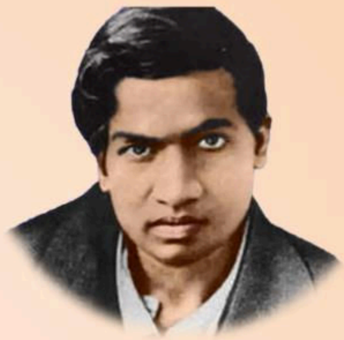
आज़ादी का अमृत महोत्सव



गणित पाठ्यपुस्तक

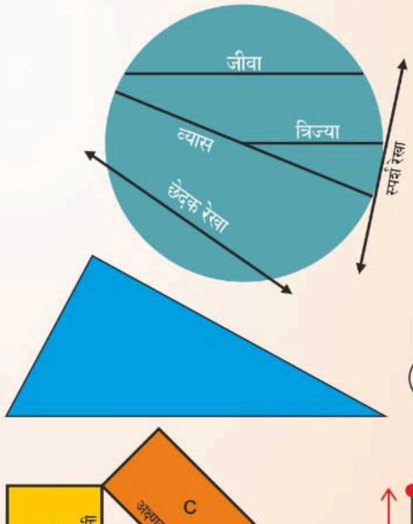
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

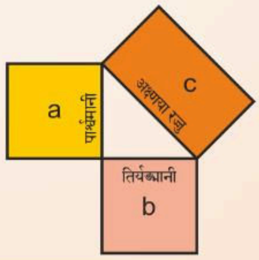
वेद-भूषण - IV वर्ष / पूर्वमध्यमा - I वर्ष / कक्षा नवीं

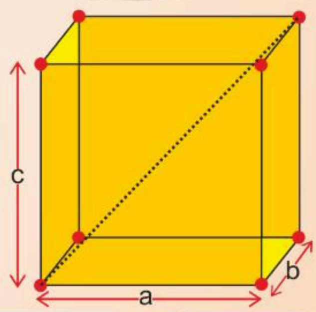
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्च चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोऽनेन सविशेषः ।।
योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ।
योगान्तरे रूपवदेतयोः स्तो वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च॥
भाज्याच्छेदः शुद्ध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥
एकाव्यक्तं शोधयेद् अन्यपक्षाद् रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात् ।
शेषाव्यक्तेनो उद्धरेद् रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः।।
अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह ,यात्तावद् द्व्यादिनिघ्नं हृतं वा।
युक्तोनं वा कल्पयेद् आत्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा।
तिरश्चीनो विततो रश्मिरेषामधः स्विदासी३दुपरि स्विदासी३त् ।
रेतोधाऽआसन्महिमानऽआसन्त्स्वधाऽअवस्तात्प्रयतिः परस्तात् ॥
दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च
यत्पृथग् भूते कुरुतस्तदुभयं करोति ।
यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं शयानः।
वत्स कामदुघो विराजः स गुहा चक्रे तन्वः पराचैः।
सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्धघात्।
मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके।।
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्।







$\sqrt{\text{तिर्यङ्मानी}^2 (a^2) + \text{पार्श्वमानी}^2 (b^2)}$ = अक्षणया रज्जु (c)

एकाधिकेन पूर्वेण | एकन्यूनेन पूर्वेण | विनुकलम् | विलोकनम् | आनुरूप्येण | बीजाङ्क | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

गणित पाठ्यपुस्तक

वेद-भूषण - IV वर्ष / पूर्वमध्यमा - I वर्ष / कक्षा नवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

लेखकगण : ....

आवरण एवं सज्जा : ....

चित्राङ्कन : ....

तकनीकी सहयोग : ....

अक्षरविन्यास : ....

ISBN : ....

मूल्य : ....

संस्करण : ....

प्रकाशित प्रति : ....

पेपर उपयोगः : आर.सी.टी.बी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रिय वेदविद्या प्रतिष्ठान

(शिक्षामन्त्रालय भारत सरकार की स्वायत्तशासी संस्था)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

email : msrvvpujn@gmail.com,

Web : msrvvp.ac.in

दूरभाषा (0734) 2502255, 2502254

भूमिका

भारतवर्ष में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। इतिहास के अत्यन्त प्राचीन काल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। वैदिक काल के आरम्भ से ही गणित विद्या को सर्वोच्च स्थान दिया गया है। उदाहरणार्थ बृहदारण्यक के शाङ्करभाष्य में श्रीशङ्कर ने संख्या रेखा की अवधारणा सुस्पष्ट है -

एकप्रभृत्यापरार्धसंख्यास्वरूपपरिज्ञानाय रेखाध्यारोपणं कृत्वा एकेयं रेखा दशेयं, शतेयं, सहस्रेयं इति ग्राहयति, अवगमयति, संख्यास्वरूपम्, केवलं, न तु संख्याया: रेखातत्त्वमेव

(बृहदारण्यक , शाङ्करभाष्य : 4/4/25)

अर्थात् एक संख्या रेखा में 1 इकाई, 10 इकाई, 100 इकाई, 1000 इकाई , ...परार्ध इत्यादि तक एक संख्या रेखा पर स्थित हो सकते हैं। हम संख्या रेखा को समझकर योग, घटाव (अन्तर) आदि ज्ञात करते हैं।

पुरातन ज्ञान का उपयोग एवं प्राचीन उपलब्धियों के तारतम्य से आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के उद्देश्य से इस पाठ्यपुस्तक में वैदिक गणित के साथ संस्कृत ज्ञान प्रणाली में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामञ्जस्य बनाकर पूरे भारतवर्ष के वैदिक विद्यार्थियों को गणित विषय में अधिगम स्तर की दक्षता प्रदान करने के लिए राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 में निहित - चर्चा, विश्लेषण, उदाहरण एवं अनुप्रयोग जैसे मुख्य सिद्धान्तों की दृष्टि को ध्यान में रखते हुए वैदिक विद्यार्थियों के अनुरूप पाठ्यक्रम एवं पाठ्य पुस्तकों का निर्माण किया गया है।

