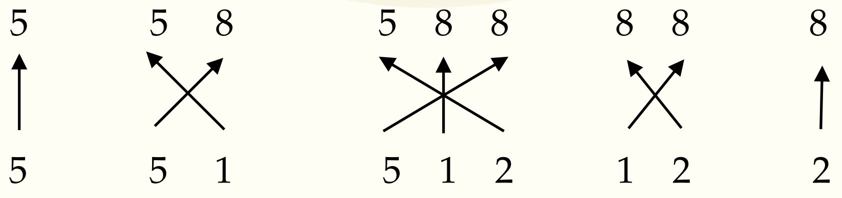
> **सङ्केत -**
>
> आधार = 100
>
> उपाधार = 100 × 5 = 500
>
> उपाधार अङ्क = 5
>
> विचलन +88 एवं +12
>
> दायें पक्ष में दो अङ्क रखते हैं। जब आधार 100 हो।

नोट : एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र यह सूत्र यहाँ प्रभावहीन है क्योंकि दोनों संख्या में एक संख्या 9 वाली नहीं है ।

8. ‘ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् ’ सूत्र द्वारा गुणा

$$\begin{array}{rr} & 5\,8\,8 \\ \times & \underline{5\,1\,2} \end{array}$$

> **सङ्केत –**
>
> तीन अङ्कों में तीन अङ्कों का गुणा करने पर ड़ॉट स्टिक
>
> 
>
> V IV III II I



5×5 / 5×1+5×8 / 5×8+5×2+1×8 / 8×2+8×1 / 8×2

25 / 5+40 / 40+10+8 / 16+8 / 16

25 / 45 / 58 / 24 / 16

+6 +2 +1

= 301056

नया विकल्प -

उदाहरण : 742 × 758 का गुणनफल ज्ञात करने के लिए -

यहाँ हम प्रारम्भ में सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण तथा बाद में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् प्रयोग करते हैं ।

7 4 2

× 7 5 8

7×8 / 42 × 58

56 / 2436

= 562436

सङ्केत

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् -

4 2

× 5 8

2436

4 4 2 2

5 5 8 8

III II I

भाग सङ्क्रिया –

पिछली कक्षाओं में भाग करने की तीन वैदिक सूत्र -

1) निखिलम् सूत्र (जब भाजक आधार संख्या से कम हो)

2) परावर्त्य योजयेत सूत्र (जब भाजक आधार संख्या से बड़ी हो)

3) ध्वजाङ्क (यह भाग की सामान्य विधि) –

'ध्वजाङ्क' सूत्र से संख्या को लिखने का क्रम

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र आधारित सर्व व्यापक विधि द्वारा भाग सङ्क्रिया का कोई भी बड़े से बड़ा प्रश्न न्यूनतम गणनाओं से हल किया जा सकता है। भाजक को सुविधानुसार दो भागों में विभाजित किया जाता है । मुख्याङ्क तथा ध्वजाङ्क ।

(i) **ध्वजाङ्क :** भाजक के इकाई अङ्क अथवा इकाई युक्त कई अङ्क जो घाताङ्क के स्थान पर लिखे जाते हैं **ध्वजाङ्क** कहलाते हैं ।

(ii) **मुख्याङ्क :** भाजक का शेषफल जो आधार स्थान पर लिखा जाता है और वास्तविक भाग सङ्क्रिया सम्पन्न करता है मुख्याङ्क कहलाता है ।

विधि : (1) तीन खण्डों में भाग सङ्क्रिया के स्थान को विभाजित करते हैं ।

(2) प्रथम खण्ड में आधार स्थान पर मुख्याङ्क तथा घाताङ्क स्थान पर ध्वजाङ्क लिखते हैं ।

(3) ध्वजाङ्क में जितने अङ्क होते हैं, उतने ही अङ्क भाज्य के इकाई की तरफ से तृतीय खण्ड में तथा शेष मध्यखण्ड में रखे जाने चाहिए ।

ध्वजाङ्क (यह भाग की सामान्य विधि) –

ध्वजाङ्क विधि से किसी भी प्रकार के सवालों को हल किये जा सकते हैं । इस वैदिक सूत्र की इस विधि में मुख्याङ्क तथा ध्वजाङ्क का चयन बड़ा महत्त्वपूर्ण है । ध्वजाङ्क में कितने भी अङ्क हो सकते हैं, मुख्याङ्क भी अनेक अङ्कों का हो सकता है । यदि उसका भाग भाज्य, संशोधित भाज्य सरलता से हो जाता है । ध्वजाङ्क में जितने अङ्क होते हैं, उतने ही अङ्क भाज्य के इकाई की तरफ से तृतीय खण्ड में तथा शेष मध्यखण्ड में रखे जाने चाहिए । आइए, निम्न उदाहरणों से स्पष्ट करें ।

उदाहरण: भागफल ज्ञात कीजिए । (ध्वजाङ्क विधि) $98765 \div 87$

हल:

7	9 8 7 6	5
8	1 3 6	5
	1 1 3 5	$55 - 5 \times 7$
		$= 20$

सङ्केत –

1) भाजक = 87 या 8^7

   8 = मुख्याङ्क , 7 = ध्वजाङ्क

2) तृतीय खण्ड में भाज्य का एक अङ्क = 5

3) 9 ÷ 8 भागफल प्रथम अङ्क = 1, शेषफल = 1

4) नया भाज्य = 18, संशोधित भाग

5) 11 ÷ 8 भागफल द्वितीय अङ्क = 1, शेषफल = 3

6) नया भाज्य = 37 संशोधित भाज्य

7) 30 ÷ 8 भागफल तृतीय अङ्क = 3, शेषफल = 6

8) नया भाज्य = 66 संशोधित भाज्य

   45 ÷ 8 भागफल चतुर्थ अङ्क = 5 शेषफल = 5

9) नया भाज्य = 55

   संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

   भागफल = 1135, शेषफल = 20

उदाहरण : 529 ÷ 23 भागफल ज्ञात कीजिए ।

हल:

3	5	2	9
2		1	0
	2	3	0

भागफल = 23, शेषफल = 0

उदाहरण : 601325 ÷ 76 भागफल ज्ञात कीजिए।

हल :

6	60	1	3	2	5
7		1	6	2	2
	7	9	1	2	13

भागफल = 7912, शेषफल = 13

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के वैदिक गणित के अन्त्ययोर्शतकेऽपि सूत्र से गुणनफल ज्ञात कर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

अ) 590×510 = ...

ब) 596×504 = ...

स) 888×815 = ...

द) 999×901 = ...

प) 755×745 = ...

फ) 564×536 = ...

भ) 1180×1120 = ...

म) 1032×1068 = ...

2. योगफल कीजिए। (एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र द्वारा)

अ)
```
  34567
  13567
  82134
+ 34212
```

ब)
```
  3456
  1342
  8134
+ 3412
```

3. वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिए।

अ)
```
  98373
− 31987
```

ब)
```
  कि.ग्रा. . ग्राम
  137 . 065
− 112 . 385
```

4. गुणन करें।

एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से

अ) $\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$	ब) $\begin{array}{r} 108 \\ \times 102 \\ \hline \end{array}$	स) $\begin{array}{r} 73 \\ \times 77 \\ \hline \end{array}$

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से

द) 23×99 प) 136×9999

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से

फ) 362×123 भ) 341×214

5. भागफल ज्ञात कीजिए।

निखिलम् सूत्र

1. $11034 \div 889$ ब) $1994 \div 98$

परावर्त्य योजयेत सूत्र

द) $13385 \div 121$ प) $1358 \div 113$

ध्वजाङ्क सूत्र

प) $37941 \div 79$ फ) $4096 \div 64$

घनफल –

वैदिक गणित में संख्या का घनफल ज्ञात करने की सरल एवं महत्त्वपूर्ण विधियाँ -

1) निखिलम् (आधार) सूत्र

2) एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र

3) आनुरूप्येण सूत्र

आधार विधि –

इस विधि से गुणन सङ्क्रिया में तीन खण्ड किये जाते हैं । बायीं तरफ विचलन का दो गुणा लिखा जाता है । मध्यखण्ड में विचलन का वर्ग में तीन का गुणा तृतीय खण्ड में विचलन के घन को लिखा जाता है ।

जैसे- आधार 10 हो तो एक-एक अङ्क अथवा आधार 100 दो-दो अङ्क तीनों खण्डों में रखे जाते हैं ।

घनफल = संख्या + (विचलन × 2) / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3

{जहाँ, विचलन = संख्या – आधार }

2. **(जब आधार 10 हो)**

उदाहरण : संख्या 15 का घनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : 15^3

आधार = 10

15 – 10 = + 5 (विचलन)

संख्या = 15 , विचलन = 5

तब,

घनफल = संख्या + (विचलन × 2) / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3

= 15 + (5 × 2) / 3 × $(5)^2$ / $(5)^3$

= 15 + 10 / 3 × 25 / 5 × 5 × 5

= 25 / 75 / 125

या = 25 / $_7$5 / $_{12}$5

= 3375

3. **(जब आधार 100 हो)**

उदाहरण : संख्या 104 का घनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $(104)^3$

विचलन = संख्या – आधार

= 104 – 100 = 4

तब,

घनफल = संख्या + (विचलन × 2) / 3 × (विचलन)^2 / (विचलन)^3 घनफल

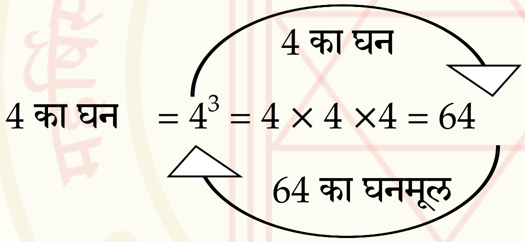
$= 104 + 4 \times 2 / 3 \times (4)^2 / 4^3$

$= 104 + 8 / 3 \times 16 / 4 \times 4 \times 4$

$= 112 / \underline{48} / \underline{64}$ (**नोट** : यहाँ दो अङ्क रखेंगे क्योंकि आधार 100 हैं ।)

$= 1124864$

घनमूल –



यहाँ 4 का घन 64 है ।

या 64 का घनमूल 4 है ।

घनफल की सङ्क्रिया के विपरीत सङ्क्रिया घनमूल होती है ।

जैसे- **4 का घन 64 है, तो 64 का घनमूल 4 हुआ ।**

घनमूल का गणितीय चिह्न = ‘ $\sqrt[3]{\ }$ ’ अथवा $(\ )^{\frac{1}{3}}$ घनमूल को गणितीय सङ्केत कहलाते हैं ।

जैसे : $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$ = 64 का घनमूल = 4

पूर्णघन संख्या की पहचान –

1) घन संख्या के बीजाङ्क 1, 8 एवं 9 अथवा 0 हो सकते हैं ।

जैसे : 625 का बीजाङ्क 6 + 2 + 5 = 13 = 1 + 3 = 8 अत: 625 एक पूर्ण घन संख्या है।

उपर्युक्त बीजाङ्क वाली संख्या पूर्ण घन होती है ।

2) जिस पूर्णघन संख्या का चरमांक (इकाई) अङ्क 1, 4, 5, 6, 9 अथवा 0 होता है, तो उसके घनमूल के इकाई का अङ्क भी वही होता है ।

3) जिस पूर्ण घन संख्या का चरमाङ्क (इकाई) अङ्क 2, 8, 3 एवं 7 होता है तो उसके घनमूल का इकाई अङ्क इस दिये हुए अङ्क का परममित्र अङ्क होता है ।

4) घन संख्या के घनमूल का अन्तिम अङ्क संख्या के अन्तिम समूह से ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण : क्या संख्या 1729 एक पूर्ण घन है ?

हल : 1729 का अङ्क योग 1 + 7 + 2 + 9 = 1

अत:, यह पूर्ण घन संख्या है ।

उदाहरण : क्या संख्या 9528127 पूर्ण घन है ?

हल : 9528127 के बीजाङ्क का

9 + 5 + 2 + 8 + 1 + 2 + 7 = 7

अत:, यह पूर्ण घन संख्या नहीं है ।

हम जानते हैं, **पूर्ण घन संख्या का बीजाङ्क का योग 1, 8, 0 या 9 होता है ।**

घनमूल ज्ञात करने के पहले निम्न सारणी को ध्यान से देखिए यह आपको घनमूल के निर्धारित करने में सहायता करेंगी ।

सारणी - 1

अगर घन का अन्तिम अङ्क निम्न है तो	घनमूल का इकाई अङ्क होगा
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

उपर्युक्त **सारणी - 1** से हम निम्नाङ्कित तथ्य निकाल सकते हैं ।

1) 1, 4, 5, 6, 9 और शून्य (0) घन के अन्त में अपने आपको दोहराते हैं ।

2) 2, 3, 7 और 8 घनमूल का इकाई अङ्क दिये अङ्क का परममित्र अङ्क है ।

3) 7 अङ्कों वाले घनमूल का बायाँ अङ्क या 7 अङ्कों से कम अङ्कों वाले घनमूल का दहाई अङ्क निम्न सारणी की सहायता से निकाला जा सकता है ।

सारणी - 2

घन मूल का सबसे बायें स्थित जोड़ा	निकटतम घनमूल
1 – 7	1

8 – 26	2
27 – 63	3
64 – 124	4
125 – 215	5
216 – 342	6
343 – 511	7
512 – 728	8
729 – 999	9

घनमूल की वैदिक विधि (उपसूत्र विलोकनम्) –

विलोकनम् सूत्र का शाब्दिक अर्थ - निरीक्षण या परीक्षण है । यह सूत्र वहाँ प्रयोग किया जाता है, जहाँ 7 अङ्कों से कम की संख्या का घनमूल निकालना तो इस सूत्र की सहायता से आप उसके पूर्ण घनमूल की इकाई और दहाई के अङ्क कुछ ही पलों में पता कर घनमूल ज्ञात कर सकते हैं ।

नियम –

घनमूल निकालने के लिए वैदिक सूत्र विलोकनम् का प्रयोग किया जाता है दायीं ओर से शुरू करके तीन-तीन अङ्कों से समूह तैयार कीजिए । जैसा की ऊपर बताया गया है और सारणी 1, सारणी 2 की सहायता से घनमूल का इकाई और दहाई के अङ्क पता कीजिए ।

आइए, उदाहरण से समझते हैं ।

उदाहरण : 97336 का घनमूल कीजिए ।

हल : 1) दायें से तीन-तीन अङ्कों का समूह बनाएँ ।

$\overline{97}\ \overline{336}$

2) घन का अन्तिम अङ्क 6 है घनमूल का इकाई अङ्क 6 होगा ।

(सन्दर्भ के लिए सारणी 1 देखें)

3) घनमूल का दहाई अङ्क 4 है क्योंकि

$4^3 < 97 < 5^3$

इस प्रकार, $\sqrt[3]{97336} = 46$

उदाहरण : 941192 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 1) दायें से तीन-तीन अङ्कों का समूह बनाएँ।

$\overline{941}$ $\overline{192}$

2) चूंकि रेखा दो संख्या पर है, इसलिए घनमूल में सिर्फ दो अङ्क होंगे।

3) चूंकि इकाई का अङ्क 2 है। इसलिए घनमूल का इकाई अङ्क 8 होगा।

4) दहाई के अङ्क के लिए, सारणी - 2 देखें

$9^3 < 941 < 10^3$

दहाई का अङ्क = 9

इस प्रकार, $\sqrt[3]{941132} = 98$

प्रश्नावली 7.2

1. निम्नलिखित संख्या पूर्ण घन संख्या है या नहीं बीजाङ्क का प्रयोग ।

अ)	68921	ब)	1279	स)	256
द)	216	य)	625	प)	1725

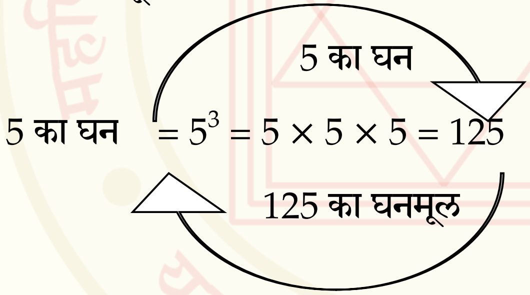
2. वैदिक सूत्र (विलोकनम्) द्वारा पूर्ण घनमूल ज्ञात कीजिए ।

अ)	493039	ब)	42875	स)	636056
द)	941152	य)	250047	र)	3375

हमने सीखा –

1) गणितीय गणना की व्यावहारिक उपयोग मूल सङ्क्रियाओं (+, –, × , ÷) का अभ्यास वैदिक सूत्रों की सहायता से हल ज्ञात करना सीखा ।

2) घनफल एवं घनमूल के बारे में चर्चा कि -



यहाँ 5 का घन 125 है ।

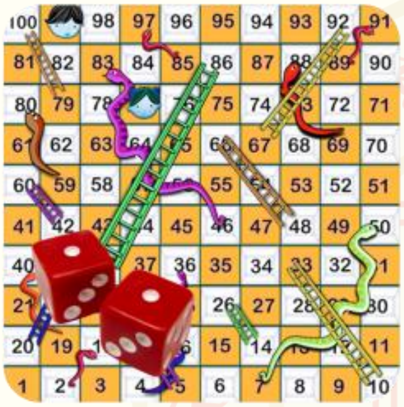
या 125 का घनमूल 5 है ।

3) पूर्ण घन संख्या का बीजाङ्क 1, 8, 9 या 0 होता है ।

अध्याय - 8

समान्तर श्रेणी

प्रिय बटुकों ! हम अपने दैनिक जीवन में सुबह से शाम तक अङ्कों तथा संख्याओं का कहाँ- कहाँ प्रयोग करते हैं ? खेल का मैदान हो या पढ़ाई , हमें अङ्कों का प्रयोग करना ही होता है । साँप सीढ़ी



का खेल ही ले लीजिए हमें उसमें अङ्कों की सहायता लेनी ही होती हैं । इसी प्रकार, घड़ी का समय देखना या कैलेण्डर में दिनाङ्क देखते समय अङ्कों तथा संख्याओं की सहायता लेनी ही होती हैं । इस और भी कई जगह जैसे-रुपये में भी अङ्कों की संख्याएँ होती है । इससे हम आप यह जान सकते हैं, कि हमारे जीवन में अङ्कों तथा संख्याओं का कितना महत्त्व है।

परन्तु कभी-कभी यें संख्याएँ निश्चित क्रम तथा कभी-कभी ये क्रम नहीं भी नजर आता ।

इस अध्याय में हम निश्चित क्रम वाली संख्याओं के बारे में अनुक्रम एवं समान्तर श्रेणी के बारे में चर्चा करेंगे ।

निम्नलिखित कुछ संख्याओं के समूह दिये गये हैं । ध्यान पूर्वक देखिए और रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

1) 1, 2, 3,……, 5, 6,……, 8,……

2) 5, 10, 15, 20,……

संख्याओं के समूह ने अगला अङ्क क्या होगा ? जी हाँ अगला अङ्क 25 होगा ।

इस प्रकार, संख्याओं का एक और समूह लेते हैं ।

3) 10 , 20 , 30 , 40 , 50 , ……

इसके अगले कौन-सी संख्या होगी ?