पाठ्यपुस्तक की भाषा बहुत ही सरल और सहज है जिससे विद्यार्थियों को समझने में सुगमता होगी। वेदभूषण चतुर्थ (नौवीं समकक्ष) वर्ष की यह पाठ्यपुस्तक प्राय: पूरे भारतवर्ष के कक्षा- 9 गणित पाठ्यक्रम के समकक्ष है। पाठ्यपुस्तक में कई पाठ्य बिन्दुओं को संस्कृत ज्ञान प्रणाली के वैदिक प्रमाणों के साथ-साथ ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त, शुल्बसूत्र, आर्यभट्टीयम्, लीलावती एवं बीजगणितम् आदि ग्रन्थों के सन्दर्भों को भी सम्मिलित किया गया है जिससे वैदिक विद्यार्थी आधुनिक गणित के साथ प्राचीन गणितीय सङ्कल्पनाओं को भी समझने में सक्षम होंगे एवं अपनी भारतीय परम्परा की गरिमा का अनुभव कर सकेंगे। पूर्व कक्षा के अनुभव को दोहराते हुए, पाठ्यपुस्तक में कुल 10 अध्यायों की रचनाएँ वेद

विद्यालयों के वेद भूषण चतुर्थ वर्ष पाठ्यक्रम के आवश्यकता के अनुसार की गई है। अध्याय 1 में संख्या पद्धति के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार की संख्याओं का पुनरावलोकन करते हुए परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं पर विस्तार से वर्णन किया गया है। अध्याय 2 में बहुपद के बारे में वर्णन है। अध्याय 3 में दो चर वाले रैखिक समीकरण का हल करना सीखेंगे। अध्याय 4 में वैदिक गणित के सूत्रों के माध्यम से गणितीय सङ्क्रियाओं एवं उत्तर की जाँच को विस्तार से प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 5 में वृत्त के बारे में विस्तार से बताया गया है। अध्याय 6 में बोधायन (पाइथागोरस) प्रमेय वर्णित है। अध्याय 7 में हीरोन के सूत्र के द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे। अध्याय 8 में घन एवं घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन, सूत्रों के माध्यम से ज्ञात करना सीखेंगे। अध्याय 9 में सांख्यिकी में "आंकड़ों का संग्रह" के अन्तर्गत दण्ड रेखाचित्र एवं आयतचित्र का अध्ययन करेंगे। अध्याय 10 में प्रायिकता के माध्यम से सम्भावित घटनाओं का परिणाम ज्ञात करना सीखेंगे।

पाठ्यपुस्तक में वैदिक विद्यार्थियों की गणित की समझ को विकसित करने के साथ-साथ तथ्यों की पुनः खोज करने की दक्षता का विकास करने के लिए विभिन्न गतिविधियाँ दी गई हैं। जिन्हें **'करो और सीखो'** का नाम दिया गया है, साथ ही विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर को बढ़ाने के लिए प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण सङ्कल्पनाओं एवं परिणामों को **" हमने सीखा "** के रूप में स्थान दिया गया है ।

भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीय गणितज्ञों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति विद्यार्थियों की समझ बनाने के लिए पाठ्यपुस्तक के अन्त में **भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान** का भी उल्लेख किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं को समझकर वैदिक विद्यार्थी प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी में सक्षम होंगे। उक्त पुस्तक के अध्ययनोपरान्त विद्यार्थी कक्षा नवीं की NCERT तथा विषय विशेष से सम्बन्धित पुस्तकों का अध्ययन करें।

लेखक पाठ्यपुस्तक के त्रुटि सुधार हेतु प्रेषित सकारात्मक सुझाव के लिए आपका कृतज्ञ होगा।

प्रस्तावना

(राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के आलोक में)

शिक्षा मन्त्रालय (उच्चतर शिक्षा विभाग), भारत सरकार ने माननीय शिक्षा मन्त्री जी (तत्कालीन मानव संसाधन विकास मन्त्री) की अध्यक्षता में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान की स्थापना दिल्ली में 20 जनवरी, 1987 को सोसायटी पञ्जीकरण अधिनियम, 1860 के तहत की थी। भारत सरकार ने वेदों की श्रुति परम्परा का संरक्षण, संवर्धन, प्रसार और विकास के लिए प्रतिष्ठान की स्थापना का संकल्प संख्या 6-3/85-SKT-IV दिनाङ्क 30-3-1987 को भारत के राजपत्र में अधिसूचित किया था। वेदों के अध्ययन की श्रुति परम्परा (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, वेदाङ्ग, वेद भाष्य आदि), वेदों का पाठ संरक्षण, वैदिक स्वर तथा वैज्ञानिक आधार पर वेदों की व्याख्या का दायित्व वेद विद्या प्रतिष्ठान को दिया गया था। वर्ष 1993 में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान के कार्यालय को उज्जैन में स्थानान्तरित करने के पश्चात् संगठन का नाम महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान कर दिया गया। वर्तमान में यह संगठन मध्यप्रदेश सरकार द्वारा प्रदत्त भूमि- परिसर, महाकाल नगरी, उज्जैन में स्थित है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति-1986 के संशोधित नीति-1992 और कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन)-1992 में भी वैदिक शिक्षा को बढ़ावा देने के लिए राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान को उत्तरदायित्व दिया गया था। भारत के प्राचीन ज्ञान कोष, मौखिक परम्परा और इस तरह की शिक्षा के लिए पारंपरिक गुरुओं को संयोजित करने के उद्देश्य को 1992 के कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन) में उल्लेखित किया गया था।

राष्ट्र की आकांक्षाओं के अनुरूप, राष्ट्रीय स्तर पर वेद और संस्कृत शिक्षा के लिए एक बोर्ड की स्थापना के पक्ष में राष्ट्रीय सहमति, जनादेश, नीति, विशिष्ट उद्देश्य और कार्यान्वयन रणनीतियों के अनुरूप, भारत सरकार के माननीय शिक्षा मन्त्रीजी की अध्यक्षता में महासभा और शासी परिषद के समावेश में ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड'' की स्थापना 2019 में हुई है। MSRVVP का वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड भी वैदिक शिक्षा का एक भाग है और MSRVVP के उद्देश्यों की पूर्ति के लिए आवश्यक है जैसा कि MOA और नियमों में संकल्पना की गई है। महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड को शिक्षा मन्त्रालय,भारत सरकार तथा भारतीय

विश्वविद्यालय संघ, केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली से मान्यता प्राप्त है।