उत्सव –

यहाँ अगली संख्या 60 होगी ।

4) 3 , 6 , 9 , 12 , ….., 18

5) 4 , 8 , 12 , 16 , ….. , 24 , 28 , ……

आपको उपर्युक्त संख्या क्रम देखकर पता चलेगा, कि यहाँ सभी उदाहरण **एक क्रम** में लिखे गये हैं।

उदाहरण : 2

5 , 10 , 15 , 20 , <u>**25**</u>

उपर्युक्त संख्या क्रम में 5 - 5 का अन्तर दिखाई देता है ।

प्रथम पद = 5

द्वितीय पद = प्रथम पद + अन्तर = 5 + 5 = 10

तृतीय पद = द्वितीय पद + अन्तर = 10 + 5 = 15

चतुर्थ पद = तृतीय पद + अन्तर = 15 + 5 = 20

पांचवे पद = चतुर्थ पद + अन्तर = 20 + 5 = 25

अत: 25 को प्राप्त करने को लिए 5 जोड़ना होगा ।

इस प्रकार, अन्य उदाहरणों में भी समान अन्तर है ।

3) (10 , 20 , 30 , 40 , 50 , **60**) में 10 का अन्तर है ।

4) (3 , 6 , 9 , 12 , **15** , 18) में 3 का अन्तर है ।

5) (4 , 8 , 12 , 16 , **20** , 24 , 28) में 4 का अन्तर है ।

अत: स्पष्ट वे संख्याएँ जो एक क्रम में लिखी जाती अनुक्रम बनाती है ।

अनुक्रम –

संख्याओं का एक ऐसा फलन जिसमें प्रत्येक अवयव को एक निश्चित क्रम में रखा जाता हैं उसे हम **अनुक्रम** कहते हैं उस समुच्चय के अवयवों को पद कहते है । अनुक्रम के n वें पद को व्यापक पद कहते हैं । दूसरे शब्दों में एक निश्चित क्रम में संख्याओं की व्यवस्था को **अनुक्रम** कहते हैं ।

उदाहरण : 2 , 4 , 6 , 8 , 10

-10 , -9 , -8 , -7 , -6

अनुक्रम के पदों को a_1 , a_2 , a_3 ,….., a_n दर्शाते हैं ।

सार्व अन्तर –

वह निश्चित संख्या जिसे योग एवं व्यवकलन करने पर सूची की अगली संख्या प्राप्त हो सार्व अन्तर कहते हैं । दूसरे शब्दों ' प्रत्येक अगले पद तथा पूर्व पद का अन्तर **सार्व अन्तर** कहलाता है । सार्व अन्तर को 'd' से दर्शाया जाता है ।

यदि अनुक्रम a_1 , a_2 , a_3 , ………….. , a_n है, तो सार्व अन्तर को किन्हीं दो पदों के अन्तर के रूप में लिखते हैं ।

$d = a_2 - a_1$ या $a_3 - a_2$ या $a_4 - a_3$

हम किसी अनुक्रम (**जैसे** : 2, 4, 6, 8, 10) में अगले पद को प्राप्त करने के उसके पूर्वपद में सार्व अन्तर को जोड़ने पर अगला पद प्राप्त होता है । इस प्रकार, हम देखते हैं कि किसी भी अनुक्रम के अंदर संख्याओं को लिखने के लिए पदों को अलग-अलग सङ्केत से दर्शाया जा सकता है । यहाँ पदों को a_n से दर्शाते हैं ।

आइए , उदाहरण से समझते हैं ।

उदाहरण : दिए गए व्यापक पद $a_n = n + 2$ से अनुक्रम के पहले पाँच पद लिखिए ।

हल : अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = n + 2$

जहाँ n = प्राकृत संख्या तब n के स्थान पर 1, 2, 3, 4 तथा 5 को प्रस्थापित करते है ।

n = 1 रखने पर $a_1 = 1 + 2 = 3$

n = 2 रखने पर $a_2 = 2 + 2 = 4$

n = 3 रखने पर $a_3 = 3 + 2 = 5$

n = 4 रखने पर $a_4 = 4 + 2 = 6$

$n = 5$ रखने पर $a_5 = 5 + 2 = 7$

प्राप्त किए अनुक्रम में पहले पाँच पद इस प्रकार है ।

3 , 4 , 5 , 6 , 7 है

इस प्रकार, आप देखते है कि **किसी व्यापक पद a_n या वे पद में कोई मान रखते हैं । तो उस स्थान के पद मान प्राप्त होगा ।**

करो और सीखो –

दिए गये व्यापक रूप $a_n = 22 - n$ है । अनुक्रम के प्रथम तीन पद ज्ञात करें ।

जहाँ n = प्राकृत संख्या

उदाहरण : दिये गए a_n वाँ पद से अनुक्रम का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए ।

1) $a_n = 2n - 1$ 2) $a_n = 3n - 2$

हल :1) यदि n वाँ पद $a_n = 2n - 1$

अनुक्रम का 12 पद ज्ञात करने के लिए व्यापक रूप में $n = 12$ रखने पर -

$a_{12} = 2 \times 12 - 1$

$= 24 - 1 = 23$

अत:, दिये गये व्यापक $a_n = 2n - 1$ रूप का 12 वाँ पद 23 है ।

हल : 2) यदि n वाँ पद $a_n = 3n - 2$

अनुक्रम का 12 वाँ पद ज्ञात करने के लिए व्यापक रूप में $n = 12$ रखने पर -

$a_n = 3 \times 12 - 2$

$= 36 - 2$

$= 34$

अत:, दिये गये व्यापक रुप $a_n = 3n - 2$ का 12 वाँ पद 34 हैं ।

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित अनुक्रम के रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें ।

   1) 1 , 3 , 5 , ……, 7 , 11

   2) 7 , …… , 21 , 28 , 35

   3) – 10 , – 9 , ….. , – 7 , – 6

   4) A , B , ….. , D , E , F

   5) 14 , 15 , 16 , ….., 18 , 19

   6) 11 , 13 , 15 , ….. , 19

   7) 100 , 95 , ….., 85 , 80

2. अनुक्रम से आप क्या समझते है ?

श्रेणी :

यदि हम किसी भी अनुक्रम के पदों को धन या ऋण चिह्नों से व्यक्त करे तो प्राप्त व्यंजकों को **श्रेणी** कहते हैं।

उदाहरण: **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +………**

2 – 5 – 11 – 14 – ……………

समान्तर श्रेणी –

समान्तर का अर्थ है : समान + अन्तर (सार्व अन्तर)

समान्तर श्रेणी संख्याओं की एक ऐसी सूची है । जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद को छोड़कर) अन्य पद एक निश्चित संख्या जोड़ने या घटाने पर प्राप्त होता है । उस श्रेणी को **समान्तर श्रेणी** कहते हैं और उस निश्चित संख्या को सार्व अन्तर को ‘d’ तथा प्रथम पद को ‘a’ से दर्शाते हैं । दूसरे शब्दों

में ''एक ऐसी श्रेणी जिसमें दो पदों के बीच में समान अन्तर हो,तो ऐसी श्रेणी को **समान्तर श्रेणी** कहते हैं ।'' इसे संक्षिप्त में A.P. (Arithmetic progression) से दर्शाया जाता है।

उदाहरण : 2 , 4 , 6 , 8 , 10

इस श्रेणी का प्रत्येक **पद** 'Term' कहलाता है ।इस श्रेणी में दूसरा पद ,पहले पद से 2 जोड़ने पर तीसरा पद दूसरे पद में 2 जोडने पर तथा चौथा पद तीसरे पद में 2 जोड़ने पर प्राप्त होता है अत: दिया गया श्रेणी एक समान्तर श्रेणी है ।

किसी श्रेणी को हम **समान्तर श्रेणी** कहते हैं । यदि-

$$a_{n+1} = a_n + d$$; d= सार्व अन्तर एवं सभी $n \in N$ (प्राकृत संख्या)

उदाहरण : 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ...

यह समान्तर श्रेणी है, क्योंकि -

5 = 2 + 3

8 = 5 + 3

11 = 8 + 3

14 = 11 + 3

उपर्युक्त श्रेणी के प्रत्येक पद के बीच का अन्तर तीन-तीन है अर्थात् d सार्व अन्तर हुआ ।

दी गई श्रेणी 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ... का प्रथम पद 2 है तथा सार्व अन्तर 3 है ।

प्रथम पद = 2

द्वितीय पद = 5 = 2 + 3 = a + d

तृतीय पद = 8 = 5 + 3 = (a + d) + d = a + 2d

चतुर्थ पद = 11 = 8 + 3 = (a + 2d) + d = a + 3d

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

इसे निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं ।

$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\dots\dots$

प्रथम पद $a_1 = a$

द्वितीय पद $a_2 = a + d = a + 1 \times d$

तृतीय पद $a_3 = a + 2d = a + 2 \times d$

चतुर्थ पद $a_4 = a + 3d = a + 3 \times d$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

जहाँ a_n = nवाँ पद

n = पदों की संख्या

d = सार्वअंतर

n वाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

या व्यापक पद $a_n = a + (n-1)d$

उदाहरण : क्या श्रेणी 26 , 21 , 16 , 11 , 6 , 1 ....एक समान्तर श्रेणी है ?

हल : यहाँ प्रथम पद $a_1 = 26,\ a_2 = 21,\ a_3 = 16,\ a_4 = 11,\ a_5 = 6$

$a_2 - a_1 = 21 - 26 = -5$

$a_3 - a_2 = 16 - 21 = -5$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$a_6 - a_5 = 1 - 6 = -5$

आप देखते हैं, कि प्रत्येक दो पदों के बीच का अन्तर (– 5) प्राप्त होता है, इसलिए सार्व अन्तर – 5 है ।

हम जानते हैं, जब किसी श्रेणी में सार्व अन्तर समान (बराबर) हो, तो वह समान्तर श्रेणी कहलाती हैं। अत:, दी गई श्रेणी एक समान्तर श्रेणी है ।

उदाहरण : यदि 4 , 8 , 12 , 16 , 20 एक समान्तर श्रेणी है, तो श्रेणी a_{10} का पद क्या होगा ?

हल : श्रेणी   4, 8, 12, 16, 20

$a = 4$

$d = a_2 - a_1 = 8 - 4 = 4$

हम जानते हैं समान्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$\mathbf{a_n = a + (n-1)\,d}$$

$n = 10$ **रखने पर**

$$a_{10} = 4 + (10-1)\,4$$
$$= 4 + (9) \times 4$$
$$= 4 + 36 = 40$$

अत: समान्तर श्रेणी का 10 वाँ पद $a_{10} = 40$ है ।

उदाहरण : दी हुई समान्तर श्रेणी के प्रथम चार पद लिखिए । जबकि प्रथम पद a व सार्व अन्तर d निम्नलिखित है । $a = 10, d = 3$

हल : हम जानते है कि $\mathbf{a_n = a + (n-1)\,d}$

प्रथम पद $a_1 = 10$

द्वितीय पद $a_2 = 10 + (2-1)\,3$
$= 10 + 1 \times 3$
$= 10 + 3$
$= 13$

जहाँ a_n = nवाँ पद

n = पदों की संख्या

d = सार्वअन्तर

तृतीय पद $a_3 = 10 + (3-1)\,3$
$= 10 + 2 \times 3$
$= 10 + 6$

$= 16$

चतुर्थ पद $a_4 = 10 + (4 - 1)\,3$

$= 10 + 3 \times 3$

$= 10 + 9$

$= 19$

दी गई समान्तर श्रेणी के प्रथम चार पद 10, 13, 16 एवं 19 हैं ।

समान्तर माध्य (समान्तर श्रेणी का मध्य पद) :

यदि a , b , c समान्तर माध्य A.P. में है, तो

$$b = \frac{a+c}{2}$$

यहाँ b, a तथा c का **समान्तर माध्य** कहलाता है।

उदाहरण : समान्तर श्रेणी 5 , ... , 15 का मध्य पद ज्ञात कीजिये।

हल: हम जानते हैं समान्तर श्रेणी का मध्य पद $b = \frac{a+c}{2}$

तब , $\frac{5+15}{2} = \frac{20}{2} = 10$

अत: मध्य पद 10 है।

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) समान्तर श्रेणी (A.P.) 6 , 3 , 0 , -3 …….. का सार्वअन्तर क्या है ?

(I) 3 (II) – 3 (III) – 2 (IV) 1

(ब) निम्नलिखित श्रेणी में से कौन-सी समान्तर श्रेणी है ?

(I) 2 , 4 , 8 , 16 , … (II) 1 , 3 , 9 , 27 , …

(III) 1 , 2 , 3, 4, 5 … (IV) 0 , 5 ,25 , 10 , …

(स) यदि समान्तर श्रेणी का सामान्य पद 3n + 5 है , तो इसका सार्वअन्तर होगा –

(I) 1 (II) 3 (III) 2 (IV) 5

(द) समान्तर श्रेणी 1 , 4 , 7 , 10 , … के 18 वें पद का मान है –

(I) 50 (II) 45 (III) 52 (IV) 35

(प) यदि समान्तर श्रेणी (AP) का प्रथम पद a और सार्वअन्तर(पदान्तर) d हों , तो nवाँ पद होगा –

(I) a + nd (II) a + (n – 1) d

(III) a + (n + 1) d (IV) (2a + (n – 1)

(फ) समान्तर श्रेणी 10, 7, 4 , … का 30 वाँ पद बराबर है?

(I) -55 (II) 66 (III) -77 (IV) 81

(भ) समान्तर श्रेणी 2, 7 , 12 , … का 10 वाँ पद क्या होगा ?

(I) 45 (II) 52 (III) 60 (IV) 47

2. समान्तर श्रेणी के प्रथम तीन पद लिखिए जहाँ प्रथम पद a और सार्व अन्तर d निम्नलिखित है।

अ) a = 4 , d = 2 ब) a = 10 , d = 10

स) $a = 5$, $d = 10$ द) $a = 20$, $d = 5$

3. दी गई श्रेणी 25, 21, 29, 31, 33 एक समान्तर श्रेणी है इस श्रेणी का 10 वाँ पद या a_{10} ज्ञात कीजिए।

4. श्रेणी 3 , 5 , 7 , 9 , 11 समान्तर श्रेणी 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

5. क्या श्रेणी 1 , 5 , 10 , 2 , 3 , 1 एक समान्तर श्रेणी है ?

6. क्या श्रेणी 8 , 16 , 24 , 32 , 40 एक समान्तर श्रेणी है ?

7. निम्नलिखित समान्तर श्रेणियों में रिक्त-स्थानों के पदों को ज्ञात कीजिए :

   अ) 2 , ☐ , 26

   ब) 20 , ☐ , 60

   स) ☐ , 3 , ☐

8. समान्तर श्रेणी 3 , 8 , 13 , 18 .... का कौन-सा पद 78 वाँ है ?

9. किसी समान्तर श्रेणी का 17 वाँ पद उसके 10 वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा -

1) **अनुक्रम :** एक निश्चित क्रम में संख्याओं की व्यवस्था को **अनुक्रम** कहते हैं ।

उदाहरण : 1, 2 , 3 , 4 , 5 , ...

2) **श्रेणी :** यदि किसी अनुक्रम के पदों को धन या ऋण चिह्नों से व्यक्त करें तो प्राप्त व्यंजकों को **श्रेणी** कहते हैं ।

उदाहरण: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ...

3) **समान्तर श्रेणी :** एक ऐसी श्रेणी जिसके दो पदों के बीच में समान अन्तर ,तो ऐसी श्रेणी को समान्तर श्रेणी कहते हैं । इसे संक्षिप्त में A.P. से दर्शाया जाता है ।

एक समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप -

$a, \; a + d, \; a + 2d, \; a + 3d$

जहाँ a = प्रथम पद एवं d = सार्व अन्तर है ।

पदों के बीच सार्व अन्तर $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3$

समान्तर श्रेणी का n वाँ पद -

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

जहाँ a = प्रथम पद , d = सार्व अन्तर , n = पदों की संख्या है ।

4) **समान्तर माध्य (समान्तर श्रेणी का मध्य पद) :** यदि a , b , c समान्तर माध्य में है, तो

$$b = \frac{a+c}{2}$$

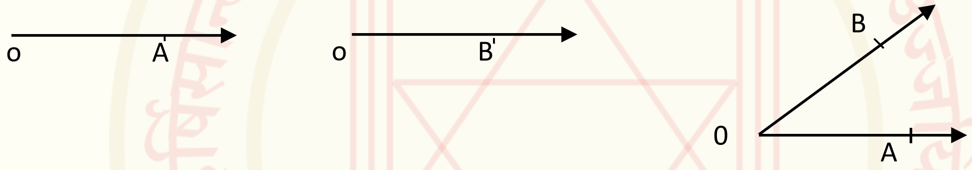
अध्याय -9

प्रायोगिक रचनाएँ

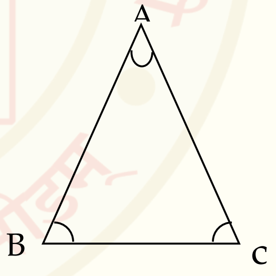
प्रिय बटुकों ! आप ज्यामिति के अनेक प्रकार के आकारों (कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग, आयत, वृत्त आदि) से परिचित है । पूर्व कक्षाओं में आपने चाँद की सहायता से कोणों को बनाना सीखा है । इस अध्याय में हम परकार की सहायता से कोणों तथा त्रिभुज की रचना करना सीखेंगे ।

आपको स्मरण होगा –

कोण – उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणों से **कोण** बनता है । दो किरणें OA और OB कोण AOB बनाती है । (इसे ∠BOA भी लिख सकते हैं)



त्रिभुज – तीन रेखाखण्डों से बनी सरल बन्द आकृति **त्रिभुज** कहलाती है । इसमें तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं ।



निम्न आकृति (ΔABC) है । इसमें ,

भुजाएँ = $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण = ∠BAC , ∠ABC , ∠BCA

शीर्ष = A , B , C

शीर्ष A के सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है । क्या आप भुजा $\overline{CA}$ के सम्मुख कोण का नाम बता सकते हैं ?

आप जानते हैं **त्रिभुजों का वर्गीकरण** भुजाओं एवं कोणों के आधार पर किस प्रकार करते हैं?