यहाँ यह भी उल्लेखनीय है कि भारत सरकार के शिक्षा मन्त्रालय द्वारा वर्ष 2015 में श्री एन. गोपालस्वामी (पूर्व चुनाव आयुक्त) की अध्यक्षता में गठित समिति ''संस्कृत के विकास के लिए विजन और रोडमैप - दस वर्षीय परिप्रेक्ष्य योजना'' की रिपोर्ट में अनुशंसा की गई है कि माध्यमिक विद्यालय स्तर तक वेद संस्कृत शिक्षा के पाठ्यक्रम मानकीकरण, संबद्धता, परीक्षा मान्यता, प्रमाणीकरण के लिए राष्ट्रस्तर पर वेद संस्कृत परीक्षा बोर्ड की स्थापना की जाए। समिति की अनुशंसा थी कि प्राथमिक स्तर का वैदिक एवं संस्कृत अध्ययन अभिप्रेरक, सम्प्रेरक एवं आनन्ददायी होना चाहिए। आधुनिक शिक्षा के विषयों को वैदिक और संस्कृत पाठशालाओं में सन्तुलित रूप से सम्मिलित करना भी आवश्यक है। इन पाठशालाओं की पाठ्यक्रम सामग्री को समकालीन समाज की आवश्यकताओं के अनुरूप और प्राचीन ज्ञान का उपयोग करते हुए आधुनिक समस्याओं का समाधान खोजने के लिए प्रारूपित किया जाना चाहिए।

वेद पाठशालाओं के संबंध में समिति ने यह संस्तुति की है कि संस्कृत और आधुनिक विषयों की श्रेणीबद्ध सामग्री के परिचय के साथ-साथ वेद पाठ कौशल संवर्धन और वेद उच्चारण में मानकीकरण की आवश्यकता है ताकि वेद छात्र अन्ततः वेद भाष्य के अध्ययन तक पहुंच सकें और छात्रों को आगे की पढ़ाई के लिए मुख्यधारा में लाया जा सके। उचित स्तर पर वेदों के विकृति पाठ के अध्ययन पर बढ़ावा दिया जाना चाहिए। समिति के सदस्यों ने यह भी चिंता व्यक्त की है कि वैदिक सस्वर पाठ पूरे भारत में समान रूप से नहीं फैला है, इसलिए वैदिक सस्वर पाठ की शैलियों और शिक्षण पद्धति की क्षेत्रीय विविधताओं में हस्तक्षेप किए बिना स्थिति में सुधार के लिए उचित कदम उठाया जाना है।

यह भी अनुभव किया गया कि वेद और संस्कृत अविभाज्य हैं और एक दूसरे के पूरक हैं और देश भर में सभी वेद पाठशालाओं और संस्कृत पाठशालाओं के लिए परीक्षा मान्यता और सम्बद्धता की समस्याएँ समान है, इसलिए दोनों के लिए एक साथ वेद संस्कृत हेतु एक बोर्ड का गठन किया जा सकता है। समिति ने यह पाया कि बोर्ड द्वारा आयोजित परीक्षाओं को कानूनी रूप से वैध मान्यता प्राप्त होनी चाहिए, जो शिक्षा की आधुनिक बोर्ड प्रणाली के साथ समानता रखे। समिति ने पाया कि महर्षि सान्दीपनि

राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान उज्जैन को ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत विद्या परिषद्'' के नाम से परीक्षा बोर्ड का दर्जा दिया जाये, जिसका मुख्यालय उज्जैन में रहे। परीक्षा बोर्ड होने के अतिरिक्त अब तक जो सभी वेद कार्यक्रम और वेद पर गतिविधियाँ हैं, वे सभी प्रतिष्ठान में जारी रहेंगे।

वैदिक शिक्षा का प्रचार भारत की गौरवशाली ज्ञान परम्परा का एक व्यापक अध्ययन है और इसमें वैदिक अध्ययन (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, स्वर का सम्यक् प्रयोग ज्ञान आदि), सस्वर पाठ कौशल, मन्त्र उच्चारण और संस्कृत ज्ञान प्रणाली सामग्री की बहुस्तरीय श्रुति परम्परा सम्मिलित है। प्रतिष्ठान में NEP 2020 अनुरूप 3 + 4 (सात साल तक) के वेद अध्ययन की योजना में पारम्परिक छात्रों को मुख्य धारा में लाने की नीति के परिप्रेक्ष्य में अन्य विभिन्न आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि पाठ्यक्रम के अनुसार तथा वैदिक शिक्षा पर केन्द्रित नीति निर्धारक निकायों में राष्ट्रीय सहमति, समय की उपलब्धता के आधार पर सभी अध्ययन संयोजित हैं। अध्ययन की यह योजना NEP 2020 के परिप्रेक्ष्य में भारतीय ज्ञान प्रणाली पर ध्यान केन्द्रित करने वाले पाठ्यक्रम सामग्री में आधुनिक ज्ञान के साथ एवं भारतीय ग्रंथों से तैयार वैदिक ज्ञान के उपयुक्त सामग्री के साथ है।

प्रतिष्ठान बोर्ड की वेद पाठशालाओं, गुरु शिष्य ईकाइयों और गुरुकुलों में, पाठ्यक्रम मुख्य रूप से सम्पूर्ण सस्वर कण्ठस्थीकरण के साथ संपूर्ण वेद शाखा का अध्ययन होता है तथा संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि और SUPW जैसे अतिरिक्त सहायक विषयों के साथ वेद अध्ययन होता है।

यह सर्वविदित तथ्य है कि वेदों की 1131 शाखाएँ सस्वर पाठ के साथ थे, अर्थात् 21 ऋग्वेद में, 101 यजुर्वेद में, 1000 सामवेद में और 9 अथर्ववेद में। समय के साथ इन शाखाओं की एक बड़ी संख्या विलुप्त हो गई और वर्तमान में केवल 10 शाखाएँ, अर्थात् ऋग्वेद में एक, यजुर्वेद में 4, सामवेद में 3 और अथर्ववेद में 2 सस्वर पाठ के रूप में विद्यमान हैं, जिन पर भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित है, इन 10 शाखाओं के संबंध में भी बहुत कम प्रतिनिधि वेदपाठी पंडित है जो श्रुति परम्परा/पाठ/वेद ज्ञान परम्परा को उसके प्राचीन और पूर्ण रूप में संरक्षित किये हुए हैं। जब तक श्रुति परम्परा के अनुसार वैदिक शिक्षा पर मूलरूप से ध्यान नहीं दिया जाएगा, तब तक यह व्यवस्था सुदृढ़ नहीं हो पायेगी। वैदिक

श्रुति परम्परा की श्रुति अध्ययनों के पहलुओं को सामान्य/अध्ययन में स्कूल में न तो पढ़ाया जाता है और न ही किसी स्कूली शिक्षा के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया जाता है, और न ही स्कूलों/बोर्डों के पास उन्हें आधुनिक स्कूल पाठ्यक्रम में सम्मिलित करने और सञ्चालित करने की विशेषज्ञता है।