(1) **भुजाओं के आधार पर –** विषमबाहु, समद्विबाहु तथा समबाहु त्रिभुज

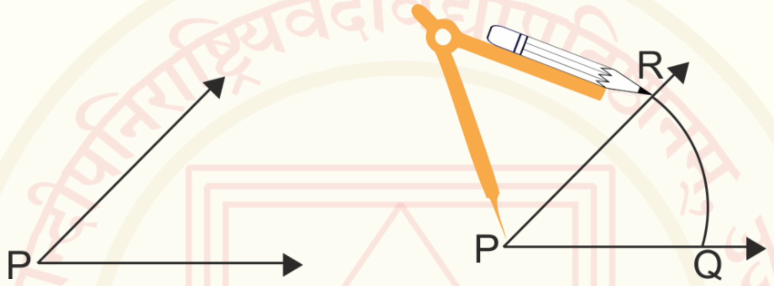
(2) **कोणों के आधार पर –** न्यूनकोण, अधिककोण तथा समकोण त्रिभुज

गतिविधि – उपर्युक्त बतायें गये त्रिभुजों के आकारों के नमूने, कागज से काटकर बनाइए और अपने साथियों से नमूनों की तुलना कर चर्चा कीजिए।

परकार की सहायता से दिए गए कोण का समद्विभाजन

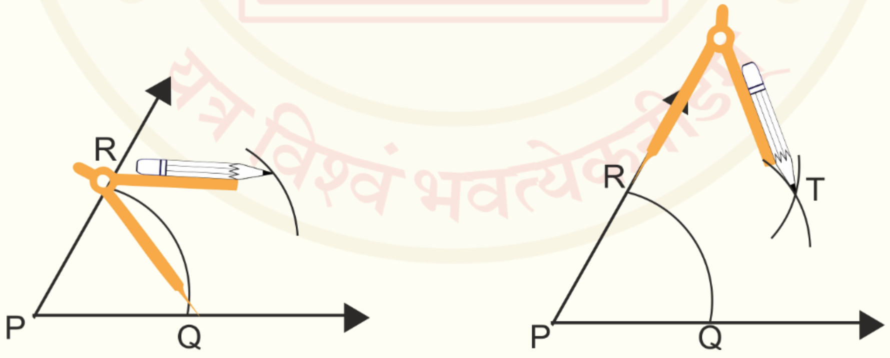
चित्र में ∠P दिया है।

चरण 1) बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाए ,जो कोण P की भुजाओं को Q एवं R पर काटे।

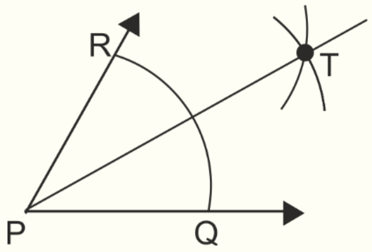


चरण 2) Q को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप कोण P के फैलाव क्षेत्र (आभ्यन्तर) में लगाए।

चरण 3) इसी प्रकार R को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाए जो पूर्व में लगाए चाप को काटे।



चरण 4) T एवं P को मिलाने पर कोण P का समद्विभाजक TP प्राप्त होता है।

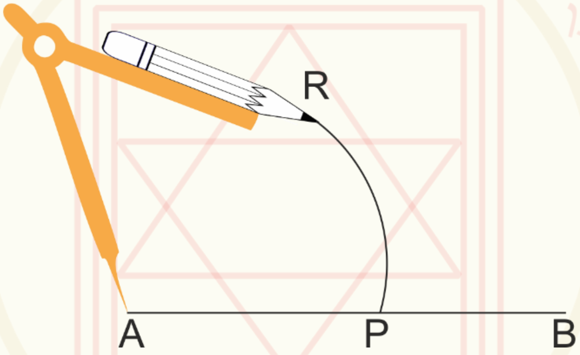


परकार की सहायता से कोणों की रचना

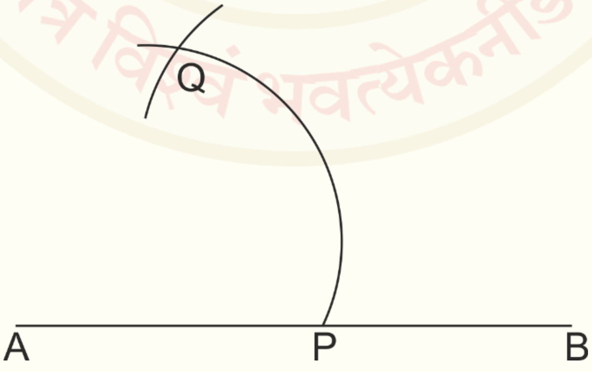
(1) 60^0, 120^0 एवं 180^0 की रचना करना

(A) 60^0 के कोण की रचना

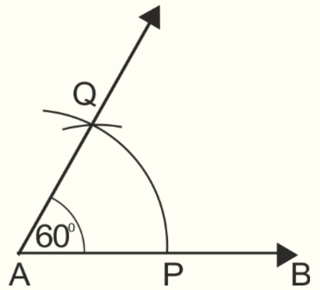
चरण 1) एक रेखाखण्ड AB खींचिए उपर्युक्त त्रिज्या का नाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु A पर रखकर एक चाप खींचिए जो रेखाखण्ड AB को बिन्दु P पर काटता है ।



चरण 2) बिन्दु P पर नुकीले सिरे को रखकर उसी त्रिज्या के माप का चाप पूर्व चाप पर बनाए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिन्दु को Q अङ्कित करें।

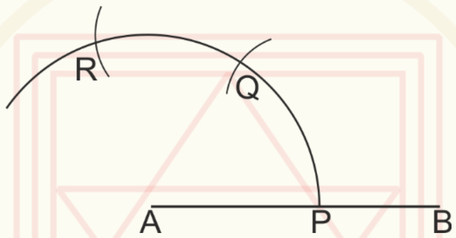


चरण 3) AQ को मिलाने पर $\angle QAB = 60^0$ बनता हैं ।

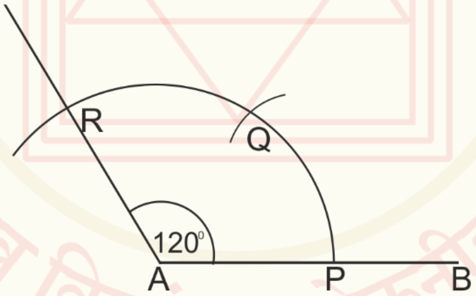


(B) 120^0 के कोण की रचना

चरण 1) ऊपर के चित्र पर आगे की क्रिया करते हुए उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को Q पर रखकर एक ओर चाप काटे जो पूर्व में लगाए गये चाप को बिन्दु R पर काटता है।



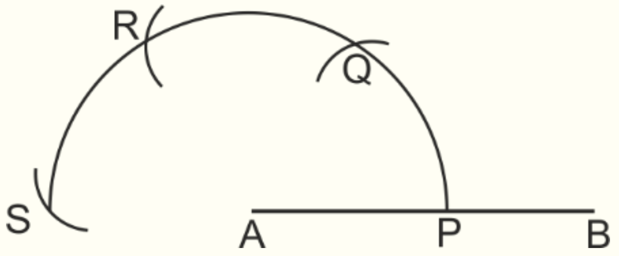
चरण 2) AR को मिलाने पर $\angle RAB = 120^0$ प्राप्त होता है।



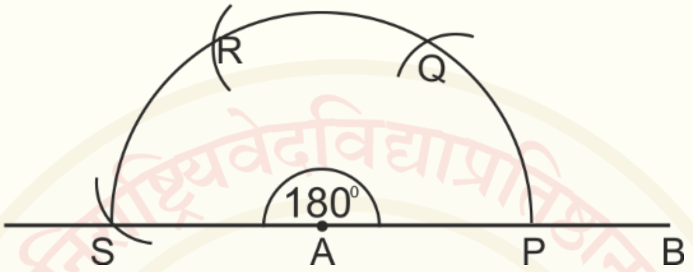
(C) 180^0 के कोण की रचना

ऊपर के चित्र में ओर आगे की क्रिया करते हुए

चरण 1) उसी त्रिज्या के माप का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु R पर रखकर एक चाप और काटे जो पूर्व में बनाए चाप को S पर काटता हैं ।



चरण 2) SA को मिलाने पर $\angle SAB = 180^0$ प्राप्त होता है

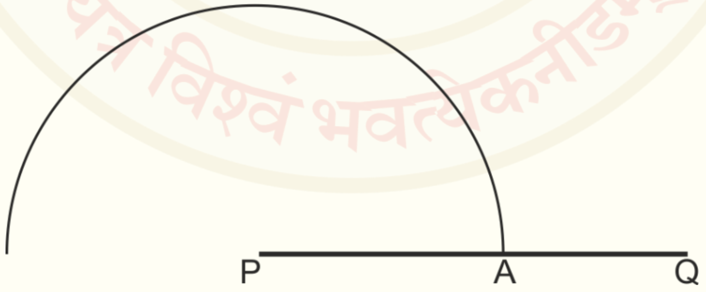


(ii) 30^0, 45^0, 90^0 के कोण की रचना

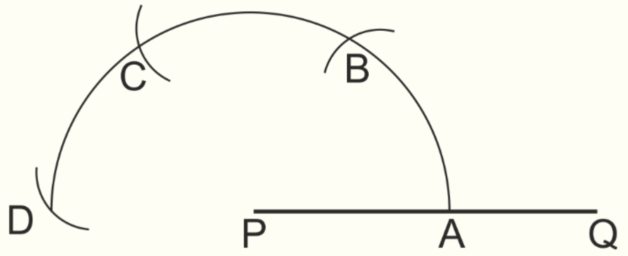
ऊपर 60^0, 120^0, 180^0 के कोणों की रचना के आधार पर 60^0 के समद्विभाजन से 30^0, 60^0 और 120^0 के बीच के कोण का समद्विभाजन से 90^0 तथा 30^0 और 60^0 के बीच कोण का समद्विभाजन करने से 45^0 के कोण की रचना की जा सकती है ।

(A) 30^0 के कोण की रचना

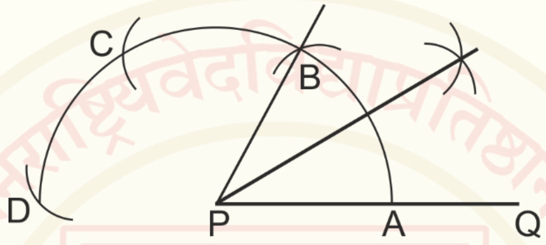
चरण 1) रेखाखण्ड PQ खींचिए उपर्युक्त त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप खींचिये ।



चरण 2) उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु A , B और C पर रखकर चाप काटे जो पूर्व में बनाए चाप को बिन्दु B , C , D पर काटता हो।

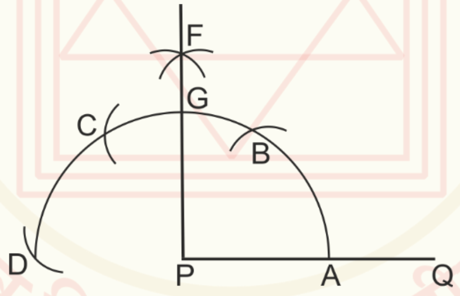


चरण 3) PB को मिलाने पर $\angle BPA = 60^0$ प्राप्त होता है इसका समद्विभाजन करने पर 30^0 का कोण प्राप्त होता है। यहाँ , $\angle BPM = \angle MPQ = 30^0$



(B) 90^0 के कोण की रचना

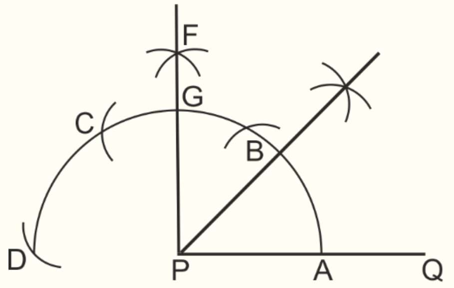
180^0 का अर्द्धक करने पर भी 90^0 प्राप्त कर सकते हैं। इसी प्रकार कोण $\angle BPC$ का समद्विभाजन करने पर 90^0 का कोण प्राप्त होता है कोण $\angle FPQ = 90^0$



(C) 45^0 के कोण की रचना

90^0 के कोण के समद्विभाजन द्वारा 45^0 के कोण की रचना करते हैं। यहाँ,

$$\angle GPB = \angle APB = 45^0$$



प्रश्नावली 9.1

प्र.1 परकार व रूलर (स्केल) की सहायता से निम्न कोणों की रचना किजिए।

अ) 90^0 ब) 45^0 स) 120^0 द) 60^0

प्र.2 आपकी स्वेच्छा से न्यूनकोण एवं अधिककोण, कॉपी में बनाइये और उन्हें चाँदे से नापकर लिखिए।

त्रिभुजों की रचना -

त्रिभुज बनाने के लिए 6 अवयवों (3 भुजा एवं 3 कोण) का माप ज्ञात होना आवश्यक नहीं होता है। यदि हम नीचे दिए गए माप समूहों में से कोई भी एक दिया हो, तो हम अभीष्ट त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। यहाँ अभीष्ट से तात्पर्य दिए गए मापों के आधार पर बनने वाले अद्वितीय त्रिभुज से है।

1. तीन भुजाएँ
2. दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण
3. दो कोण एवं उनके बीच की भुजा
4. समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा

याद रहें -

त्रिभुज की रचना में –

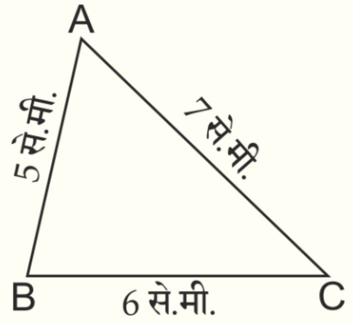
त्रिभुज की दो भुजाओं की माप का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता हैं।

1. **त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाएँ दी गई हो।**

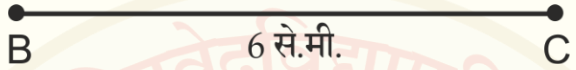
उदाहरण : एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB =5 से.मी., BC = 6 से.मी., और AC = 7 से.मी. हो।

हल :

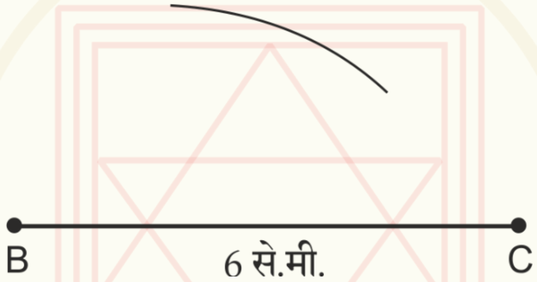
चरण 1) सर्वप्रथम हम दी हुई मापों का एक कच्चा चित्र बनाते हैं।



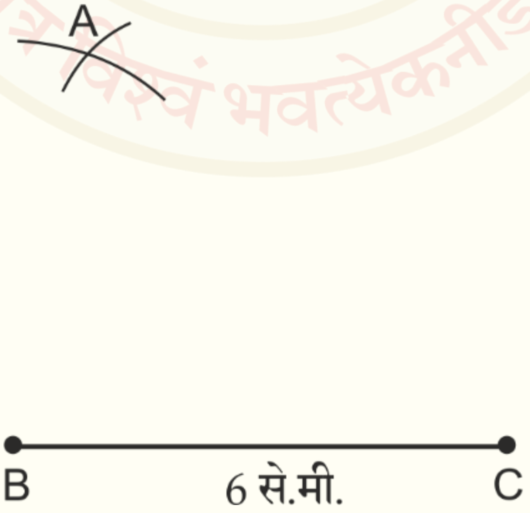
चरण 2) 6 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड BC खींचिए।



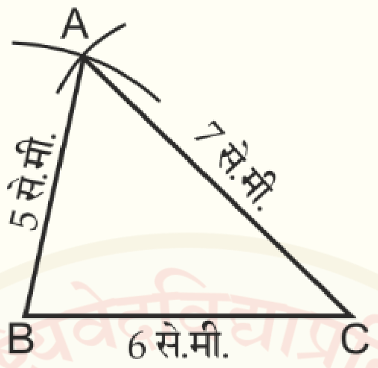
चरण 3) बिन्दु B से बिन्दु A से 5 से.मी. की दूरी पर है। अत: B को केन्द्र मानकर और 5 से.मी. त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।



चरण 4) AC = 7 से.मी. है। अत: C को केन्द्र मानकर और 7 से.मी. त्रिज्या लेकर एक चाप इस तरह खींचेंगे कि वह B से खींचे गए चाप को एक बिन्दु पर काटे।



चरण 5) दोनों चापों को प्रतिच्छेद बिन्दु A है । बिन्दु A,B और A,C को मिलाएँ । जिससे त्रिभुज ABC प्राप्त होता है ।



करो और सीखो –

त्रिभुज ABC की रचना कीजिए । जिसमें AB = 4 से.मी., BC = 6 से.मी. और CA = 5 से.मी. हो ।

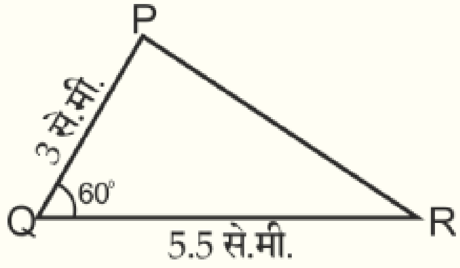
2. **एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण की माप दी हो**

हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। सर्वप्रथम हम एक कच्चा चित्र बनाते हैं । आइए, निम्न उदाहरण से समझते हैं।

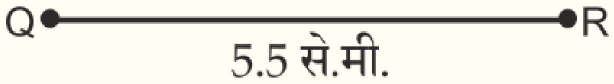
उदाहरण: एक त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि PQ = 3 से.मी., QR = 5.5 से.मी. और कोण $\angle PQR = 60^0$ है।

हल :

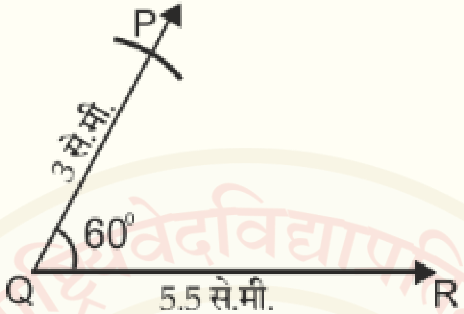
चरण 1) सर्वप्रथम हम दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा त्रिभुज खींचते हैं । (इससे हमें त्रिभुज की रचना करने में सहायता मिलेगी)



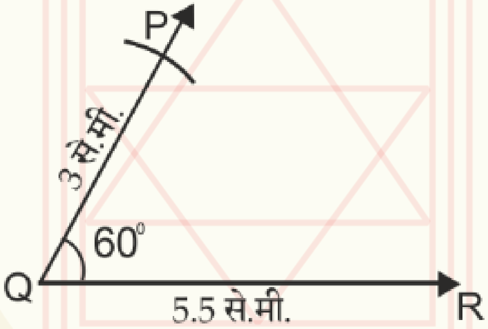
चरण 2) 5.5 से.मी. लम्बाई का एक रेखाखण्ड QR खींचिए ।



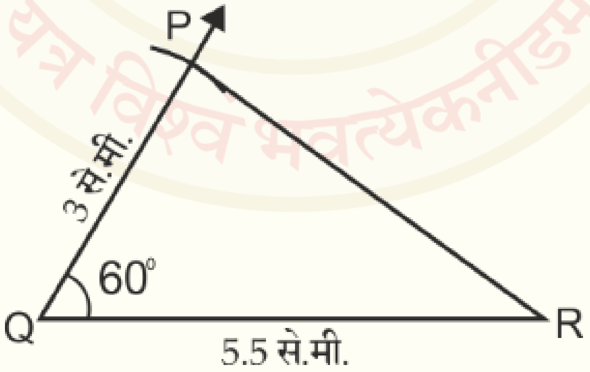
चरण 3) Q पर किरण $\overrightarrow{QX}$ खींचिए जो QR के साथ 60^0 का कोण बनाइए। बिन्दु P को कोण की $\overrightarrow{QX}$ किरण पर होगा।



चरण 4) बिन्दु P निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है। Q को केन्द्र मानकर 3 से.मी. त्रिज्या का एक चाप खींचिए। यह QX को P बिन्दु पर काटता है।



चरण 5) P,R को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त होता है।



करो और सीखो –

ΔPQR की रचना कीजिए, जबकि PQ = 5 से.मी., PR = 3 से.मी. और ∠RPQ = 90^0 हो।

3. **एक त्रिभुज की रचना जब दो कोण एवं उनके बीच की भुजा दी हो ।**

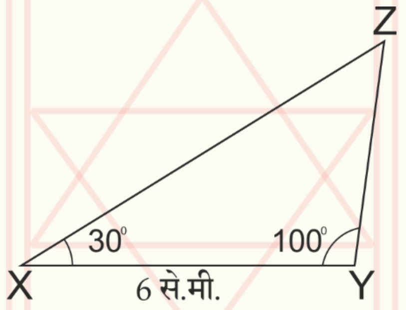
सबसे सर्वप्रथम एक कच्चा चित्र खींचिए। अब दिया हुआ रेखाखण्ड खींचिए । दोनों अन्त बिन्दुओं पर कोण बनाइए ।

आइये, निम्न उदाहरण से स्पष्ट करते है । दो कोण एवं उनके बीच की भुजा

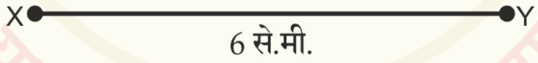
उदाहरण : ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि XY=6 से.मी., $\angle ZXY = 30^0$ और $\angle XYZ = 100^0$ है ।

हल :

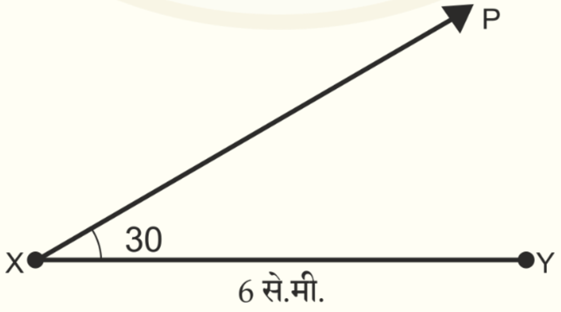
चरण 1) सर्वप्रथम, हम अङ्कित मापों के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते है। (इससे अनुमान लग जाता हे कि कैसे रचना की जाए।)