वैदिक छात्र जो श्रुति परम्परा / वेद का पाठ सीखते हैं, वे दूर-दराज के गाँवों, सीमावर्ती गाँवों आदि में वेद गुरुकुलों में, वेद पाठशालाओं में, वैदिक आश्रमों में हैं, और वेद अध्ययन के लिए उनका समर्पण लगभग 1900 - 2100 घंटे प्रतिवर्ष है। जो अन्य स्कूल बोर्ड की सीखने की प्रणाली के समय से दोगुना है और वैदिक छात्रों को ''गुरु-मुख-उच्चारण अनुच्चारण'' - वेद गुरु के सामने बैठकर शब्दशः उच्चारण सीखना होता है, संपूर्ण वेद, शब्दशः उच्चारण (उदात्त, अनुदात्त, स्वरित आदि) के साथ कण्ठस्थ करना होता है और स्मृति के बल पर बिना किसी पुस्तक/पोथी को देखे।

ज्ञात हो कि इस प्रकार के वैदिक अध्ययन, वेद मन्त्रपाठ की रीति, गुरु शिष्य की अखण्ड मौखिक परम्परा से प्रचलित क्रम के कारण वेदों के मौखिक प्रसारण को मानवता की अमूर्त सांस्कृतिक विरासत रूप में यूनेस्को-विश्व मौखिक विरासत सूची में मान्यता प्राप्त हुई है। इसलिए, सदियों पुरानी वैदिक शिक्षा (श्रुति परम्परा/सस्वर पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) की प्राचीनता और सम्पूर्ण अखण्डता को बनाए रखने के लिए सुयोग्य कार्यनीति की आवश्यकता है। इसलिए, प्रतिष्ठान और इस बोर्ड ने राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 द्वारा निर्धारित कौशल और व्यावसायिक विषयों के साथ-साथ आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि के साथ विशिष्ट प्रकार के वेद पाठ्यक्रम को अपनाया है।

कोई भी व्यक्ति तब सुखी होकर जी सकता है जब वह परा-विद्या और अपरा-विद्या दोनों का अध्ययन करता है। वेदों में से भौतिक ज्ञान, उनकी सहायक शाखाएँ और भौतिक रुचि के विषय अपरा-विद्या कहलाते थे। सर्वोच्च वास्तविकता का ज्ञान, उपनिषदों की अंतिम खोज, परा-विद्या कहलाती है। वेद और उसके सहायक के रूप में अध्ययन किए जाने वाले विषयों की कुल संख्या 14 है। विद्या की 14 शाखाएँ ये हैं - चार वेद, छह वेदांग, मीमांसा (पूर्व मीमांसा और उत्तर मीमांसा), न्याय, पुराण और धर्मशास्त्र। आयुर्वेद, धनुर्वेद, गन्धर्ववेद और अर्थशास्त्र सहित चौदह विद्याएं अठारह हो जाते हैं। सदियों

से भारत उपमहाद्वीप में सभी शिक्षा संस्कृत भाषा में ही थी, क्योंकि इस उपमहाद्वीप में लम्बे समय तक संस्कृत बोली जाने वाली भाषा रही। इसलिए वेद भी सुलभता से समझे जाते थे।

तक्षशिला के विद्यालयों के सम्बन्ध में अठारह शिल्प-या औद्योगिक और तकनीकी कला और शिल्प का उल्लेख किया गया है। छान्देग्य उपनिषद् तथा नीति ग्रन्थों में भी इन का विवरण है। निम्नलिखित 18 कौशल/व्यावसायिक विषय अध्ययन के विषय बताए गए हैं- (1) गायन सङ्गीत (2) वाद्य सङ्गीत (3) नृत्य (4) चित्रकला (5) गणित (6) लेखाशास्त्र (7) इञ्जीनियरिङ्ग (8) मूर्तिकला (9) प्रजनन (10) वाणिज्य (11) चिकित्सा (12) कृषि (13) परिवहन और कानून (14) प्रशासनिक प्रशिक्षण (15) तीरंदाजी, किला निर्माण और सैन्य कला (16) नये वस्तु या उपज का निर्माण । उपर्युक्त कला और शिल्प में तकनीकी शिक्षा के लिए प्राचीन भारत में एक प्रशिक्षु प्रणाली विकसित की गई थी। विद्या और अविद्या मनुष्य को इस प्रपंच में सन्तुष्ट जीवन व्यतीत करने के लिए समर्थ और परलोक में मुक्ति योग्य सिद्ध करती है ।

दुनिया की सबसे पुरानी सभ्यताओं में सर्व प्रथम भारतीय सभ्यता में शास्त्रों, विज्ञान और प्रौद्योगिकी को सीखने की एक विशाल एवं सुदृढ परम्परा रही है। भारत प्राचीन काल से ही ऋषियों, ज्ञानियों और संतों की भूमि के साथ-साथ विद्वानों और वैज्ञानिकों की भूमि भी रही है। शोध से पता चला है कि भारत सीखने सिखाने (विद्या-आध्यात्मिक ज्ञान और अविद्या- भौतिक ज्ञान) के क्षेत्र में विश्व गुरु तो था ही, सक्रिय रूप से भी सम्पूर्ण प्रपञ्च में योगदान दे रहा था और भारत में आधुनिक विश्वविद्यालयों जैसे सीखने के विशाल केन्द्र स्थापित किए गए थे, जहाँ हजारों शिक्षार्थी आते थे। प्राचीन ऋषियों द्वारा खोजी गई कई विज्ञान और प्रौद्योगिकी तकनीकी, सीखने की पद्धतियाँ, सिद्धान्तों और तकनीकों ने कई पहलुओं पर हमारे विश्व के ज्ञान के मूल सिद्धान्तों को बनाया और प्रबल किया है, खगोल विज्ञान, भौतिकी, रसायन विज्ञान, गणित, चिकित्सा, प्रौद्योगिकी, ध्वन्यात्मकता, व्याकरण आदि पर दुनिया में भारत का योगदान समझा जाता है। प्रत्येक भारतीय बालक, बालिका द्वारा इस महान् देश का गौरवान्वित नागरिक होने के कारण इन विषयों का ज्ञान प्राप्त कर लेना चाहिये। भारत की संसद् के प्रवेश द्वार पर उद्धृत ''वसुधैव कुटुम्बकम्'' जैसे भारत के विचार और विभिन्न अवसरों पर संवैधानिक प्राधिकरणों द्वारा उद्धृत कई वेद मंत्र के अर्थ वेदों के अध्ययन से ही ज्ञात होते हैं और उन पर मनन करके

ही वास्तविक प्रेरणा प्राप्त की जा सकती है। वेदों और सम्पूर्ण वैदिक साहित्य में "सत, चित, आनंद" के रूप में सभी प्राणियों की अन्तर्निहित समानता पर जोर दिया गया है।

यह भी उल्लेख किया गया है कि वेद वैज्ञानिक ज्ञान के स्रोत हैं और हमें आधुनिक समस्याओं के समाधान के लिए वेदों और भारतीय शास्त्रों के स्रोतों की ओर पुनः निष्ठा से देखना होगा। जब तक छात्रों को वेदों का पाठ, शुद्ध वैदिक ज्ञान सामग्री और वैदिक दर्शन को आध्यात्मिक ज्ञान और वैज्ञानिक ज्ञान के रूप में नहीं पढ़ाया जाता है, तब तक आधुनिक भारत की आकांक्षा को पूरा करने के लिए वेदों के सन्देश का प्रसार पूर्ण रूप से सम्भव नहीं है।

वेद की शिक्षा (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परंपरा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) केवल धार्मिक शिक्षा नहीं है। यह कहना अनुचित होगा कि वेदों का अध्ययन केवल धार्मिक निर्देश है। वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं और इनमें केवल धार्मिक सिद्धान्त ही नहीं हैं, बल्कि वेद शुद्ध ज्ञान के कोष है, मानव जीवन की कुञ्जी वेदों में है इसलिए, वेदों में निर्देश या शिक्षा को केवल "धार्मिक शिक्षा/धार्मिक निर्देश" के रूप में नहीं माना जा सकता है।

2004 की सिविल अपील संख्या 6736 में माननीय सर्वोच्च न्यायालय (AIR 2013: 15 SCC 677); (निर्णय की दिनाङ्क- 3 जुलाई 2013), जैसा कि माननीय सर्वोच्च न्यायालय के निर्णय में यह स्पष्ट है कि वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं। वेदों में गणित, खगोल विज्ञान, मौसम विज्ञान, रसायन विज्ञान, हाइड्रोलिक्स, भौतिक विज्ञान और प्रौद्योगिकी, कृषि, दर्शन, योग, शिक्षा, काव्यशास्त्र, व्याकरण, भाषा विज्ञान आदि के विषय सम्मिलित हैं, जिन्हें माननीय भारतीय सर्वोच्च न्यायालय द्वारा प्रकाशित किया गया है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के अनुपालन में प्रतिष्ठान एवं बोर्ड के माध्यम से वैदिक शिक्षा -

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 में भारतीय ज्ञान प्रणाली 'संस्कृत ज्ञान प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है, उनके महत्त्व और पाठ्यक्रम में उनका समावेश और विविध विषयों के संयोजन में लचीले दृष्टिकोण को मजबूती से प्रदर्शित किया गया है। कला एवं मानविकी के छात्र भी विज्ञान सीखेंगे, प्रयास करना होगा कि सभी व्यावसायिक विषय और व्यावहारिक कौशलों (सॉफ्ट स्किल्स) को प्राप्त करें। कला, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में भारत की गौरवशाली परम्परा इस तरह की शिक्षा की ओर बढ़ने में

सहायक होगी। भारत की समृद्ध, विविध प्राचीन और आधुनिक संस्कृति और ज्ञान प्रणालियों और परम्पराओं को संयोजित करने और उससे प्रेरणा पाने हेतु यह नीति बनायी गयी है। भारत की शास्त्रीय भाषाओं और साहित्य के महत्त्व, प्रासङ्गिकता और सुन्दरता की उपेक्षा नहीं की जा सकती है। संस्कृत, संविधान की आठवीं अनुसूची में वर्णित एक महत्त्वपूर्ण आधुनिक भाषा है यदि सम्पूर्ण लैटिन और ग्रीक साहित्य को मिलाकर भी इसकी तुलना की जाए तो भी वह संस्कृत शास्त्रीय साहित्य की बराबरी नहीं कर सकता। संस्कृत साहित्य में गणित, दर्शन, व्याकरण, सङ्गीत, राजनीति, चिकित्सा, वास्तुकला, धातुविज्ञान, नाटक, कविता, कहानी, और बहुत कुछ (जिन्हें "संस्कृत ज्ञान प्रणालियों" के रूप में जाना जाता है) के विशाल भण्डार हैं । विश्व विरासत के लिए इन समृद्ध संस्कृत ज्ञान प्रणाली विरासतों को न केवल पोषण और भविष्य के लिए संरक्षित किया जाना चाहिए बल्कि हमारी शिक्षा प्रणाली के माध्यम से शोध कराकर इन्हें बढ़ाते हुए नए उपयोगों में भी रखा जाना चाहिए। इन सबको हजारों वर्षों में जीवन के सभी क्षेत्रों के लोगों द्वारा, सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि के एक विस्तृत जीवन्त दर्शन के साथ लिखा गया है । संस्कृत को रूचिकर और अनुभावात्मक होने के साथ-साथ समकालीन रूप से प्रासङ्गिक विधियों से पढ़ाया जाएगा । संस्कृत ज्ञान प्रणाली का उपयोग विशेष रूप से ध्वनि और उच्चारण के माध्यम से है। फाउंडेशन और माध्यमिक स्कूल स्तर पर संस्कृत की पाठ्यपुस्तकों को संस्कृत के माध्यम से संस्कृत पढ़ाने (एस्.टी.एस्.) और इसके अध्ययन को आनन्ददायी बनाने के लिए सरल मानक संस्कृत (एस्.एस्.एस्.) में लिखा जाना है। ध्वन्यात्मकता और उच्चारण वेदों की मौखिक परम्परा पर लागू होता है। वैदिक शिक्षा ध्वन्यात्मकता और उच्चारण पर आधारित है।

कला और विज्ञान के बीच, पाठ्यक्रम और पाठ्येतर गतिविधियों के बीच, व्यावसायिक और शैक्षणिक धाराओं, आदि के बीच कोई स्पष्ट विभेद नहीं किया गया है। सभी ज्ञान की एकता और अखण्डता को सुनिश्चित करने के लिए, एक बहु-विषयक दुनिया के लिए विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कला, मानविकी और खेल के बीच एक बहु-विषयक (Multi-Disciplinary) एवं समग्र शिक्षा के विकास पर बल दिया गया है। नैतिकता, मानवीय और संवैधानिक मूल्य जैसे, सहानुभूति, दूसरों के लिए सम्मान, स्वच्छता, शिष्टाचार, लोकतान्त्रिक भावना, सेवा की भावना, सार्वजनिक सम्पत्ति के