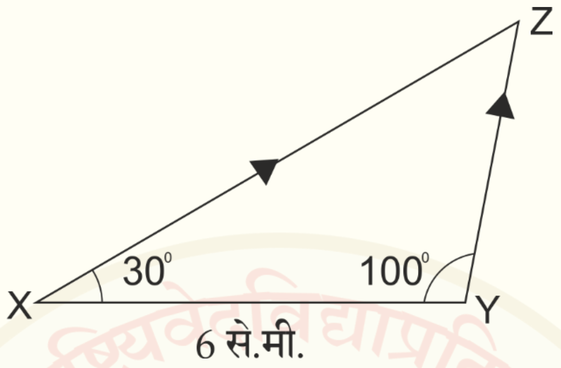
चरण 2) 6 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड XY खींचिए ।



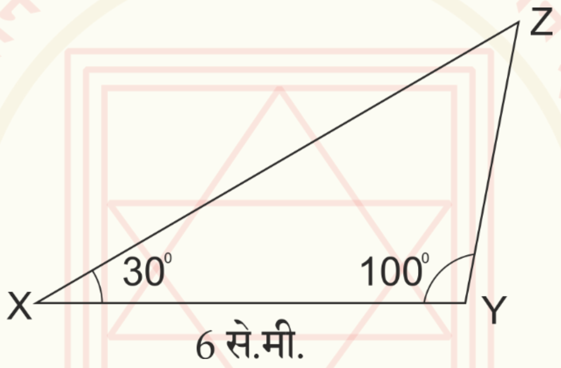
चरण 3) X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30^0 का कोण बनाए । दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार बिन्दु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए ।



चरण 4) Y पर एक किरण YQ खींचिए जो YX से 100^0 का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए।



चरण 5) दोनों किरणों XP और YQ का प्रतिच्छेद बिन्दु Z है। जिससे ΔXYZ प्राप्त होता है।



करो और सीखो –

Δxyz की रचना कीजिए। जब $\angle x = 60^0$, $\angle y = 30^0$ और xy = 5 से.मी. हो।

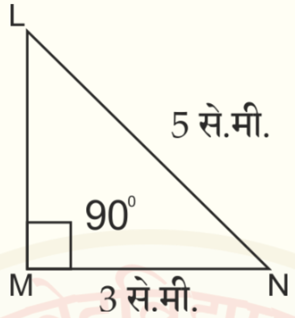
4. **एक त्रिभुज की रचना जब समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा दी हो**

दी हुई भुजा के अनुसार एक रेखाखण्ड खींचिए इसके एक अन्त बिन्दु पर समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लम्बाई की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए।

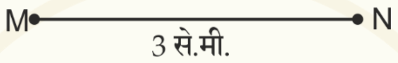
उदाहरण : Δ LMN की रचना कीजिए जिसका LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 से.मी. और MN = 3 से.मी हो।

हल :

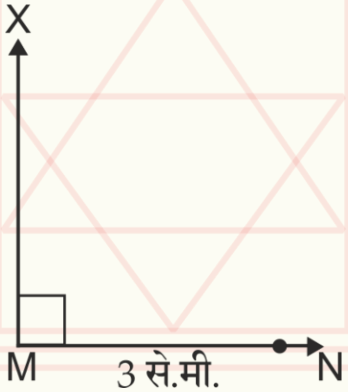
चरण 1) एक कच्चा चित्र खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अङ्कित कीजिए। समकोण अङ्कित करना याद रखिए।



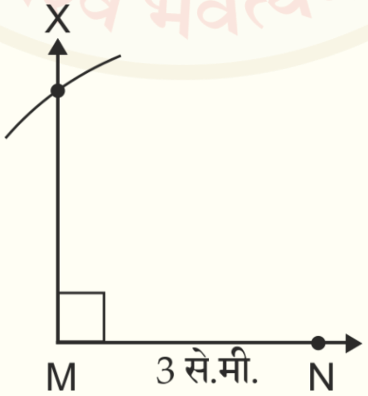
चरण 2) 3 से.मी. लम्बाई का रेखाखण्ड MN खींचिए।



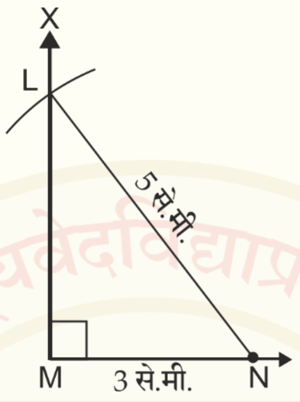
चरण 3) M पर MX ⊥ MN खींचिए। (इसके लिए M पर 90^0 का कोण बनाइए।)



चरण 4) N को केन्द्र मानकर 5 से.मी. का एक चाप खींचिए। (L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए क्योंकि यह N से 5 से.मी. की दूरी पर है।)



चरण 5) L को लम्ब रेखा MX पर और केन्द्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए । अत: L इनको दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा। LN को जोड़िए। अब त्रिभुज LMN प्राप्त होता है ।



करो और सीखो –

1. **समकोण त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए जहाँ ∠Q = 90^0 , QR = 8 से.मी.,** PR = 10 से.मी. हो ।

प्रश्नावली 9.2

1. किसी त्रिभुज की रचना के अभीष्ट मापों के आधार लिखिए।
2. ΔABC की रचना कीजिए जब $AB = 4$ से.मी., $BC = 3$ से.मी.,$CA = 5$ से.मी. हो।
3. ΔPQR की रचना कीजिए जब $PR = 6$ से.मी., $PQ = 4.5$ से.मी.तथा $\angle P = 90^0$ हो।
4. Δxyz की रचना कीजिए जब $xy = 4$ से.मी., $\angle x = 45^0$ तथा $\angle y = 50^0$ है।
5. ΔABC की रचना कीजिए जहाँ $\angle B = 90^0$, $AC = 5$ से.मी., $BC = 3$ से.मी. हो।

हमने सीखा –

1. इस अध्याय में हमने परकार की सहायता से कोणों की रचनाओं के बारे में अध्ययन किया।
   (1) 60^0, 120^0 एवं 180^0 की रचना
   (2) 30^0, 45^0, 90^0 के कोण की रचना (समद्विभाजन के द्वारा)
2. स्केल और परकार की सहायता से त्रिभुज की रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया।
   हम अभीष्ट त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। जब निम्न माप दिये हो-
   1. तीन भुजाएँ
   2. दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण
   3. दो कोण एवं उनके बीच की भुजा
   4. समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा

अध्याय - 10

वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल

प्यारे विद्यार्थियों ! पूर्व कक्षाओं में हम वृत्त से सम्बन्धित विभिन्न परिभाषाओं एवं गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके हैं ।आपको स्मरण होगा **वृत्त** किसी बिन्दु का बिन्दु पथ होता है । यह सरल किन्तु विशिष्ट ज्यामितीय आकार है । इसमें कोई शीर्ष या कोना नहीं होता एवं वृत्त पर सभी बिन्दु केन्द्र से समान दूरी पर होते हैं । इस अध्याय में हम वृत्त के पूर्व अभ्यास को दोहराते हुए, त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल एवं चाप कि लम्बाई ज्ञात करना सीखेंगे ।

वृत्त के पूर्व अभ्यास का पुनरावलोकन-

वृत्त की परिधि –

भारत के महान् गणितज्ञ 'श्रीधराचार्य' द्वारा लिखित 'त्रिशतिका' (पाटीगणितसार) पुस्तक में वृत्त की परिधि के बारे निम्न श्लोक बताया गया है।

'वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः'

(त्रिशतिका क्षेत्र. श्लो. 45)

अर्थात् $\text{परिधि} = \sqrt{10 \times \text{व्यास}^2}$

$\textbf{अतः पाई} = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$

आपको स्मरण होगा । एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका परिमाप होता है । जिसे प्राय: परिधि कहा जाता है । बटुकों ! वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है । इस अचर अनुपात को एक युनानी π (जिसे पाई से पढ़ा जाता है) से व्यक्त किया जाता है ।

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$$

परिधि = $\pi \times$ व्यास

परिधि = $\pi \times 2 \times$ त्रिज्या

या **वृत्त कि परिधि** = $2\pi r$

भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट द्वारा लिखित 'आर्यभट्टीयम्' पुस्तक में π के मान के विषय में निम्न श्लोक मिलता है ।

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।

अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नौ वृत्त परिणाहः ॥

(आर्यभट्टीयम् , गणितापाद श्लोक 10)

एक महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 – 550) ई.पू. ने π का सन्निकट मान दिया उन्होंने कहा कि $\pi = \frac{62,832}{20,000}$ होता है जो लगभग 3.1416 के बराबर होता है । इस बात पर भी ध्यान दीजिए कि एक महान प्रतिभाशाली **भारतीय गणितज्ञ 'श्रीनिवास रामानुजन'** (1887 – 1920) की एक सर्वसमिका का प्रयोग करके गणितज्ञ π का मान दशमलव के लाखों स्थानों तक परिकलित करने में समर्थ हुए । व्यवहारिक कार्यों के लिए हम प्राय: यह मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं ।

उदाहरण : वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें । जिसकी परिधि 44 से.मी. है ।

हल : दिया है, वृत्त की परिधि = 44 से.मी.

हम जानते हैं,

वृत्त की परिधि = $2\pi r$

या $2\pi r$ = 44 से.मी.

$$r = \frac{44}{2\pi}$$

$$r = \frac{44}{2 \times \frac{22}{7}}$$

$$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$$

$$r = 7 \text{ से.मी.}$$

अत:, वृत्त की त्रिज्या = 7 से.मी. हैं ।

वृत्त का क्षेत्रफल -

भास्कराचार्य जी द्वारा रचित लीलावती गणित में किसी वृत्त के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये निम्न श्लोक में एक रोचक विधि बताई गयी है ।

व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने सूक्ष्मं फलं पञ्चसहस्त्रभक्ते ।

रुद्राहते शक्रहृतेऽथवा स्यात् स्थूलं फलं तद्व्यवहारयोग्यम् ॥

(लीलावती गणित पृ.284)

उपर्युक्त श्लोक के अनुसार वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये वृत्त के, व्यास के वर्ग को 3927 से गुणाकर प्राप्त गुणनफल को 5000 से भाग देने पर वृत्त का क्षेत्रफल प्राप्त होता है ।

उदाहरणार्थ मान लीजिये- यदि वृत्त का व्यास 7 है तो उस वृत्त का क्षेत्रफल होगा ?

हल: वृत्त के व्यास 7 का वर्ग 49 को 3927 से गुणा करने पर गुणनफल 1,92,423 है जिसे 5,000 से भाग देने पर 38.84 प्राप्त हुआ। अत: वृत्त का क्षेत्रफल= 38.84 है ।

गतिविधि : हम किसी ग्राफ पेपर पर एक वृत्त बनाकर उस वृत्त के अन्दर छोटे-छोटे वर्गों को गिनकर अनुमानित वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात सकते हैं ।

सूत्र रूप में वृत्त का क्षेत्रफल को निम्न रूप में लिख सकते है ।

$$\frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{(\text{ त्रिज्या })^2} = \pi$$

यदि वृत्त का क्षेत्रफल A एवं त्रिज्या r है

$$\frac{A}{r^2} = \pi$$

$$\textbf{वृत्त का क्षेत्रफल } (A) = \pi r^2$$

उदाहरण : उस वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिकी त्रिज्या 7 से.मी. है ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 से.मी.

हम जानते हैं कि -

वृत्त की परिधि $= \mathbf{2\pi r}$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

$= 2 \times 22$

= 44 से.मी.

वृत्त का क्षेत्रफल $(A) = \boldsymbol{\pi r^2}$

$= \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 22 \times 7$

= 154 (से.मी.)^2

अत:, वृत्त की परिधि = 44 से.मी. एवं वृत्त का क्षेत्रफल = 154 (से.मी.)^2 हैं ।

प्रश्नावली 10.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) 44 मीटर परिधि वाले वृत्त की त्रिज्या होगी –

(I) 14 मीटर (II) 7 मीटर (III) 5 मीटर (IV) 44 मीटर

(ब) दो वृत्तों के क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 1 है, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात –

(I) 4 : 1 (II) 2 : 1 (III) 1 : 2 (IV) 1 : 4

(स) दो वृत्तों की परिधियाँ 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा –

(I) 4 : 9 (II) 2 : 3 (III) 3 : 2 (IV) 1 : 4

(द) π (पाई) = ...

(I) परिधि (II) $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ (III) $\frac{\text{व्यास}}{\text{परिधि}}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

(य) किसी वृत्त का क्षेत्रफल 64π cm^2 है। उसका व्यास कितना होगा ?

(I) 15 cm (II) 16 cm (III) 20 cm (IV) 17 cm

2. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें, जिसकी परिधि 66 से.मी. हो ।

3. यदि वृत्त की परिधि 88 से.मी. है, तो वृत्त की त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिए ।

4. यदि वृत्त की त्रिज्या 14 से.मी. है, तो वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

5. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. हो ।

6. वृत्त की त्रिज्या 2 से.मी. है, तो वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

7. एक वृत्त के चतुर्थांश (Quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 से.मी. है ।

वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल –

बटुकों ! याद रहे वृत्त की परिधि द्वारा केन्द्र पर 360^0 का कोण बनता है । जिसका प्रमाण ऋग्वेद में मिलता है ।

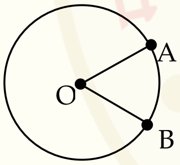
द्वादश प्रधयश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।

तस्मिन्त्साकं त्रिशता न शंकवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलास:।

(ऋग्वेद : 1/164/48)

अर्थात्, एक चक्र है जिसे द्वादश (बारह) अरे घेरे हुए हैं । उसके तीन प्रभाग (नाभियाँ) हैं । उसे कोई विद्वान (गणितज्ञ) ही जानते हैं । उसमें तीन सौ साठ (360) गतिशील कीलें संलग्न है । उपर्युक्त ऋचा(सत्यवचन) में किसी वृत्ताकार चक्र का वर्णन है, जो बारह अरों द्वारा धूरी से जुडा हुआ है । उसके तीन समान प्रभाग है । वह तीन सौ साठ (360) गतिशील तिलियों द्वारा (केन्द्र से) संलग्न है । इस चक्र के प्रत्येक प्रभाग केन्द्र पर एक सौ बीस (120) अंश का कोण निर्मित करता है ।

किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए, क्षेत्र को वृत्त का **त्रिज्याखण्ड** कहते है ।



वृत्त के त्रिज्याखण्ड के द्वारा घेरे गये क्षेत्र को **त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल** कहते है ।

$$\textbf{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$$

त्रिज्या के चाप AB की लम्बाई ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र -

$$\textbf{चाप की लम्बाई} = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

उदाहरण : यदि वृत्त का क्षेत्रफल 180 (से.मी.)^2 है और त्रिज्याखण्ड का कोण 90^0 है, तो चाप द्वारा बने लघु त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है, वृत्त का क्षेत्रफल = 180 (से.मी.)^2

त्रिज्याखण्ड का कोण = 90^0

तब हम जानते हैं,

त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$

$= 180^0 \times \frac{90}{360}$

$= \frac{90}{2}$

$= 45$ (से.मी.)^2

उदाहरण : यदि वृत्त की परिधि 90 से.मी. है तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 80^0 है, तो चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है, वृत्त की परिधि $(2\pi r) =$ 90 से.मी.

चाप द्वारा बना कोण $= 80^0$

तब हम जानते हैं,

चाप की लम्बाई $= 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

$= 90 \times \frac{80}{360}$

$=$ 20 से.मी.

उदाहरण : वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल एवं त्रिज्याखण्डों का केन्द्र पर अन्तरित कोण निम्नलिखित है ।

क्षेत्रफल $(\pi r^2) = 36$ (से.मी.)^2 , केन्द्र पर अन्तरित कोण $(\theta) = 50^0$

हल : हम जानते हैं

त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$

$= 36 \times \frac{50}{360}$

$= \frac{50}{10}$

$= 5$ (से.मी.)^2

अतः , त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 5 (से.मी.)^2 है ।

उदाहरण : यदि वृत्त की परिधि और त्रिज्याखण्ड के बीच का अन्तरित कोण निम्नलिखित चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

परिधि $(2\pi r) = 60$ से.मी., केन्द्र पर अन्तरित कोण $(\theta) = 54^0$

हल – हम जानते हैं-

त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई $= 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

$= 60 \times \frac{54}{360}$

$= \frac{54}{6}$

$=$ 9 से.मी.

प्रश्नावली 10.2

1. निम्न सूत्रों को लिखकर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

   (अ) वृत्त का क्षेत्रफल = ...

   (ब) वृत्त का परिधि = ...

   (स) त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल = ...

   (द) त्रिज्याखण्ड की चाप की लम्बाई = ...

2. त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की परिधि ($2\pi r$), त्रिज्याखण्ड द्वारा अन्तरित कोण (θ) निम्नलिखित है।

   अ) परिधि ($2\pi r$) = 120 से.मी., $\theta = 180^0$

   ब) परिधि ($2\pi r$) = 240 से.मी., $\theta = 150^0$

3. त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2) दोनों त्रिज्या द्वारा अन्तरित कोण निम्नलिखित है।

   अ) वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2) = 90 (से.मी.)^2, $\theta = 120^0$

   ब) वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2) = 36 (से.मी.)^2, $\theta = 15^0$

4. यदि वृत्त का क्षेत्रफल 40 (से.मी.)^2 तथा दो त्रिज्याओं के बीच का कोण 180^0 है तो वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

5. यदि वृत्त की परिधि 36 से.मी. है तथा दोनों त्रिज्याखण्ड के बीच का अन्तरित कोण 60^0 है, तो वृत्त के चाप की लम्बाई ज्ञात करें।

हमने सीखा –

1) यदि वृत्त की त्रिज्या (r) वाले **वृत्त की परिधि** = $2\pi r$

2) यदि वृत्त की त्रिज्या (r) वाले **वृत्त का क्षेत्रफल** = πr^2

3) त्रिज्या (r) वाले वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड जिसका कोण अंशों में θ है, के संगत

चाप की लम्बाई = $2\pi r \times \frac{\theta}{360}$ होती हैं ।

4) त्रिज्या (r)वाले वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड जिसका कोण अंशों में θ है, के संगत

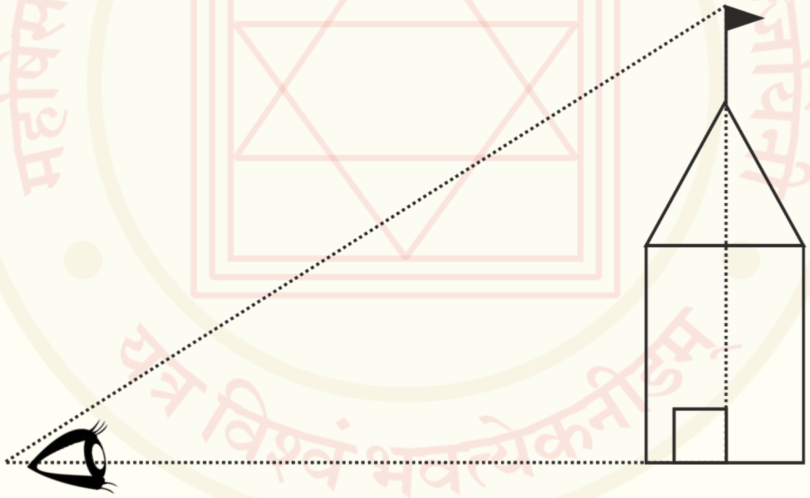
त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल = $\pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$ होता हैं।

अध्याय - 11

त्रिकोणमिति का परिचय

प्रिय बटुकों ! त्रिकोणमिति, गणित कि एक महत्त्वपूर्ण शाखा है । यह आकृति एवं स्थान की अवधारणाओं को अनुपात, निगमन और गणितीय प्रमाण जैसे अन्य गणितीय विचारों से जोड़ती है। यह वास्तविक जीवन में देखी जाने वाली चीज़ों को गणितीय कक्षा की दुनिया के साथ जोड़ने का अवसर भी देती है । आपने पूर्व कक्षाओं में 'बौधायन प्रमेय' के अन्तर्गत समकोण त्रिभुज के बारे में विस्तृत अध्ययन किया है ।