लिए सम्मान, वैज्ञानिक चिन्तन, स्वतन्त्रता, उत्तरदायित्व, बहुलतावाद, समानता और न्याय पर जोर दिया गया है ।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.23 में अनिवार्य विषयों, कौशलों और क्षमताओं का शिक्षाक्रमीय एकीकरण के विषय में निर्देश है। विद्यार्थियों को अपने व्यक्तिगत पाठ्यक्रम को चुनने में बड़ी मात्रा में लचीले विकल्प मिलेगें, लेकिन आज की तेजी से बदलती दुनिया में सभी विद्यार्थियों को एक अच्छे, सफल, अनुभवी, अनुकूलनीय और उत्पादक व्यक्ति बनने के लिए कुछ विषयों, कौशलों और क्षमताओं को सीखना भी आवश्यक है। वैज्ञानिक स्वभाव और साक्ष्य आधारित सोच, रचनात्मकता और नवीनता, सौंदर्यशास्त्र और कला की भावना, मौखिक और लिखित अभिव्यक्ति और संवाद, स्वास्थ्य और पोषण, शारीरिक शिक्षा, शारीरिक दक्षता, स्वास्थ्य और खेल, सहयोग और टीम वर्क, समस्या को हल करने और तार्किक चिन्तन, व्यावसायिक एक्सपोजर और कौशल, डिजिटल साक्षरता, कोडिंग और कम्प्यूटेशनल चिन्तन, नैतिकता और नैतिक तर्क, मानव और संवैधानिक मूल्यों का ज्ञान और अभ्यास, लिङ्ग संवेदनशीलता, मौलिक कर्तव्य, नागरिकता कौशल और मूल्य, भारत का ज्ञान, पर्यावरण सम्बन्धी जागरूकता, जिसमें पानी और संसाधन संरक्षण, स्वच्छता और साफ-सफाई, समसामयिक घटना और स्थानीय समुदायों, राज्यों, देश और दुनिया द्वारा जिन महत्त्वपूर्ण मुद्दों का सामना किया जा रहा है उनका ज्ञान, भाषाओं में प्रवीणता के अलावा, इन कौशलों में सम्मिलित है। बच्चों के भाषा कौशल संवर्धन के लिए और इन समृद्ध भाषाओं और उनके कलात्मक निधि के संरक्षण के लिए, सार्वजनिक या निजी सभी विद्यालयों में सभी छात्रों को भारत की एक शास्त्रीय भाषा और उससे सम्बन्धित साहित्य सीखने का कम से कम दो साल का विकल्प मिलेगा।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.27 में "भारत का ज्ञान" के विषय में महत्त्वपूर्ण निर्देश है। "भारत का ज्ञान" में आधुनिक भारत और उसकी सफलताओं और चुनौतियों के प्रति प्राचीन भारत का ज्ञान और उसका योगदान - भारतीय ज्ञान प्रणाली जैसे गणित, खगोल विज्ञान, दर्शन, योग, वास्तुकला, चिकित्सा, कृषि, इंजीनियरिंग, भाषा विज्ञान, साहित्य, खेल के साथ –साथ शासन, राजव्यवस्था, संरक्षण आदि जहाँ भी प्रासङ्गिक हो, विषयों में सम्मिलित किया जाएगा। इसमें औषधीय

प्रथाओं, वन प्रबन्धन, पारम्परिक (जैविक) फसल की खेती, प्राकृतिक खेती, स्वदेशी खेलों, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में प्राचीन और आधुनिक भारत के प्रेरणादायक व्यक्तित्वों पर ज्ञानदायी विषय हो सकेंगे।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 11.1 में समग्र और बहु-विषयक शिक्षा की ओर प्रवृत्त करने के निर्देश हैं। भारत में समग्र एवं बहु-विषयक विधि से सीखने की एक प्राचीन परम्परा पर बल दिया गया है, तक्षशिला और नालन्दा जैसे विश्वविद्यालयों के उल्लेख सहित 64 कलाओं के ज्ञान के रूप में गायन और चित्रकला, वैज्ञानिक क्षेत्र जैसे रसायनशास्त्र और गणित, व्यावसायिक क्षेत्र जैसे बढ़ई का काम और कपड़े सिलने का कार्य, व्यावसायिक कार्य जैसे औषधि तथा अभियान्त्रिकी और साथ ही साथ सम्प्रेषण, चर्चा और वाद-संवाद करने के व्यावहारिक कौशल (सॉफ्ट स्किल्स) भी सम्मिलित है । यह विचार है कि गणित, विज्ञान, व्यावसायिक विषयों और सॉफ्ट स्किल सहित रचनात्मक मानव प्रयास की सभी शाखाओं को 'कला' माना जाना चाहिए, जिसका मूल भारत है। 'कई कलाओं के ज्ञान' या जिसे आधुनिक समय में प्राय: 'उदार कला' कहा जाता है (अर्थात्, कलाओं की एक उदार धारणा) की इस धारणा को भारतीय शिक्षा में वापस लाया जाना चाहिए, क्योंकि यह ठीक उसी तरह की शिक्षा है जो 21वीं सदी के लिए आवश्यक है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.1 में भारतीय भाषाओं, कला और संस्कृति का संवर्धन हेतु निर्देश हैं। भारत संस्कृति का समृद्ध भण्डार है – जो हजारों वर्षों में विकसित हुआ है, और यहाँ की कला, साहित्यिक कृतियों, प्रथाओं, परम्पराओं, भाषायी अभिव्यक्तियों, कलाकृतियों, ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक धरोहरों के स्थलों इत्यादि में परिलक्षित होता हुआ दिखता है। भारत में भ्रमण, भारतीय अतिथि सत्कार का अनुभव होना, भारत के आकर्षक हस्तशिल्प एवं हाथ से बने कपड़ों को खरीदना, भारत के प्राचीन साहित्य को पढ़ना, योग एवं ध्यान का अभ्यास करना, भारतीय दर्शनशास्त्र से प्रेरित होना, भारत के अनुपम त्यौहारों में भाग लेना, भारत के वैविध्यपूर्ण सङ्गीत एवं कला की सराहना करना और भारतीय फिल्मों को देखना आदि ऐसे कुछ आयाम हैं जिनके माध्यम से दुनिया भर के करोड़ो लोग प्रतिदिन इस सांस्कृतिक विरासत में सम्मिलित होते हैं, इसका आनन्द उठाते हैं और लाभ प्राप्त करते हैं।