आइए, अपने आस-पास के परिवेश से कुछ उदाहरण लें । जहाँ समकोण त्रिभुज के बनने की कल्पना कर सकते हैं ।



मान लीजिए - एक गुरुकुल का विद्यार्थी मन्दिर के शिखर की ध्वजा को देख रहा हो, तो समकोण त्रिभुज बनने की कल्पना की जा सकती है, जैसा कि उपर्युक्त आकृति में दिखाया गया है । ऊपर बताई गई स्थिति में दूरी अथवा ऊँचाईयों कुछ गणितीय तकनीक जो **त्रिकोणमिति** नामक गणित की एक शाखा के अन्तर्गत आते हैं ।

त्रिकोणमिति –

भारतीय गणितज्ञ भास्कराचार्य जी ने 'सरलत्रिकोणमिति:' में त्रिकोणमिति के विषय में निम्न परिभाषा बतायी है ।

त्रिकोणस्य मानमेव त्रिकोणमिति शब्दार्थः, त्रिभुजस्य भुजानां कोणानां च परिमापनं तथा पारस्परिक सम्बन्धज्ञानमेवास्य मुख्यलक्ष्यमस्ति । भारतीयगणितशास्त्रे ज्योत्पत्त्या क्षेत्र – फलाध्यायेन च मूलरूपेण यद्गणितं तदेव विस्तरेण त्रिकोणमिति नाम्ना व्यवहृतम् ।

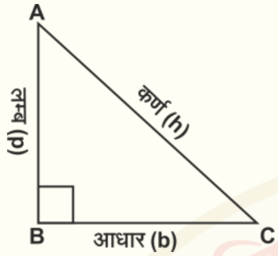
(सरलत्रिकोणमिति:, परिभाषा)

विद्वान लोग Trigonometry शब्द को संस्कृत से व्युत्पन्न मानते हैं त्रिशब्द Tri, से कोण शब्द से +gonia को मीङ् (माने) धातु से +metron को व्युत्पन्न मानते हैं, लगभग सुनने को trigonometry शब्द संस्कृत के त्रिकोणमिति जैसा यथावते ही है । त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है । अंग्रेजी के शब्द "Trigonometry" तीन शब्दों से मिलकर बना है, (Tri + gon + metron) अर्थात् अंग्रेजी शब्द का पूर्ण अर्थ है ''एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप'' है । प्राचीन काल में त्रिकोणमिति ज्ञान का प्रयोग पृथिवी से ग्रहों और तारों की दूरी को गणना किया जाता था । त्रिकोणमिति ज्ञान का प्रयोग मानचित्र बनाने एवं देशान्तर और अक्षांश के सापेक्ष एक द्विप कि स्थिति ज्ञात करने में किया जाता हैं ।

इस अध्याय में हम समकोण त्रिभुज का न्यूनकोण के सापेक्ष भुजाओं के अनुपात का अध्ययन करेंगे । जिन्हें कोणों के **त्रिकोणमिति अनुपात** कहते हैं ।

समकोण त्रिभुज –

त्रिभुज जिसमें एक कोण 90^0 हो, उसे **समकोण त्रिभुज** कहा जाता है। इसमें एक कोण समकोण (90^0) तथा दो न्यूनकोण (90^0 से कम) होते हैं।



यहाँ $\angle B$ = समकोण (90^0)

$\angle A$, $\angle C$ = न्यूनकोण हैं।

कर्ण (Hypotenous) –

समकोण त्रिभुज में समकोण (90^0) के सामने वाली भुजा **कर्ण** कहलाती है। यह त्रिभुज सबसे बड़ी भुजा होती है। इसे 'h' दर्शाते हैं।

आधार (Base) –

समकोण त्रिभुज किसी एक न्यूनकोण के संलग्न भुजा **आधार** कहलाती है। इसे 'b' दर्शाते हैं।

लम्ब (perpendicular)–

समकोण त्रिभुज में न्यूनकोण के सामने वाली भुजा **लम्ब** कहलाती है इसे 'P' से दर्शाते हैं।

बौधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय) –

वैदिक वाङ्मय के 'मानवशुल्बसूत्रम्' में बौधायन प्रमेय का निम्न श्लोक मिलता है।

सूत्र – **आयाममायामगुणं विस्तारं विस्तरेण तु।**

समस्य वर्गमूलं यत्तत्कर्णं तद्विदो विदुः॥

(मानवशुल्बसूत्रम् / 10.10)

अर्थात्, समकोण त्रिभुज के लम्ब को लम्ब से तथा आधार को आधार से गुणा कर उनका योगफल का वर्गमूल निकालने पर इसके करण की लम्बाई का माप प्राप्त होती है। बौधायन प्रमेय का

मानवशुल्बसूत्र (10.10) के अतिरिक्त बौधायन शुल्बसूत्र (1.48) एवं लीलावती गणित (क्षेत्रव्यवहार श्लोक 2) में भी उल्लेख मिलता है ।

1. बौधायन प्रमेय एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच सम्बन्ध को दर्शाता है ।

बौधायन (पाइथागोरस प्रमेय) – समकोण त्रिभुज में

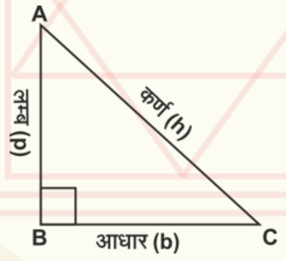
$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(h)^2 = (p)^2 + (b)^2$$

जहाँ h = कर्ण, p = लम्ब एवं b = आधार है ।

त्रिकोणमिति अनुपात –

समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों के सापेक्ष त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात कोणों के **त्रिकोणमिति अनुपात** कहलाते हैं ।



मान लीजिए कि ∠C न्यूनकोण है, तब न्यूनकोण के सामने वाली भुजा AB लम्ब होगी व BC संलग्न भुजा आधार है तथा समकोण ∠B के सामने वाली भुजा AC कर्ण (h) है ।

∠C का sine को संक्षेप में "sin C" लिखा जाता है ।

नोट : यहाँ "sin C" का अर्थ "sin " गुणा C नहीं होता है । बल्कि ∠C का sin C है ।

$$\text{sine } C = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{कर्ण } (h)} \quad , \quad \text{cosecant } C = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{लम्ब } (p)}$$

$$\text{cosine } C = \frac{\text{आधार } (b)}{\text{कर्ण } (h)} \quad , \quad \text{secant } C = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{आधार } (\text{b})}$$

$$\text{tangent } C = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{आधार } (b)} \quad , \quad \text{cotangent } C = \frac{\text{आधार } (\text{b})}{\text{लम्ब } (p)}$$

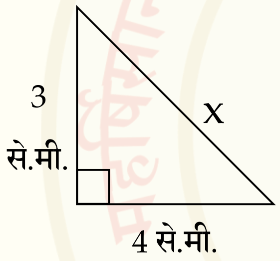
समकोण त्रिभुज के भुजाओं से तीन अनुपात को संक्षेप में $\sin C$, $\cos C$ एवं $\tan C$ त्रिकोणमिति अनुपात है । इन तीन अनुपात को बदल देने पर तीन और अनुपात $\operatorname{cosec} C$, $\sec C$, $\cot C$ बनेंगे। अतः, न्यूनकोण के सापेक्ष **छः त्रिकोणमिति अनुपात** होते हैं ।

उदाहरण : किसी समकोण त्रिभुज में लम्ब 3 से.मी. एवं आधार 4 से.मी. है तो कर्ण की माप क्या होगी ?

हल : दिया है, समकोण त्रिभुज में लम्ब 3 से.मी. एवं आधार 4 से.मी.

तब हम जानते हैं -

बौधायन प्रमेय -



$$\textbf{(कर्ण)}^2 = \textbf{(लम्ब)}^2 + \textbf{(आधार)}^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 = 9 + 16$$

$$(\text{कर्ण})^2 = 25$$

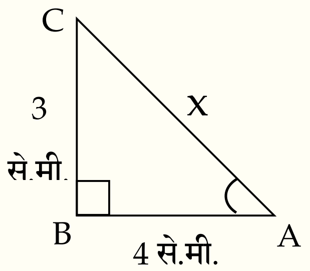
$$\text{कर्ण} = \sqrt{25}$$

$$= 5 \text{ से.मी.}$$

उदाहरण : यदि $\tan A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\sin A$ का मान परिकलित कीजिए ।

हल : दिया है, $\tan A = \frac{3}{4}$

तब हम जानते हैं $\tan A = \frac{3}{4} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$



तब बौधायन प्रमेय से

$$\textbf{(कर्ण)}^2 = \textbf{(लम्ब)}^2 + \textbf{(आधार)}^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$(\text{कर्ण})^2 = 9 + 16$$

$$(\text{कर्ण})^2 = 25$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{25} = 5 \text{ से.मी.}$$

तब, $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$

बौधायन (पाइथागोरस) त्रिक

उपर्युक्त उदाहरण में 3, 4 एवं 5 बौधायन (पाइथागोरस) त्रिक हैं। आपको स्मरण होगा - **एक समकोण त्रिभुज में (कर्ण) का वर्ग मान अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।**

बौधायन प्रमेय से,

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

इसका आशय सभी तीनों भुजाएँ एक विशेष परिस्थितियों में सम्बन्धित है **वैदिक गणित** में तीव्र गति से गणना करने के लिए आपको बौधायन त्रिक (पाइथागोरस त्रिक) याद करना होगा।

तासां त्रिक चतुष्कयो: द्वादशिक पंचिकयो: पञ्चदशिकाष्टिकयो: सप्तिक चतुर्विंशिकयो: द्वादशिक पञ्चत्रिंशिकया: पञ्चदशिक षट्त्रिंशिकयो: इत्येतासु उपलब्धि:।

(**बौधायन शुल्बसूत्र** 1.38)

उपर्युक्त बौधायन शुल्बसूत्र के श्लोकानुसार आपकी सहायता के लिए बौधायन त्रिक की सारणी निम्न है।

A	B	C
3	4	5
12	5	13
15	8	17
7	24	25
12	35	37
15	36	39

6	8	10
8	15	25
9	40	41
9	12	15
12	15	18
...	...	...
3n	**4n**	**5n**

उपर्युक्त सारणी से मान लीजिए एक समकोण त्रिभुज की दो भुजाएँ 3 और 4 है तथा आपको इसकी सबसे बड़ी भुजा अर्थात् कर्ण पता करना है ? परम्परागत विधि से आपको इसके लिए पाइथागोरस (बौधायन प्रमेय) का प्रयोग करेंगे, जैसा कि आपने उदाहरण में प्रयोग किया है । दूसरी ओर अगर आप उक्त त्रिक से परिचित है, तो एक पल से भी कम से कम समय में वैदिक गणित की विधि से बता देगें की तीसरी भुजा 5 है ।

करणानि ततोऽस्या:कारयेत्त्रिचतु:पञ्चत्रिरभिपर्यस्य यच्चुभयम्

चयनेषु विधि: पुरातनैर्ऋषिभिर्योऽभिहितश्च नित्यश:।

(बौधायन शुल्बसूत्र 11. 17)

उपर्युक्त सूत्र में बौधायन प्रमेय से समकोण त्रिभुज के वर्ग का सामान्य सूत्र बताया गया है । जो निम्न है-

$$(5n)^2 = (3n)^2 + (4n)^2$$

जहाँ n शून्येतर संख्या है। यदि n = 2 हो तो -

$$(10)^2 = (6)^2 + (8)^2$$

आइए, पाइथागोरस त्रिक की गणना करना सीखते हैं ।

स्थिति 1: जब संख्या विषम हो ।

हम जानते हैं कि किसी विषम संख्या का वर्ग भी विषम संख्या होता है यह वर्ग दो क्रमागत संख्याओं का योग होता है, अगर आप त्रिक में से किसी एक का मान जानते हैं, तो शेष दो के मान सरलता से ज्ञात कर सकते हैं ।

निम्न उदाहरण को ध्यान से देखिए ।

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

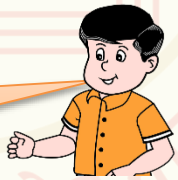
$9^2 = 81 = 40 + 41$

उपर्युक्त उदाहरण को आप देखते हैं, तो पता चलेगा, कि किसी विषम संख्या के वर्ग को दो क्रमागत (एक के बाद एक) संख्याओं में बॉटते हैं, तो उनसे एक त्रिक का निर्माण होता है ।

$3^2 = 9 = 4 + 5$ से (3 , 4 , 5) त्रिक बनता है ।

इस प्रकार से, (5 , 12 , 13) , (9 , 40 , 41) ,......... **बौधायन (पाइथागोरस) त्रिक** है ।

प्रत्युष : किसी संख्या के क्रमागत युग्म कैसे प्राप्त करते हैं ?



गुरुजी - बहुत आसान है । वर्ग का 2 से भाग दे और पूर्णाङ्क बना दें ।

पहले उदाहरण में 3 का वर्ग 9 है अर्थात् $3^2 = 9$ इसे 2 से भाग देने पर 4.5 मिलता है । 4.5 को पूर्णाङ्क में बदलने पर अगली संख्या 5 और पिछली संख्या 4 मिलती है । इस प्रकार **(3 , 4 , 5)** मिलकर एक त्रिक बनाता है । जिसमें बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर होता है ।

दूसरे उदाहरण में, 5 का वर्ग 25 है। जब 25 को 2 से भाग देने पर 12.5 प्राप्त होता है। 12.5 आगे-पीछे के पूर्णाङ्क 12 व 13 होंगे। **मजे की बात यह कि (5 , 12 , 13) त्रिक निर्माण करते है।**

स्थिति 2: जब संख्या सम हो।

नियम – संख्या को 2 , 4 , 8 आदि से भाग दें जिससे आपको विषम संख्या प्राप्त होती है। विषम संख्या प्राप्त **स्थिति** 1 में बताये गये , नियम लागु करें। अगर आपने संख्या को सम संख्या 2, 4, 8 आदि से भाग दिया है तो अन्तिम उत्तर का भागफल से गुणा करने पर त्रिक मिलेगी।

आइए, उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण : त्रिक का मान 6 है, तो अन्य दो मान ज्ञात करें।

हल : संख्या 6 को 2 से भाग देकर विषम संख्या हासिल करें। ऊपर बताए अनुसार 3 के लिए -

त्रिक $3^2 = 9 = 4 + 5$

अत: त्रिक 3, 4 और 5 है, चूंकि हमने 2 से भाग दिया था।

इसलिए, हमें सभी मानों में 2 से गुणा करने पर

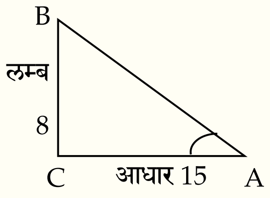
$2 \times 3 , 2 \times 4 , 2 \times 5$

अत:, 6 द्वारा बनने वाला त्रिक 6 , 8 , 10 है।

त्रिकोणमिति अनुपात की गणना -

उदाहरण : अगर $\tan A = \frac{8}{15}$ तो अन्य त्रिकोणमिति अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan A = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{आधार } (b)} = \frac{8}{15}$



वैदिक गणित त्रिक सारणी से ज्ञात हो सकता है।

लम्ब = 8, आधार = 15, कर्ण = 17

अत :,

$\sin A = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{कर्ण } (h)} = \frac{8}{17}$ $\quad$ $\text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{लम्ब } (p)} = \frac{17}{8}$

$\cos A = \frac{\text{आधार } (b)}{\text{कर्ण } (h)} = \frac{15}{17}$ $\sec A = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{आधार } (b)} = \frac{17}{15}$

$\cot A = \frac{\text{आधार } (b)}{\text{लम्ब } (p)} = \frac{15}{8}$

तीन अनुपात के मान आसानी से ज्ञात करने के बाद आप अन्य भी बता सकते हैं। क्योंकि $\operatorname{cosec} A$, $\sin A$ का विलोमनुपाती है । $\sec A$, $\cos A$ का विलोमानुपाती है । $\tan A$, $\cot A$ का विलोमानुपाती होता है ।

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) यदि sin A = 3/4, तो cosec A का मान होगा –

(I) 4/3 (II) 3/4 (III) 3/5 (IV) 5/4

(ब) यदि sec A = 5/3, तो tan A का मान क्या होगा ?

(I) 4/3 (II) 3/4 (III) 3/5 (IV) 5/4

(स) यदि sin A = 3/4 , तो cos A का मान क्या होगा ?

(I) $\frac{4}{3}$ (II) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (III) $\frac{\sqrt{4}}{3}$ (IV) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

(द) निम्न में कौन $\cot\theta$ के बराबर है ।

(I) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (II) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (III) $\frac{1}{\sec\theta}$ (IV) $\frac{1}{\sin\theta}$

2. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें ।

($\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$, $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, cosec A, कर्ण , (लम्ब)^2, लम्ब , कर्ण , 6)

अ) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने बननी वाली भुजा................कहलाती है।

ब) किसी त्रिभुज में न्यूनकोण के सम्मुख बनने वाली भुजा ....कहलाती है ।

स) बौधायन का प्रमेय - (कर्ण)^2 = ...+ (आधार)^2

द) त्रिकोणमितीय अनुपात की संख्या..................है ।

य) समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा..................होती है ।

प) sin A का विलोमानुपाती........................होता है ।

फ) tan A= ________________है ।

ह) sec A= ________________है ।

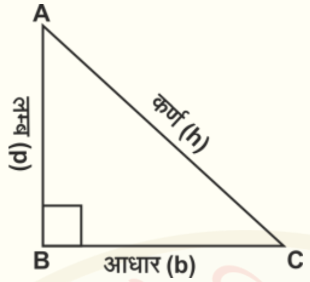
3. यदि tan $A = \frac{3}{4}$ है, तो $cotA$ का मान क्या ज्ञात कीजिए ।

4. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ है, तो $tanA$ व $cotA$ का मान ज्ञात करें ।

5. यदि $\cos A = \frac{5}{13}$ है, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें ।

हमने सीखा –

1) समकोण त्रिभुज ABC है जिसका कोण B समकोण (90^0) है । तब,



$\sin C = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{कर्ण } (h)}$, $cosec\ C = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{लम्ब } (p)}$

$\cos C = \frac{\text{आधार } (b)}{\text{कर्ण } (h)}$, $\sec C = \frac{\text{कर्ण } (h)}{\text{आधार } (\mathrm{b})}$

$\tan C = \frac{\text{लम्ब } (p)}{\text{आधार } (b)}$, $\cot C = \frac{\text{आधार } (\mathrm{b})}{\text{लम्ब } (p)}$

2) त्रिकोणमिति अनुपात $cosec\ A$, $\sin A$ का विलोमनुपाती है $\sec A, \cos A$ का विलोमानुपाती है, $\tan A$, $\cot A$ का विलोमानुपाती होता है ।

3) पाइथागोरस त्रिक बनाने की वैदिक विधि का अध्ययन किया ।

अध्याय - 12

सांख्यिकी

प्रिय बटुकों ! हमने पिछली कक्षाओं में सांख्यिकी की कुछ संकल्पनाओं के बारे में चर्चा की थी। आपको याद होगा- आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण, सारणीकरण तथा ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कर आंकड़ों को समझने के लिए सरल एवं युग्म बनाये जाते हैं । साधारण भाषा में शब्द सांख्यिकी का उपयोग आंकड़ों या संख्यात्मक सूचनाओं के लिए किया जाता है ।

सांख्यिकी में विभिन्न अवर्गीकृत आंकड़ों का संक्षेपी करण कर उनके मानों का अध्ययन किया जाता है । जिसे प्रस्तुत करने के लिए एक मान का प्रयोग किया जाता है । जिसे हम **केन्द्रीय माप** के रूप में अध्ययन करेंगे ।

अवर्गीकृत आंकड़ों के प्रस्तुत करने के लिए एक मान प्रयोग किया जाता है इस मान को **केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप** (Measure of Central Tendancy) कहते हैं ।

सामान्यत: केन्द्रिय प्रवृत्ति की माप के लिए समान्तर माध्य या माध्य (औसत), माध्यिका और बहुलक का प्रयोग किया जाता है ।