यही सांस्कृतिक एवं प्राकृतिक सम्पदा है भारत की इस सांस्कृतिक सम्पदा का संरक्षण, संवर्धन एवं प्रसार, देश की उच्चतर प्राथमिकता होनी चाहिए क्योंकि इस देश की पहचान के साथ-साथ इसकी अर्थव्यवस्था के लिए भी बहुत महत्त्वपूर्ण है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.2 में कलाओं के विषय में निर्देश हैं। भारतीय कला एवं संस्कृति का संवर्धन राष्ट्र एवं राष्ट्र के नागरिकों के लिए महत्त्वपूर्ण है । बच्चों में अपनी पहचान और अपनेपन के भाव तथा अन्य संस्कृतियों और पहचानों की सराहना का भाव पैदा करने के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति जैसी प्रमुख क्षमताओं को बच्चों में विकसित करना जरूरी है। बच्चों में अपने सांस्कृतिक इतिहास, कला, भाषा एवं परम्परा की भावना और ज्ञान के विकास द्वारा ही एकता, सकारात्मक सांस्कृतिक पहचान और आत्म-सम्मान निर्मित किया जा सकता है । अत: व्यक्तिगत एवं सामाजिक कल्याण के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति का योगदान महत्त्वपूर्ण है ।

प्रतिष्ठान की मुख्य वैदिक शिक्षा (वेदों की श्रुति या मौखिक परम्परा/वेद पाठ/वैदिक ज्ञान परम्परा) सहित अन्य आवश्यक आधुनिक विषय- संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि, भारतीय कला, SUPW आदि महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड की पाठ्य पुस्तकों की नींव/स्रोत भारतीय ज्ञान परम्परा (IKS) विषयों की अनुप्रविष्टि (इनपुट) पर आधारित हैं। ये सभी निर्देश राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के दिशानिर्देशों के अनुरूप है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 एवं महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के शैक्षिक चिन्तकों, प्राधिकरणों के परामर्श एवं नीति को ध्यान में रखते हुए प्रारूप पुस्तकें पीडीएफ फॉर्मेट में उपलब्ध करायी गयी हैं। इन पुस्तकों को भविष्य में NCF के अनुरूप अद्यतन किया जाएगा और अन्त में प्रिन्ट रूप में उपलब्ध कराया जाएगा।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के राष्ट्रीय आदर्श वेदविद्यालय के अध्यापक महानुभावों ने, वेद अध्यापन (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परम्परा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) में समर्पित आचार्यों ने, सम्बद्ध वेद पाठशालओं के संस्कृत एवं आधुनिक विषयों के अध्यापकों ने, आधुनिक विषय पाठ्यपुस्तकों को इस रूप में प्रस्तुत करने में पिछले दो वर्षों में अथक परिश्रम किया है। उन सभी को हृदय की गहराई से धन्यवाद समर्पण करता हूँ। राष्ट्र स्तर के विविध विशेषज्ञों ने

समय-समय पर पधार कर पाठ्यपुस्तकों में गुणवत्ता लाने में विशेष सहायता प्रदान की है। उन सभी विशेषज्ञों एवं विद्यालयों के अध्यापक महानुभावों को भी धन्यवाद अर्पित करता हूँ। अक्षर योजना हेतु, चित्राङ्कन हेतु, पेज सेटिंग हेतु मेरे सहयोगी कर्मचारियों ने कार्य किया है, उन सभी को हृदय की गहराई से कृतज्ञता समर्पण करता हूँ।

पाठ्य पुस्तकों की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए रचनात्मक आलोचना सहित सभी सुझावों का स्वागत है।

आपरितोषात् विदुषां न साधु मन्ये प्रयोगविज्ञानम्।
बलवदपि शिक्षितानाम् आत्मन्यप्रत्ययं चेतः॥

(अभिज्ञानशाकुन्तलम् १.०२)

(जब तक विद्वानों को पूर्ण सन्तुष्टि न हो जाए तब तक विशिष्ट प्रयोग को सब तरह से सफल नहीं मानता क्योंकि प्रयोग में विशेष योग्यता प्राप्त विद्वान भी पहले प्रयोग के सफलता में आश्वस्त नहीं रहता है।)

प्रो. विरूपाक्ष वि जड्डीपाल्
सचिव
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

विषयानुक्रमणिका

अध्याय 1

संख्या पद्धति

प्रिय बटुकों ! पिछली कक्षाओं में आपने कई प्रकार की संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं । जिसमें प्राकृत संख्या (1, 2, 3, 4, ...), पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3, 4,……..), सम संख्या (2, 4, 6, ...), विषम संख्या (1, 3, 5, 7, 9, ………..) पूर्णाङ्क संख्या (..........-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3…….) एवं परिमेय संख्या के बारे में आपको स्मरण होगा । वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है । जहाँ p व q पूर्णाङ्क संख्याएँ है और $q \neq 0$ है । कोई भी परिमेय संख्या मानक रूप तब कही जाती है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णाङ्क हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्वगुणनखण्ड न हो ।

❖ अपने गुरुजी से चर्चा करें कि हम $q \neq 0$ इस बात पर क्यों बल देते हैं ?

जैसे : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-17}{23}, \frac{-12}{1}, \frac{-15}{71}, \frac{-71}{15}$

p को q से विभाजित करने पर भाग पूरा-पूरा जाता है अथवा दशमलव प्राप्त होता है परिमेय संख्या में प्राकृत संख्या,पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णाङ्क संख्याओं का समावेश होता है । किन्हीं दो परिमेय संख्या के बीच अनन्त परिमेय संख्यायें होती है । उपर्युक्त सभी संख्याओं के बारे में आपको स्मरण होगा इस क्रम में हम आगे अपरिमेय संख्याओं का विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

संख्या रेखा पर संख्या का पुनरावलोकन -

1) प्राकृत संख्या –

1 2 3 4 5 .... + ∞

यहाँ संख्या 1 से दाहिनी ओर बढ़ती है ।

2) पूर्ण संख्या –

0 1 2 3 4 5 .... + ∞

यहाँ संख्या 0 से दाहिनी ओर बढ़ती है ।

3) पूर्णाङ्क संख्या –

-∞.......... -3 -2 -1 0 1 2 3 .... + ∞

यहाँ संख्या रेखा 0 के दोनों ओर अनन्त रूप से बढ़ती है ।

करो और सीखो :

(अ) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृत संख्या होती है –

(I) सत्य (II) असत्य (III) सम्भव नहीं (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है –

(I) सत्य (II) असत्य (III) सम्भव नहीं (IV) इनमें से कोई नहीं

परिमेय संख्या -

$-2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$

वे सभी संख्याएँ जो अंश एवं हर या ($\frac{p}{q}$) के रूप में लिखी जा सके वे सभी संख्याएँ परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। **किन्हीं दो परिमेय संख्या के बीच अनन्त परिमेय संख्या होती है।** आगे इस क्रम में हम अपरिमेय संख्या के बारे में अध्ययन करेंगे।

अपरिमेय संख्या –

वे संख्याएँ जो परिमेय संख्या नहीं होती हैं, **अपरिमेय संख्या** कहलाती हैं। इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप नहीं लिखा जा सकता है। p और q पूर्णाङ्क और $q \neq 0$ है। जैसा कि आप जानते हैं कि परिमेय संख्या अनन्त होती है इसी प्रकार अपरिमेय संख्या भी अनन्त होती हैं।

उदाहरण : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi$, 0.16160016000160000……….