माध्य (Mean) की गणना -

अवर्गीकृत आंकडों से समान्तर की गणना करना ।

अवर्गीकृत आंकडों का समान्तर माध्य चर के दिए गए सभी मानों के योगफल को मानों की कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है । मान लीजिए कि मानों की कुल संख्या n है और विचारधीन चर x है तथा $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ अवर्गीकृत आंकडों में x का मान है, तब माध्य की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है ।

परिभाषा –

समान्तर माध्य (माध्य) वह संख्या है जो पद मानों के योगफल को पद-संख्या द्वारा विभाजित करने से प्राप्त होता है। माध्य को ($\bar{x}$) से दर्शाया जाता है।

अतः,

$$\text{माध्य} = \frac{\text{पदमानों का योगफल}}{\text{पदों की कुल संख्या}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

नोट : प्रतीक $\sum_{i=1}^{n} X_i$ योगफल को प्रदर्शित करता है। '$\sum$' यह ग्रीक भाषा का अक्षर है इसे **सिग्मा** पढ़ते है।

उदाहरण : किसी टोकरी से निकाले गये 10 सेबों का भार निम्नलिखित है।

150 ग्रा., 200 ग्रा., 175 ग्रा., 170 ग्रा., 250 ग्रा., 215 ग्रा., 220 ग्रा., 260 ग्रा., 270 ग्रा., 190 ग्रा. है तो एक सेंब का माध्य भार ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{एक सेंब का माध्य भार} = \frac{\text{फलों का भार}}{\text{फलों की संख्या}}$$

$$= \frac{150+200+175+250+215+220+260+270+190}{10}$$

$$= \frac{2100}{10} \text{ ग्राम}$$

$$= 210 \text{ ग्राम}$$

यदि सभी सेबों का भार का अवलोकन करें तो हम देखते हैं, कि सेबों के भार माध्य के आस-पास है। **माध्य सबसे कम एवं सबसे अधिक भार के बीच होता है।**

प्रश्नावली 12.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) यदि x, 3, 4 और 5 का माध्य 4 हो , तो x का मान होगा –

(I) 4 (II) 60 (III) 10 (IV) 5

(ब) प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य है –

(I) 2 (II) 3 (III) 2.5 (IV) 4

(स) प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का माध्य होगा –

(I) 2 (II) 3 (III) 1 (IV) 4

(द) यदि 1, 4 , x, 5, 12 का माध्य 7 है , तब x बराबर है –

(I) 15 (II) 13 (III) 14 (IV) 16

(प) संख्या a ,b तथा c का गणितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन-सा होगा–

(I) abc (II) $\frac{a+b+c}{3}$ (III) b (IV) $\frac{a+c}{3}$

(फ) प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का माध्य होगा –

(I) 6 (II) 5 (III) 8 (IV) 4

2. एक गुरुकुल में वेदभूषण पञ्चम वर्ष के 10 विद्यार्थी के गणित विषय के परीक्षा में प्राप्तांक क्रमशः 7, 8, 5, 7 , 7, 8, 9, 6, 7, 6 अङ्क हैं तो प्राप्तांक का माध्य या औसत ज्ञात कीजिए।

3. क्रिकेट के एक खिलाड़ी ने 10 पारियों में 60, 62, 56, 64, 0, 57, 32, 27, 9 और 71 रन बनाए । तो इन पारियों के रनों का औसत ज्ञात कीजिए ।

4. 5 मोटर साइकिल सवारी की गति कि.मी./घण्टा रिकार्ड की गई जो निम्नलिखित है ।

55, 60, 30, 45, 40 इनका माध्य ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका (median)–

अवर्गीकृत आंकड़ों की माध्यिका अवर्गीकृत आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य की राशि का मान **माध्यिका** कहलाता है ।

मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों की कुल संख्या n है, n विषम या सम संख्या हो सकती है । अवर्गीकृत आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लेते है । इस प्रकार, क्रम में व्यवस्थित आंकड़ों में मानों की **संख्या n विषम होने पर मध्य का मान केवल एक होगा । जो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान होगा** । जिसे माध्यिका कहते हैं, परन्तु मानों की **संख्या n सम होने पर मध्य में दो मान क्रमश: $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ पद और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वाँ पद का मान होगें,** तब इन दोनों मानों के समान्तर माध्य को हम **माध्यिका** मानते हैं ।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु -

1) यदि n विषम है तो माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वे पद का मान

2) यदि n सम है तो माध्यिका $= \dfrac{\frac{n}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$

1. **जब n विषम हो**

उदाहरण : निम्नलिखित मानों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

15 , 35 , 18 , 26 , 19

हल : आरोही क्रम में रखने पर,

15 , 18 , 19 , 26 , 35

यहाँ n = 5 (विषम संख्या)

माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ के पद का मान

$= \frac{5+1}{2}$ के पद का मान

$= \frac{6}{2} =$ 3 वें पद का मान

अत:, 3 वें पद का मान = 19 है ।

2. **जब n सम हो**

उदाहरण : निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

17 , 15 , 8 , 1 , 6 , 5 , 11 , 3

हल : दिये गये, आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

1 , 3 , 5 , 6 , 8 , 11 , 15 , 17

यहाँ कुल पद (n) = 8 (सम संख्या)

अत: , **माध्यिका** $= \dfrac{\frac{n}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{8}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$

$= \dfrac{4 \text{ वे पद का मान} + 5 \text{ वे पद का मान}}{2}$

$= \dfrac{6+8}{2}$

$= \dfrac{14}{2} = 7$

अत:, दिये गये आंकड़ों की माध्यिका = 7 हैं ।

प्रश्नावली 12.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) 18, 13, 17, 12, 16, 19 की माध्यिका है –

(I) 15 (II) 16.5 (III) 19 (IV) 17.5

(ब) चर-मान 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की माध्यिका क्या होगी ?

(I) 4 (II) 5 (III) 3.5 (IV) 6

(स) चरों को आरोही या अवरोही क्रम में रखने पर बीच वाले चर का मान कहलाता है ।

(I) माध्यिका (II) माध्य (III) बहुलक (IV) इनमें से कोई नहीं

(द) चर 7 , 8 , 10 , 9 और 6 की माध्यिका क्या होगी ?

(I) 6 (II) 7 (III) 8 (IV) 10

(प) 5 , 3 , 7, 6 , 4 , 2 , 1 की माध्यिका क्या होगी ?

(I) 5 (II) 4 (III) 3 (IV) 2

2. निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करें । (जब n = सम संख्या हो)

अ) 21 , 18 , 12 , 14 , 3 , 4

ब) 1 , 8 , 15 , 21 , 34 , 12 , 3 , 6

स) 20 , 50 , 30 , 40 , 10 , 70

3. निम्न आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करें । (जब n = विषम संख्या हो)

अ) 18 , 35 , 12 , 15 , 8

ब) 1 , 12 , 17 , 8 , 5 , 21 , 34 , 42 , 3

स) 2 , 4 , 5 , 6 , 17, 11 , 0

बहुलक (Mode) –

बहुलक वह पद मान है, जो दिए हुए आंकड़ों में सबसे अधिक बार आया हो अर्थात् जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक हो, साधारण शब्दों में यह **अधिकतम बारम्बारता वाला मान बहुलक होता है।**

आइए, निम्नलिखित उदाहरण से हल समझते हैं।

उदाहरण : निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

6 , 9 , 2 , 3 , 4 , 2 , 12 , 9 , 7 , 8 , 9 , 5 , 9

हल : हम जानते है कि बहुलक उस पद का मान होता है, जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है।

दी गई राशियों की बारम्बारता सारणी निम्न है।

पदमान	2	3	4	5	6	7	8	9	12
बारम्बरता	2	1	1	1	1	1	1	4	1

यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता वाला आंकड़ा 9 है। (अर्थात् चार बार 9 आया है)

अतः, उपर्युक्त आंकड़ों का बहुलक = 9 है।

उदाहरण : निम्नलिखित प्रेक्षणों (आंकड़ों) का बहुलक ज्ञात करें।

8 , 1 , 3 , 2 , 3 , 3 , 4 , 5 , 3 , 3 , 6 , 2 , 2

हल : उपर्युक्त दिए गए आंकड़ों बारम्बारता सारणी

पदमान	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता	1	3	5	1	1	1

यहाँ प्रेक्षण 3 का मान अधिक बारम्बारता 5 है।

अतः, उपर्युक्त आंकड़ों का बहुलक = 3 है।

प्रश्नावली 12.3

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) किसी बारम्बारता का बहुलक होता है –

(I) कम से कम बारम्बारता मान (II) माध्यतम बारम्बारता मान

(III) अधिकतम बारम्बारता मान (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) निम्नलिखित में कौन 3, 5, 0, 3, 5, 5, 4, 5 का बहुलक है ?

(I) 3 (II) 2 (III) 5 (IV) 4

(स) 4, 2, 5, 2, 0, 7, 7 , 7 का बहुलक है –

(I) 7 (II) 2 (III) 5 (IV) 4

2. निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

अ) 10 , 8 , 15 , 10 , 12 , 10 , 8 , 15 , 10 , 12 , 13

ब) 1 , 5 , 4 , 5 , 3 , 5 , 2 , 1 , 5 , 5 , 2 , 3

स) 1 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 5 , 5 , 5

हमने सीखा –

1) **माध्य** – समान्तर माध्य वह संख्या है जो पद मानों के योगफल को पद संख्या द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त होता है । माध्य को' $\bar{x}$ 'से दर्शाया जाता है ।

अब, **माध्य** $\bar{x} = \frac{\text{पदमानों का योगफल}}{\text{पदों की कुल संख्या}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

2) **माध्यिका** – अवर्गीकृत आंकड़ों को आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य राशि का मान **माध्यिका** कहलाता है ।

3) जब पदों की संख्या n = सम संख्या हो –

$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2} \text{ वे पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वे पद का मान}}{2}$$

4) जब पदों की संख्या n = विषम संख्या हो –

$$\text{माध्यिका} = \frac{n+1}{2} \text{ वे पद का मान}$$

5) **बहुलक** – अवर्गीकृत आंकड़ों का बहुलक वह आंकड़ा जिसकी सबसे अधिक बारम्बारता हो, **बहुलक** कहलाता है ।

अध्याय - 13

प्रायिकता

मेरे स्नेही बटुकों ! पूर्व कक्षा में हम प्रायिकता विषय के बारे में पढ़ चुके हैं । आपको स्मरण होगा। प्रायिकता सिद्धान्त में हम घटनाओं के होने की सम्भावना का आंकिक अध्ययन करते हैं । प्रायिकता सिद्धान्त का अनुप्रयोग विभिन्न क्षेत्रों (सांख्यिकी ,गणित ,विज्ञान, दर्शनशास्त्र) में बहुत प्रयोग होता है । इस अध्याय में हम प्रायिकता के बारे विस्तृत अध्ययन करेंगे ।

वास्तव में कुछ प्रश्न ऐसी भी होते हैं जो अनिश्चियतताओं पर आधारित है । जिनके लिए परिणाम अनुकूल या प्रतिकूल हो सकता है । निम्नलिखित सरल प्रयोगों पर विचार कीजिए ।

अ) एक सिक्के को उछाल कर चित्त या पट्ट परिणाम को अङ्कित करना ।

ब) एक पासे को फेंकने पर सम संख्या का परिणाम प्राप्त करना ।

चित्त पट्ट पांसा

इन उपयोगों से हम किसी निश्चियता पर नहीं पहुँच सकते हैं, परिणाम हमारे अनुकूल होगा या प्रतिकूल की स्थिति सम्भावनाओं पर निर्भर करती है ।

वेद में सम्भावना या सन्देह अर्थ में अव्यय (निपातवाची) **नूनं** शब्द का प्रयोग हुआ हैं । इसके सन्दर्भ में यह मन्त्र हैं -

न नूनमस्ति नो श्वः कस्तद् वेद यदद्भुतम् ।

अन्यस्य चित्तमभि संचरेण्य मुताधीतं वि नश्यति ॥

(ऋग्वेद : 1/170/1)

अर्थात्, जो आज मेरे लिए नहीं है, वह कल मुझे प्राप्त होगा । इसकी सम्भावना नहीं कही जा सकती, क्योंकि चित्त चंचल मनुष्यों की प्रवृत्ति सन्देहप्रद होती है ।

अत: प्रायिकता किसी घटना होने पर सम्भावनाओं का परिणामों बोधक संख्यात्मक निरूपण है। प्रायिकता वह अवधारणा है, **जिनसे घटनाओं के घटित होने या न होने की सम्भावनाओं को संख्यात्मक रूप से व्यक्त किया जा सके ।**

प्रायिकता की परिभाषा –

यदि किसी अभिप्रयोग के कुल n परिणामों और उनमें से m परिणाम किसी विशेष (अनुकूल परिणाम) A घटना के अनुकूल हो, तो A की प्रायिकता का अनुपात $\frac{m}{n}$ द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे सङ्केत P(A) से व्यक्त करते हैं । अत:

$$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना का घटना निश्चित हो, तो (n = m) होगा तथा

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1$$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो, तो m = 0 तथा

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0$$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

अर्थात् किसी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 अधिक नहीं हो सकती है, और **प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है** । घटना के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा दर्शाते हैं ।

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A की प्रतिकूल स्थिति}}{\text{घटना A के कुल स्थिति}}$$

$$= \frac{n-m}{n}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}$$

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(\bar{A}) + P(A) = 1$

सङ्केत -

1) $P(A)$ = घटना (A) के घटित होने की प्रायिकता

2) $P(\bar{A})$ = घटना (A) की घटित न होने की प्रायिकता

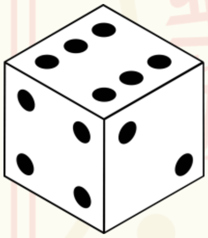
आइए, उदाहरण के माध्यम से समझतें हैं।

उदाहरण : एक पासे का फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : एक पासे के फेंकने पर 6 तरह अङ्क (1, 2, 3, 4, 5, 6) आ सकते हैं ।

अत: कुल परिणामों की संख्या = 6

अनुकूल परिणामों की संख्या (2, 4, 6) = 3



तब **प्रायिकता** $= \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \frac{3}{6}$

या $= \frac{1}{2}$

अत: पासे फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$ हैं ।

उदाहरण : दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दोनों सिक्को पर हेड (चित्त) आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : दो सिक्कों एक साथ उछालने पर कुल सम्भव परिणाम निम्न होंगे ।

(H, H) , (T, H) , (H, T) , (T, T)

अत:, कुल परिणामों की संख्या = 4

इनमें से घटना के अनुकूल परिणाम = 1 (H, H)

अत:　　$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \frac{1}{4}$

अत:, दोनों सिक्कों पर हेड (चित्त) आने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$ हैं।

उदाहरण : एक पासे के फेंकने पर उसके फलक पर अङ्क 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : घटना के कुल परिणामों की संख्या 6 इनमें 1, 2, 3, 4, 5 एवं 6 शामिल है। इन कुल परिणामों में अङ्क 9 शामिल नहीं है, अत: हमें अङ्क 9 की प्राप्ति नहीं होगी अर्थात् 9 की प्राप्ति असम्भव है

यहाँ अनुकूल परिणामों की संख्या 0 है एवं कुल परिणाम की संख्या 6 है।

अत:,　　**P (अङ्क 9 की प्राप्ति)** $= \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \frac{0}{6} = 0$

अत:, पासे के फलक पर अङ्क 9 आने की प्रायिकता = 0 हैं। जो कि असम्भव प्रायिकता हैं।

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें ।

(अ) किसी पासे को फेंकने में अङ्क 5 के ऊपर आने की प्रायिकता है –

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{1}{3}$ (III) $\frac{1}{5}$ (IV) $\frac{1}{6}$

(ब) एक सिक्का को उछालने पर एक चित्त आने की प्रायिकता होगी –

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{2}{3}$ (III) $\frac{2}{2}$ (IV) $\frac{1}{4}$

(स) एक पासा फेंकने पर एक सम संख्या आने की प्रायिकता है –

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{2}{3}$ (III) $\frac{1}{3}$ (IV) $\frac{1}{6}$

(द) निश्चित घटना की प्रायिकता या प्रायिकता का अधिकतम मान होता है ।

(I) 0 (II) 1 (III) $\frac{1}{4}$ (IV) 2

(प) किसी प्रयोग के सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग कितना होता है ?

(I) 0 (II) 1 (III) -1 (IV) 4

2. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(0 और 1 , 1 , 0 , 1 , P(A) , 6)

1) प्रायिकता का मान ....और...............के मध्य होता है ।

2) किसी घटना के निश्चित होने की प्रायिकता..................है ।

3) यदि कोई घटना का घटना (e) असम्भव हो तो प्रायिकता................होगी ।

4) एक पासे को फेंकने पर कुल परिणामों की संख्या..............है ।

5) $P(\bar{A}) + P(A) =$ ______

6) $P(\bar{A}) = 1 -$ ________

3. एक पासे के फेंकने पर 4 से बड़ा अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

4. एक पासे को उछालने उसके फलक पर विषम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

5. दो सिक्कों का एक साथ उछालने पर दोनों सिक्कों पर टेल (पट्ट) आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

6. एक पासे को फेंकने उसके फलक पर अङ्क 8 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

7. यदि P(A) = 0.05 है तो $P(\bar{A})$ ज्ञात कीजिए ।

8. एक पासे को एक बार फेंका जाता है । निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:
   (1) एक अभाज्य संख्या हो
   (2) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या हो
   (3) एक विषम संख्या हो

9. एक थैले में 4 लाल और 6 काली गोलियाँ हैं । एक गोली निकालने पर इसके काली होने की प्रायिकता है –

10. यदि अङ्कों 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 में से एक अङ्क चुना जाए तो उसके सम होने की प्रायिकता है –

हमने सीखा –

1) प्रायिकता वह अवधारणा है, जिसमें घटनाओं के घटित होने या न होने की सम्भावना को संख्या रूप में व्यक्त किया जा सके ।

   1. घटना A के अनुकूल होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}} = \frac{m}{n}$$

   2. घटना A नहीं घटने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना } \mathbf{A} \text{ कीअनुकूल स्थिति}}{\text{घटना } \mathbf{A} \text{ के कुल स्थिति}}$$

$$= \frac{n-m}{n}$$

या $= 1 - \frac{m}{n}$

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

या $P(\bar{A}) + P(A) = 1$

2) **प्रायिकता की सीमा-**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

अध्याय - 14

संख्यात्मक एवं तार्किक अभियोग्यता

प्रिय बटुकों ! पूर्व कक्षाओं में आपने गणितीय संकल्पनाओं के सैद्धान्तिक पक्ष को व्याख्यात्मक ढंग से समझा है । गणित विषय के अध्ययन से विद्यार्थियों की बुद्धिमत्ता एवं तार्किक ज्ञान की क्षमता बड़ती है । प्रतियोगी परीक्षा में प्रतिभागी की तर्कशक्ति को जाँचने के लिए विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं । क्या आपने कभी सोचा है ? विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में तर्कशक्ति में पूछे जाने वाले अनुरूपता के बारे में सोचा है –

इसका उद्देश्य प्रतिभागी की बुद्धिमत्ता और तार्किक योग्यता को जाँचना है । आइए, इस अध्याय में हम प्रतियोगी परीक्षा में पूछे जाने वाले सामान्य प्रश्नों का संक्षिप्त में अध्ययन करेंगे ।

श्रृंखला –

श्रृंखला के अन्तर्गत वर्ण, संख्या अथवा मिश्रित (वर्ण, संख्या चिह्न) श्रृंखला के युग्म पर आधारित है ।

वर्णमाला श्रृंखला – इस श्रृंखला में केवल वर्ण उपलब्ध होते हैं । जो एक निश्चित क्रम का अनुसरण करते हैं । प्रतिभागी को इस क्रम को ज्ञात करना पड़ता है और आवश्यक उत्तर देना होता है ।

वर्णों स्थिति –

बायें से दायें – सही क्रम ⟶

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

दायें से बाएँ (उल्टे क्रम) ⟵

याद रखने योग्य बिन्दु –

1. श्रेणी का शुरूआती बिन्दु बायाँ छोर है और श्रेणी का अन्तिम बिन्दु दायाँ छोर है ।
2. यदि आपको अपनी बायीं ओर से गिनते हुए किसी निश्चित अक्षर के बायीं ओर स्थिति अक्षर को खोजना है तो आपको घटाने का तरीका प्रयोग करना चाहिए ।
3. यदि आपको अपनी दायीं ओर से गिनते हुए किसी निश्चित अक्षर के दायीं ओर के स्थित अक्षर को खोजना है तो आपको जोड़ने (जमा) करने का तरीका प्रयोग करना चाहिए ।

उदाहरणार्थ प्रश्न –

प्र.1 निम्नलिखित वर्णों की स्थिति का ध्यान पूर्वक अध्ययन कीजिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

A B C D E F G H I J K L M N

O P Q R S T U V W X Y Z

(क) उपर्युक्त व्याख्या में ऐसे कितने स्वर है जिसके तुरन्त पहले और तुरन्त बाद व्यंजन है ।

(अ) एक ब) दो स) तीन द) चार

उत्तर: द) चार

व्याख्या -

व्यंजन	स्वर	व्यंजन
D	E	F
H	I	J
N	O	P
T	U	V

(ख) प्रश्नावचक चिह्न (?) के स्थान पर क्या आना चाहिए ।

A C F J ?

अ) Q ब) O स) U द) इनमें से कोई नहीं

प्रश्नावली 14.1

प्र.1 निम्नलिखित संख्या श्रृंखला को ध्यान पूर्वक देखकर अध्ययन कीजिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1 2 6 5 3 2 1 8 9 6 5 3 2 1 2 3 1

उपर्युक्त व्यवस्था में ऐसे कितने 1 है जिसके तुरन्त बाद 2 है।

1. एक ब) दो स) तीन द) चार

प्र.2 निम्नलिखित श्रृंखला को ध्यान पूर्वक अध्ययन कीजिए और प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

F @ 5 3 R $ J P E 1 H μ L 8 4

B 8 A W 2 U G 6 * 9 δ Z N M V

1. निम्न में से कौन-सा तत्व बायीं ओर से 13 वाँ है ?

अ) % ब) L स) Q द) 1

2. उपर्युक्त व्यवस्था में बायीं ओर से 18 वें के बायें 10 वाँ निम्न में से कौन-सा है।

अ) J ब) E स) A द) P

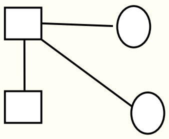
रक्तसम्बन्ध (Blood Relation) –

इस खण्ड में प्रतिभागी को रक्तसम्बन्ध के आधार पर प्रश्न को हल करना पड़ता है। रक्त सम्बन्ध पर आधारित प्रश्न कई प्रकार के हो सकते हैं। लेकिन सभी प्रकार के प्रश्न प्रतिभागी को एक-एक का सभी दिये सम्बन्ध को जोड़ना पड़ता है।

नोट : सम्बन्धों के विषय की जानकारी होना बहुत आवश्यक है।

प्रमुख बिन्दु –

1. पुरुष और महिला का वर्गीकरण करना चाहिए।
2. जैसे पति-पत्नि का सम्बन्ध +□—○—
3. जैसे पुत्र और पुत्री का सम्बन्ध



4. मेरे पिता के एक मात्र पुत्र का अर्थ है – मैं (स्वयं)

5. ऋतु के पति के सास-ससुर की एक मात्र पुत्री का अर्थ है – ऋतु (स्वयं वह)

आइए, अब निम्न प्रश्नों पर विचार करते है ।

1. मेरे पिता की बहन के पिता के पुत्र की पुत्री का मुझसे क्या रिश्ता होगा ?

अ) चाची ब) बहन स) पुत्री द) भतीजी

उत्तर: ब) बहन

व्याख्या: पिता के बहन के पिता का अर्थ हुआ दादा । दादा के पुत्र कि पुत्री बहन हुई ।

2. प्रीति का अरूण नामक पुत्र है राम, प्रीति का भाई है नीता की भी रीमा नामकी पुत्री है । नीता, राम की बहन है अरूण का रीमा के साथ क्या सम्बन्ध है ।

अ) भाई ब) भतिजा स) मौसेरा भाई द) मामा

उत्तर: स) मौसेरा भाई

प्रश्नावली 14.2

1. एक चित्र देखकर बेटा रो कर बोला वह मेरे मामा की अकेली बहन थी मैं उससे किस प्रकार सम्बन्धित हूँ ।

अ) माता ब) चचेरी बहन स) स्वयं द) बहन

2. A , B की माता है तब B, A से किस प्रकार सम्बन्धित है।

अ) भाई ब) पुत्री स) बहु द) चचेरी बहन

3. एक आदमी का परिचय देते हुए एक औरत ने कहा कि "वह मेरी माँ के भाई के पिता के पुत्र का पुत्र है" तो बताइये वह औरत उस आदमी से कैसे सम्बन्धित है?

अ) पिता ब) भाई स) पुत्र द) चचेरा भाई

4. एक आदमी ने एक महिला से कहा की "तुम्हारी माता के पति की बहन मेरी माँ है" तो बताइये कि वह आदमी उस महिला से कैसे सम्बन्धित है ?

अ) चचेरा भाई ब) पुत्र स) दादा द) भाई

5. आनन्द, प्रेमा का पुत्र है राजीव, प्रेमा का भाई हैं । नेहा, रश्मी की पुत्री है तो बताइये आनन्द, रश्मी से किस प्रकार सम्बन्धित है ?

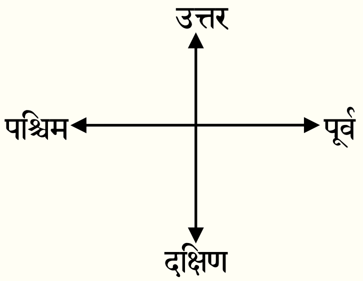
अ) पुत्र ब) दादा स) पोती द) पोता

दिशा और दूरी -

दिशा और दूरी से सम्बन्धित एक पहेली के रूप में बना होता है दिशा का एक क्रमबद्ध अनुसरण करते हुए प्रतिभागी से दो बिन्दुओं के बीच की पूरी और अन्तिम दिशा निश्चित करने के लिए कहाँ जाता है । इस परीक्षण का ध्येय प्रतिभागी सही रूप से खोजने और अनुसरण करने की दिशा में को अनुभव करने की योग्यता की जाँच करता है ।

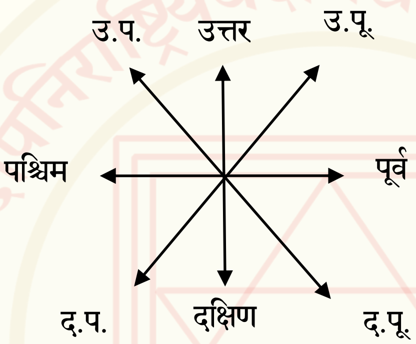
चार प्रमुख दिशाएँ है –

उत्तर, पूर्व, दक्षिण, पश्चिम



चार उपदिशाएँ है -

उत्तर-पूर्व (N–E), दक्षिण–पूर्व (S–E), दक्षिण–पश्चिम (S–W) और उत्तर–पश्चिम (N–W)



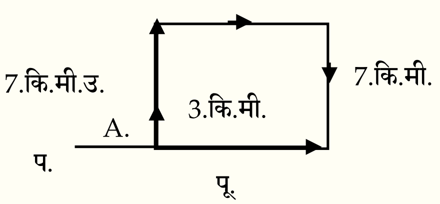
ये उपदिशाएँ प्रमुख दिशाओं के बीच होती हैं । आइए, अब निम्न उदाहरण प्रश्नों पर विचार करते हैं ।

उदाहरण: श्याम 7 कि.मी. उत्तर यात्रा करता है तब वह अपने दायें मुडता है और 3 कि.मी. चलता है वह फिर अपने दायें मुडता है और 7 कि.मी. आगे चलता है अब वह अपनी शुरूआती बिन्दु से किस दिशा में है ?

अ) उत्तर ब) दक्षिण स) पूर्व द) पश्चिम

उत्तर : स) पूर्व

व्याख्या:



A = शुरूआती बिन्दु

प्रश्नावली 14.3

प्र.1 गौरव उत्तर की ओर चलना आरम्भ करता है और 5 कि.मी. चलकर बायें मुड़ता है फिर 10 कि.मी. चलता है और बायें मुडता है तथा 5 कि.मी. कि दूरी तय करता है और अब वह अपने आरम्भिक बिन्दु से कितना दूर हैं ?

अ) 5 कि.मी. ब) 20 कि.मी. स) 10 कि.मी. द) इनमें से कोई नहीं

प्र.2 हेमन्त उत्तर की ओर 10 कि.मी. चलता है। वह अपने बायें मुडकर 4 कि.मी. चलता है और पुन: वह अपने दायें मुडकर 5 कि.मी. चलता है। वह पुन: दायें मुडता है और 4 कि.मी. की दूरी तय करता है। अब वह आरम्भिक बिन्दु से कितना दूर है ?

अ) 10 कि.मी. ब) 15 कि.मी. स) 5 कि.मी. द) 25 कि.मी.

प्र.3 एक कार चालक उत्तर की ओर 10 कि.मी. की दूरी तय करता है फिर वह बायें मुड़कर 5 कि.मी. चलता है और वह अपने मित्र से मिलता है फिर दायें मुडकर अन्य 10 कि.मी. की दूरी तय करना शुरू करता है। वह कुल 25 किलोमीटर की दूरी तय करता है। अब उसका मुख किस दिशा में है ?

अ) उत्तर ब) पूर्व स) पश्चिम द) दक्षिण

प्र.4 एक लडकी अपने घर से 30 मीटर उत्तर-पश्चिम की ओर जाती है और फिर दक्षिण-पश्चिम की ओर 30 मीटर की दूरी तय करती है और 30 मीटर दक्षिण पूर्व की ओर जाती है अन्त में वह अपने घर की ओर मुड़ती है अब उसका मुख किस दिशा में है ?

अ) दक्षिण-पूर्व ब) दक्षिण-पश्चिम स) उत्तर-पूर्व द) उत्तर- पश्चिम

प्र.5 अनुराधा 3 मीटर उत्तर की ओर जाती है और बायें मुड़कर 2 मीटर चलती है और बायें मुड़कर 3 मीटर चली, फिर वह अपने दायें मुड़ती है और सीधी रेखा में चलती है । अब वह किस दिशा में चल रही हैं ?

अ) उत्तर ब) पूर्व स) दक्षिण द) पश्चिम

प्र.6 राम अपने घर से 10 मी. दक्षिण में चलता है । फिर बायें मुड़कर 25 मी. चलता है फिर से बायें मुड़कर 40 मी. चलता है, उसके बाद दायें मुड़कर 5 मीटर चलकर स्कूल जाता है । उसका स्कूल उसके घर के किस दिशा में है ।

अ) उत्तर ब) उत्तर पूर्व स) दक्षिण – पश्चिम द) पूर्व

क्रम निर्धारण

क्रम निर्धारण में साधारणत: एक व्यक्ति की स्थिति बायें और दायें दोनों ओर से अथवा ऊपर और नीचे से निर्दिष्ट किया जाता है और कुल व्यक्तियों की संख्या पूछी जाती हैं कभी प्रश्न उनके परस्पर बदलें हुए जगहों पर आधारित होता हैं ।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु –

1) किसी कक्षा या पङ्क्ति में कुल व्यक्तियों की संख्या=

(किसी एक व्यक्ति बायें या ऊपर के स्थान)+ (उस व्यक्ति का नीचे या दायें से स्थान)

2) (कुल व्यक्तियों की संख्या+ 1) – (बायें या ऊपर से स्थान) = दायें या नीचे से स्थान

3) (कुल व्यक्तियों की संख्या+ 1) – (दाये या नीचे से स्थान) = बायें या ऊपर से स्थान

आइए, निम्न उदाहरण प्रश्नों पर विचार करते हैं ।

उदाहरण: राहुल 40 लड़कों के पङ्क्ति में दायीं ओर से 14वां है बायें छोर से उसकी स्थिति क्या है ?

अ) 24 वाँ   ब) 25 वाँ   स) 26वाँ   द) 27 वाँ

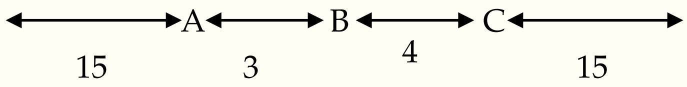
व्याख्या - राहुल के बायें ओर लड़कों की संख्या = (40 - 14) = 26 हैं। अत: राहुल का अन्तिम बायें छोर से 27 वाँ स्थान है ।

उदाहरण: उत्तर की ओर मुख किये हुए लडकों की पङ्क्ति में A बायीं ओर से 16वाँ है और C दायें ओर से सोलहवां है B जो A के दायें चौथा और C के बायें पाचवां है तब पङ्क्ति में कितने लड़के हैं ?

अ) 39   ब) 40

स) 41   द) 42

व्याख्या – स्पष्टतः दिये हुए शर्तों के अनुसार A के बायें भी 15 लड़के हैं साथ ही साथ C के दायें भी 15 लड़के हैं B, A और C के बीच ऐसे होता है कि A और B के बीच तीन लड़के है 4 लड़के B और C के बीच है ।



इसलिए पङ्क्ति में लड़कों की संख्या

$= (15 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 15) = 40$

प्रश्नावली 14.4

1. एक पङ्क्ति में रवि बायें से 18 वाँ और दायें 19 वाँ है तो पङ्क्ति में कुल कितने छात्र हैं ?

   अ) 36 ब) 37 स) 38 द) 35

2. एक पङ्क्ति के 50 विद्यार्थियों सें रेनू का स्थान बायें से 15वाँ है और राजू का दायें से 18 वाँ है । उन दोनों के बीच कितने विद्यार्थी हैं ?

   अ) 17 ब) 16 स) 7 द) 8

3. पङ्क्तिबध्द छात्र खड़े हैं उनमें आशीष बायें से 15 वें स्थान पर है और सचिन दायें से 7 वें स्थान पर हैं । यदि उनके स्थान आपस में परिवर्तित कर दिया जाए । तो सचिन दायें से 15 वें स्थान पर हो जाता है । तो पङ्क्ति में कुल कितने छात्र है ?

   अ) 21 ब) 22 स) 29 द) 30

4. मनोज पङ्क्ति में दायें से 24 वें स्थान पर है । पङ्क्ति में 40 बच्चे हैं । मनोज की स्थिति बायें से कितनी है ?

   अ) 18 ब) 16 स) 17 द) निर्धारित नहीं किया जा सकता

5. अशोक ऊपर से 20 वें स्थान पर है और नीचे से 25 वें स्थान पर है तब कुल बच्चों की संख्या ज्ञात करों ?

   अ) 40 ब) 44 स) 35 द) निर्धारित नहीं किया जा सकता

घड़ी (Clocks)

घड़ी के अध्याय में प्रतिभागी को ध्यान पूर्वक समय का अध्ययन कर बीच का कोण (घड़ी के कांटो के मध्य) ज्ञात करना होता है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु :

(1) मिनट वाली सुई

1 घण्टे = 1 पूरा चक्कर

60^{I} (60 मिनट) = 360^{o}

1^{I} (1 मिनट) = $\frac{360^{o}}{60}$ = 6^{o}

5 मिनट वाली सुई 1 मिनट में 6^{o} (डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

(2) घण्टे वाली सुई

12 घण्टे = 1 पूरा चक्कर

हम जानते हैं ,1 घण्टे में 60 मिनट होते हैं ।

12×60 मिनट = 360^{o}

720 मिनट (720^{I}) = 360^{o}

$1^{I} = \frac{360}{720} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

5 घण्टे वाली 1 मिनट में $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$ (आधे डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

(3) सेकेण्ड वाली सुई

1 मिनट = 1 पूरा चक्कर = 360^{o}

60 सेकेण्ड (1^{I}) = 360^{o}

60^{II} = 360^{o}

$1^{II} = \frac{360}{60} = 6^{o}$

5 सेकेण्ड वाली सुई द्वारा 1 सेकेण्ड में 6^{o} (डि.ग्री.) का कोण बनाती है ।

कोण ज्ञात करने का सूत्र :-

$$\theta = \frac{11}{2} \times \text{ मिनट } - 30^\circ \times \text{ घण्टे}$$

प्राप्त किये θ में (कोण में) धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न का कोई फर्क नहीं होता। यहाँ धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न हर बात की जानकारी देता कि मिनट वाली सुई ने घण्टे वाली सुई को क्रास किया है या नहीं।

क्रास किया हो तो = धनात्मक कोण आता है।

क्रास नहीं किया हो तो = ऋणात्मक कोण आता है।

उदाहरणार्थ प्रश्न

आइए, निम्न प्रश्नों पर विचार करते हैं।

उदाहरण: जब घड़ी में समय 7.20 है तब घण्टे की सुई तथा मिनट की सुई के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: समय 7.20 = 7 घण्टे तथा 20 मिनट

$= (7 + \frac{20}{60})$ घण्टे

$= (7 + \frac{1}{3})$ घण्टे $= \frac{22}{3}$ घण्टे

∵ घण्टे की सुई द्वारा 12 घण्टे में बनाया गया कोण $= 360^\circ$

∴ घण्टे की सुई द्वारा $\frac{22}{3}$ घण्टे में बनाया गया कोण $= \frac{360}{12} \times \frac{22}{3} = 220^\circ$

∵ मिनट की सुई द्वारा 60 मिनट में बनाया गया कोण $= 360^\circ$

∴ मिनट की सुई द्वारा 20 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{360}{60} \times 20 = 120^\circ$

अभीष्ट कोण $= (220^\circ - 120^\circ) = 100^\circ$

ट्रिक:

$$\theta = \frac{11}{2} \times \text{ मिनट } - 30^\circ \times \text{ घण्टे}$$

$$\theta = \frac{11}{2} \times 20 - 30^\circ \times 7$$

$\theta = 110^o - 210^o$

$\theta = -100$ (अर्थात् 100^o)

अन्य कोण, $\theta = 360^o - 100 = 260^o$

उदाहरण : जब घड़ी में 2.40 बजे हो तो घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: समय 2.40 = 2 घण्टे तथा 40 मिनट

$= (2 + \frac{2}{3})$ घण्टे

$= (2 + \frac{2}{3})$ घण्टे $= \frac{8}{3}$ घण्टे

$\because$ घण्टे की सुई द्वारा 12 घण्टे में बनाया गया कोण $= 360^o$

$\therefore$ घण्टे की सुई द्वारा $\frac{8}{3}$ घण्टे में बनाया गया कोण $= \frac{360}{12} \times \frac{8}{3} = 80^o$

$\because$ मिनट की सुई द्वारा 60 मिनट में बनाया गया कोण $= 360^o$

$\therefore$ मिनट की सुई द्वारा 40 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{360}{60} \times 40^o = 240^o$

अभीष्ट कोण $= (240^o - 80^o) = 160^o$

ट्रिक :

$\theta = \frac{11}{2} \times$ मिनट $= 30 \times$ घण्टे

$= \frac{11}{2} \times 40 - 30 \times 2$

$= 220^o - 60^o$

तब अभीष्ट कोण $= 160^o$

एवं अन्य कोण $= 360^o - 160^o = 200^o$

प्रश्नावली 14.5

1. 5 मिनट में कितने अंश (डिग्री) का कोण बनेगा ।

(अ) 30° (ब) 45° (स) 15° (द) 5°

2. सेकेण्ड वाली सुई द्वारा 3 सेकेण्ड में कितने डिग्री का कोण बनाती है ।

(अ) 12° (ब) 15° (स) 18° (द) 24°

3. 3 बजकर 35 मिनट पर घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण कितना है ?

(अ) $107\frac{1^\circ}{2}$ (ब) 210° (स) $102\frac{1^\circ}{2}$ (द) इनमें से कोई नहीं

4. 8 बजकर 15 मिनट पर घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण कितना है ?

(अ) 90° (ब) $157\frac{1^\circ}{2}$ (स) $247\frac{1^\circ}{2}$ (द) इनमें से कोई नहीं

5. 5 बजकर 12 मिनट पर घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण कितना है ?

(अ) 156° (ब) 72° (स) 84° (द) 78°

6. 11 बजे घण्टे तथा मिनट की सुई के बीच का कोण कितना होगा ?

(अ) 15° (ब) $22\frac{1^\circ}{2}$ (स) 30° (द) 36°

कैलेण्डर (Calendar)

कैलेण्डर के अध्याय में प्रतिभागी ध्यान पूर्वक प्रश्नों को पढ़कर उत्तर की जाँच करना होता है। प्रतिभागी को कैलेण्डर के बारे निम्न सामान्य जानकारी होना चाहिए ।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु :-

1. **अतिरिक्त दिन** – किसी दिए हुए अन्तराल में ऐसे दिनों की संख्या जो पूर्ण-सप्ताहों की संख्या से अधिक हों, अतिरिक्त दिन कहलाते हैं ।

2. प्रत्येक ऐसा वर्ष (शताब्दी न हो), जो 4 से पूर्णतया विभक्त हो तथा प्रत्येक वह शताब्दी 400 से विभक्त न हो, लीप वर्ष नहीं होगी ।

   (1) वर्ष 1620, 1860, 1940,1984, 1996,2004,2008 आदि सभी लीप वर्ष है ।

   (2) वर्ष 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400 आदि लीप वर्ष है

।

   (3) वर्ष 1726,1982 ,2021,2035 आदि लीप वर्ष नहीं है।

3. 1 साधारण वर्ष = 365 दिन तथा 1 लीप-वर्ष = 366 दिन।

4. अतिरिक्त दिनों की गिनती करना

   (i) 1 साधारण वर्ष = 365 दिन = (52 सप्ताह) + (1दिन)

   अत: 1 साधारण वर्ष में 1 अतिरिक्त दिन होता है

   (ii) 1 लीपवर्ष = 366 दिन = (52 सप्ताह) + (2 दिन)

   अत: 1 लीप वर्ष में 2 अतिरिक्त दिन होता है

   (iii) 100 वर्ष = 76 साधारण वर्ष + 24 लीपवर्ष

   = 76 अतिरिक्त दिन + (24×2) अतिरिक्त दिन

   = 124 अतिरिक्त दिन = (17 सप्ताह + 5 दिन)

= 5 अतिरिक्त दिन

6. दिन ज्ञात करने के लिए प्राप्त अतिरिक्त दिनो की संख्या को 7 से विभाजित कर शेषफल से दिन ज्ञात करते है।

दिन ज्ञात करने के ट्रिक :

$$\frac{\text{दिन + महिना + वर्ष + लीप वर्ष + शताब्दी}}{7}$$

महिनों के लिए कोड

माह	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
कोड़	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6

1. वर्ष की अन्तिम दो संख्या लेते है।
2. लीप वर्ष के लिए , वर्ष की अन्तिम दो संख्या को 4 से विभाजित कर भागफल (लब्धि) को लिखते हैं।
3. शताब्दी कोड

-----	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	
	6	4	2	0	6	4	2	0	-----

4. दिन के लिए

रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार
1	2	3	4	5	6	0

आइए ,निम्न उदाहरण प्रश्न पर विचार करते हैं।

उदाहरण : 15 अगस्त 1947 को भारत देश स्वतन्त्र हुआ। वह सप्ताह का कौन-सा दिन था ?

हल : 15 अगस्त 1947 = (1946 वर्ष +1 जनवरी 1947 से 15 अगस्त 1947)

1600 वर्ष में अतिरिक्त दिन = 0

300 वर्ष में अतिरिक्त दिन = 15 दिन = (7×2 +1) दिन = 1 दिन।

46 वर्ष = (11 लीप वर्ष + 35 साधारण वर्ष) = (22 + 35) अतिरिक्त दिन

= 57 अतिरिक्त दिन = (8 × 7+ 1)अतिरिक्त दिन

जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त

(31 +28+31+30+31+30+31+15) = 227 दिन = (7×32+3) दिन = 3 अतिरिक्त दिन

कुल अतिरिक्त दिन = (0+1+1+3)=5

अत: अभीष्ट दिन = शुक्रवार

ट्रिक : दिन + महिना + वर्ष + लीप वर्ष + शताब्दी

= 15 + 03 + 47 + 11 + 00

= 76

अतिरिक्त दिनों को 7 से विभाजित करने पर

$= \frac{76}{7} =$ 6 (शेषफल)

6 शेषफल का मतलब दिन शुक्रवार होगा।

प्रश्नावली 14.6

1. 31 मई 2020 को कौन-सा दिन होगा?

2. 26 जनवरी 1950 को सप्ताह का कौन-सा दिन था?

   (अ) बृहस्पतिवार (ब) शनिवार (स) मङ्गलवार (द) सोमवार

3. 19 अक्तूबर 2000 को कौन-सा दिन था?

   (अ) मङ्गलवार (ब) बृहस्पतिवार (स) शुक्रवार (द) शनिवार

4. एक वर्ष में कितने सप्ताह होते हैं

   (अ) 50 (ब) 52 (स) 51 (द) 58

5. लीप वर्ष में फरवरी माह कितने दिनों का होता है

   (अ) 30 (ब) 28 (स) 31 (द) 29

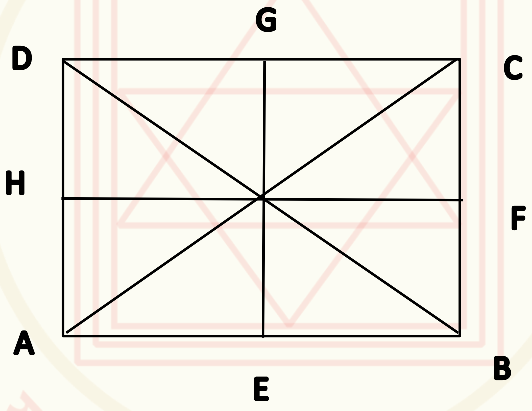
आकृतियों की गिनती (counting of figure):-

विभेदीकरण के अन्तर्गत आने वाले प्रश्नों में एक आकृति दी गई होती है। दी हुई आकृति में से पूछी गई ज्यामितीय आकृतियों (यथा वृत्त, त्रिभुज , वर्ग, आयत इत्यादि) को पहचान कर उनकी कुल संख्या ज्ञात को करना होती है।

उदाहरण: निम्न प्रश्न में एक प्रश्न आकृति दि गई है इस आकृति में कितनी सरल रेखाएँ है।

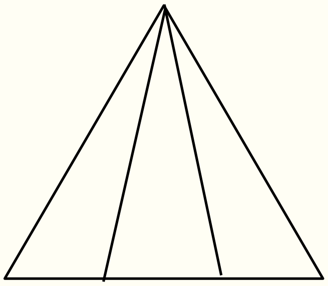
a) 5 b) 8 c) 10 d) 15

हल: b) 8



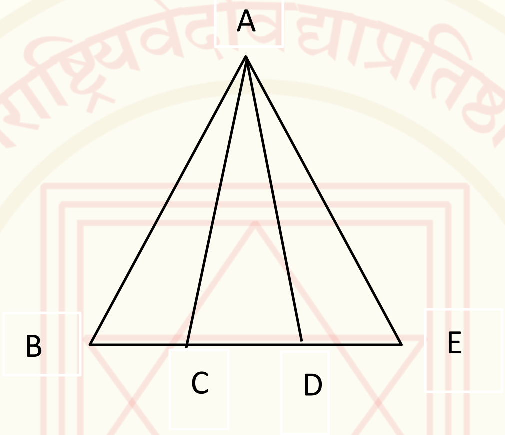
प्रश्न आकृति को ध्यान पूर्वक अवलोकन करने के बाद ज्ञात होता है कि दि गई आकृति में तीन क्षैतिज रेखाएँ क्रमशः AB,HF, तथा DC है। तीन लम्बवत रेखाएँ क्रमशः AD , EG तथा BC है तथा दो तिरछी रेखाएँ क्रमशः AC तथा BD है।

उदाहरण :- निम्न प्रश्न आकृति में दी हुई इस आकृति में कितने त्रिभुज हैं।



a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

हल:- d) 6



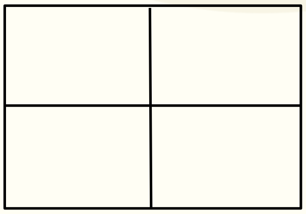
उपर्युक्त आकृति में त्रिभुज की संख्या 6 है।

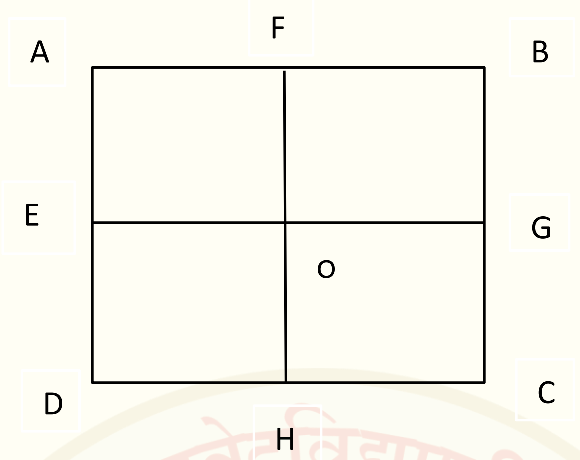
जहाँ त्रिभुज में $\Delta\, ABC$, $\Delta\, ABD$, Δ ABE, Δ ACD, Δ ACE, Δ ADE हैं।

उदाहरण:- नीचे दिए गए रेखाचित्र में कुल कितने वर्ग है।

a) 5 b) 8 c) 9 d) 10

हल:- a) 5

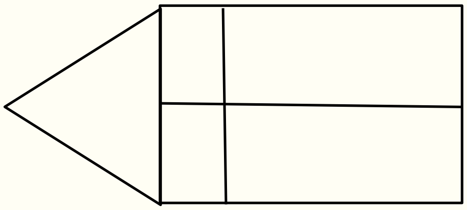




उपर्युक्त आकृति में 5 वर्गाकार आकृति है जहाँ वर्ग AEOF, FOGB, OGCH, EODH तथा ABCD है।

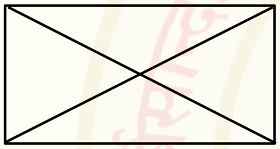
प्रश्नावली 14.6

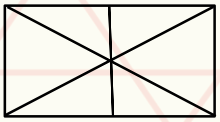
1. नीचे दी गई आकृति में कितने आयत है।

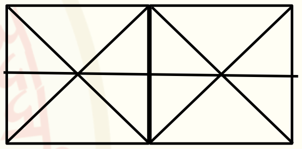


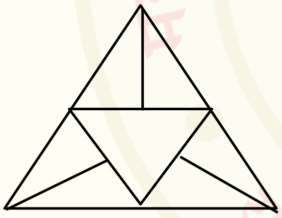
a) 7 b) 8 c) 9 d) 12

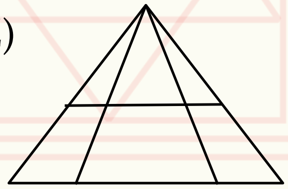
2. नीचे दी गई आकृति में कितने त्रिभुजाकार है -

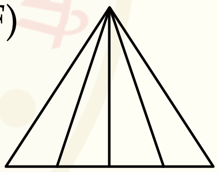
A) 

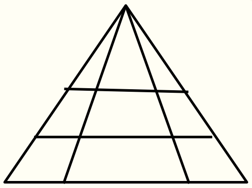
B) 

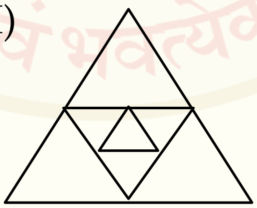
C) 

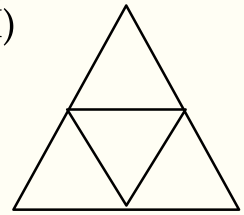
D) 

E) 

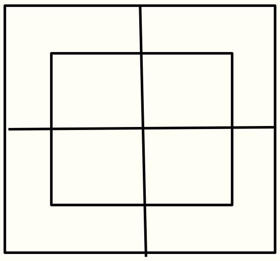
F) 

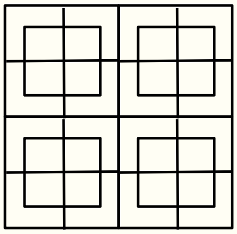
G) 

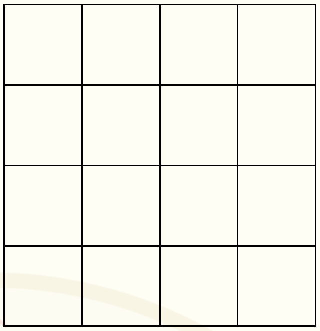
H) 

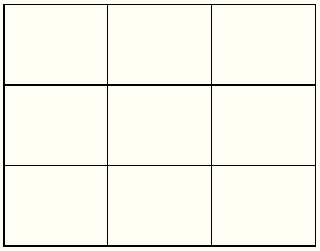
I) 

3. निम्न आकृतियों में वर्गों की संख्या कितनी है बताइए।

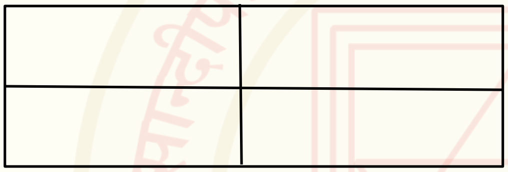
(क) 

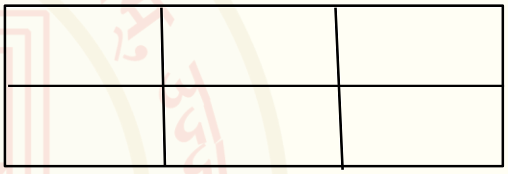
(ख) 

(ग) 

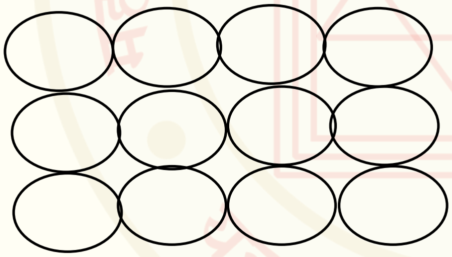
(घ) 

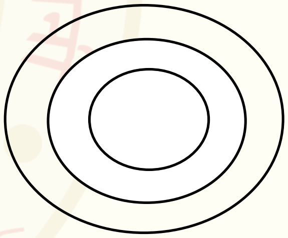
4. निम्न आकृतियों में आयत की संख्या बताइये।





5. निम्न आकृतियों में कितने वृत्त है।





भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान

❖ श्रीधराचार्य (Shridharachary)

श्रीधराचार्य एक प्रसिद्ध गणितज्ञ थे। इनका जन्म 750 ईस्वी के लगभग माना जाता है। इनके पिता का नाम बलदेवाचार्य और माताजी का नाम अचकोक था। इनके पिता कन्नड़ और संस्कृत साहित्य के प्रकाण्ड पंडित थे। अपने पिता से ही साहित्य, संस्कृत और कन्नड़ की शिक्षा प्राप्त करने की थी और आगे चलकर एक महान विचार और दार्शनिक के रूप में प्रसिद्ध हुए। श्रीधराचार्य जी ने शून्य की व्याख्या एवं द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) को हल करने सम्बन्धी सूत्र का प्रतिपादन किया। इनकी प्रसिद्ध रचना 'गणितसार' है जिसे 'त्रिशती' या 'त्रिशतिका' के नाम से भी जाना जाता है। श्रीधराचार्य ने अपने प्रसिद्ध ग्रन्थ के प्रथम पद्य में स्वयं लिखा है कि यह ग्रन्थ उनके पाटीगणित का सार है। इनकी अन्य कृति पाटीगणित एवं बीजगणित (जो अप्राप्य है) का वर्णन भी प्राप्त होता है। इन्होंने बीजगणित के अनेक महत्त्वपूर्ण आविष्कार किये। वर्गात्मक समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल करने का इनके द्वारा आविष्कृत नियम आज भी 'श्रीधर 'नियम' अथवा हिन्दू नियम के नाम से प्रचलित हैं।

श्रीधराचार्य की प्रसिद्ध कृति 'त्रिशती' को आधार बनाकर भास्कराचार्य ने अपने प्रसिद्ध ग्रन्थ 'लीलावती' की रचना की।

श्रीधराचार्य ने अपने ग्रन्थ 'गणितसार' में निम्न विषयों यथा अभिन्न गुणक, भागहार, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल, भिन्न, समच्छेद भागजाति, प्रभागजाति- भागानुबन्ध, भागमातृजाति, त्रैराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक, भाण्ड-प्रतिभाण्ड, मिश्रक व्यवहार, भाव्यक व्यवहार, एकपत्रीकरण सूत्र, सुवर्ण गणित, प्रक्षेपक गणित, समक्रय विक्रय सूत्र, श्रेणी व्यवहार, क्षेत्र व्यवहार, खात व्यवहार,

चिति व्यवहार, काष्ठ व्यवहार, राशि व्यवहार, छाया व्यवहार, इत्यादि का समावेश तथा उसका विवरण प्रस्तुत किया है।

शून्य की व्याख्या - अन्य गणिताचार्यों की तुलना में श्रीधराचार्य द्वारा प्रस्तुत शून्य की व्याख्या सर्वाधिक स्पष्ट है- उनके द्वारा की गई व्याख्या यदि किसी संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो योगफल उस संख्या के बराबर होता है। यदि किसी संख्या से शून्य घटाया जाता है तो परिणाम उस संख्या के बराबर ही होता है। यदि शून्य किसी भी संख्या से गुणा किया जाता है तो गुणनफल शून्य ही होगा ।

- किसी संख्या को भिन्न (Fraction) द्वारा भाजित करने के लिए उन्होंने यह बताया कि उस संख्या में उस भिन्न के व्युत्क्रम (Reciprocal) से गुणा कर देना चाहिए।

श्रीधराचार्य ने द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करने की विधि को बतलाया है-(भास्कराचार्य द्वारा बीजगणित के अव्यक्तवर्ग समीकरण में उद्धृत

चतुराहतवर्गसमैः रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ।अव्यक्तवर्गरूपैः उक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥

उपर्युक्त श्लोक के आधार पर निम्न सूत्र आधुनिक गणित में द्विघात समीकरण हल करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

❖ सुद्युम्न आचार्य

सुद्युम्न आचार्य प्रसिद्ध व्याकरणाचार्य हैं। इलाहाबाद यूनिवर्सिटी से एम ए अष्टस्वर्णपदक विजेता, डी फिल, प्रोफेसर के रूप में 34 वर्षों का अध्यापन अनुभव। वर्तमान में वेद वाणी वितान प्राच्य विद्या शोध संस्थान सतना के निदेशक हैं। दर्शन-भौतिक विज्ञान, व्याकरण-भाषा विज्ञान, प्राचीन तथा आधुनिक इत्यादि विषयों पर अनेक ग्रन्थों के प्रणेता है इन्होंने भारतीय गणित शास्त्र में शास्त्र के विकास की चिन्तन धारा एवं गणित शास्त्र के विकास की भारतीय परम्परा की पुस्तक को लिखा है।

इनकी पुस्तक इस प्रकार लिखी गई है कि उसे सीधे पाठ्यपुस्तक के रूप में पढ़ाया जा सकता है। इसके अलावा उन्होंने श्रीधर के त्रिशतिका का अनुवाद भी किया है।

❖ **अमुल्य कुमार बाग (जन्म: 1937)**

आई एन एस ए आयोग की स्थापना के समय वह एस एन सेन जुड़े रहे हैं। विज्ञान के इतिहास के भारतीय जर्नल के साथ जुड़े रहे हैं और जर्नल के सफलता और विकास में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया है। बाग ने प्राचीन और मध्यकालीन भारत में गणित के बारे में एक सिंहावलोकन प्रकाशित किया है (1991 बनारस) और एस एन सेन के साथ शुल्ब सूत्र का अनुवाद भी किया है।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in