बटुकों ! आपको याद होगा जब भी प्रतीक "$\sqrt{\ }$" (करणी) का प्रयोग करते हैं। तब हम मानकर चलते हैं कि वह संख्या धनात्मक वर्गमूल अत: $\sqrt{16} = 4$ यद्यपि 4 और - 4 दोनों ही संख्या के 16 के वर्गमूल है।

अत: संख्या रेखा पर एक साथ ही ली गई संख्या परिमेय एवं अपरिमेय संख्या के समूह को **वास्तविक संख्याओं** का नाम दिया जाता है। इसे `R' से दर्शाया जाता है।

वास्तविक संख्याएँ एवं उनके दशमलव प्रसार –

वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार पर विचार कर परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं में विभेद किया जा सकता है।

परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार –

वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार सांत (Terminating) या अनवसानी आवर्ती (Non – Terminating Recurring) हो **परिमेय संख्या** कहलाती है ।

अ) परिमेय संख्या जिनका दशमलव प्रसार सांत (Terminating) हो -

परिमेय संख्या जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में हो p को q से भाग देने पर शेष शून्य हो जाता है तो वह सांत दशमलव प्रसार संख्या **परिमेय संख्या** कहलाती है ।

उदाहरण : $\frac{1}{2}, \frac{8}{10}, \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} = 0.5$ (सांत दशमलव प्रसार)

$\frac{8}{10} = 0.8$ (सांत दशमलव प्रसार)

$\frac{5}{8} = 0.625$ (सांत दशमलव प्रसार)

ब) परिमेय संख्या जिनका दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती

(Non – Terminating Recurring) -

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p को q से भाग देने पर कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है जिससे दशमलव प्रसार निरन्तर जारी रहता है । तो वह अनवसानी आवर्ती (Non – Terminating Recurring) दशमलव प्रसार संख्या **परिमेय संख्या** कहलाती है । **उदाहरण** :$\frac{1}{3}$ = 0.3333............... अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार

$\frac{1}{7}$ = 0.142857142857..अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार

$\frac{1}{3}$ के भागफल में 3 की पुनरावृत्ति को दिखाने के लिए भागफल को $0.\bar{3}$ या 0.3 के रूप में लिखते हैं । इसी तरह $\frac{1}{7}$ के भागफल एक खण्ड 142857 की पुनरावृत्ति होती है उसे दिखाने के लिए भागफल को $0.\overline{142857}$ के रूप में लिखते हैं ।

अत: हम कह सकते हैं कि **सांत या अनवसानी आवर्ती वाली दशमलव प्रसार संख्या परिमेय संख्या** होती है ।

करो और सीखो –

निम्न दशमलव प्रसार संख्याओं में से सांत एवं असांत परिमेय संख्या को छाँटिए ।

1)	0.254	2)	0.333	3)	$0.\overline{483}$
4)	$1.\overline{25}$	5)	$2.\overline{45}$	6)	4.825

अपरिमेय संख्या के दशमलव प्रसार –

वह संख्या जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी (असांत) अनावर्ती होते हैं अपरिमेय संख्या कहलाती है । दूसरे शब्दों में कह सकते हैं अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार अनवसानी (असांत) अनावर्ती (Non – Terminating Non - Recurring) होते हैं ।

करणी संख्याओं का ज्ञान हमारे शुल्बसूत्रों में प्राप्त होता है । जैसे वर्ग को द्विगुणित तथा पञ्चगुणित आदि करने में $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ आदि करणी का ज्ञान होता है । बौधायन शुल्बसूत्र के निम्न श्लोक में करणी संख्याओं में $\sqrt{2}$ उल्लेख मिलता है ।

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्च चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोऽनेन सविशेष: ॥

(बोधायन शुल्बसूत्र 2.12)

अर्थात्, वर्ग के प्रमाण भुजा की लम्बाई को एक तिहाई से वृद्धि करें और इसमें वर्ग की एक तिहाई के चौथाई भाग को जोड़कर इसमें $\frac{1}{34}$ भाग व्यवकलित करें यह सूत्र $\sqrt{2}$ के मान की व्याख्या करता है ।

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = 1.414256$$

उदाहरण : संख्या $\sqrt{2}$ का दशमलव प्रसार 1.4142135623

चूँकि $\sqrt{2}$ का दशमलव प्रसार अनवसानी (असांत) अनावर्ती है अत: $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है । π भी एक अपरिमेय संख्या है क्योंकि इसका भी दशमलव प्रसार असांत है ।

π का दशमलव प्रसार = 3.14592653………

अपरिमेय संख्या की परिभाषा –

वह संख्या जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है । जहाँ p एवं q एक पूर्णाङ्क हो अथवा वह संख्या जिनका **दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती** (Non – Terminating Non - Recurring) हो **अपरिमेय संख्या** कहलाती है । **उदाहरणार्थ :**

0.2354……. ,0.0808008000……. , π , 0.16160016000160000…….

करो और सीखो - निम्न दशमलव प्रसार वाली संख्या में सांत, असांत (अनवसानी) एवं अनवसानी आवर्ती मिलान कीजिए ।

सांत	-	3.141414
असांत (अवनसानी)	-	1.25
अनवसानी आवर्ती	-	3.14592653……..

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये ।

(अ) निम्नांकित में कौन परिमेय संख्या है -

(I) 0 (II) $\sqrt{2}$ (III) π (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) निम्नांकित में कौन परिमेय संख्या है -

(I) $\sqrt{2}$ (II) $\sqrt{23}$

(III) $\sqrt{225}$ (IV) 0.1010010001………

(स) निम्न में कौन परिमेय संख्या है -

(I) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (II) $\frac{1}{2}$ (III) $\sqrt{2}$ (IV) $\sqrt{11}$

(द) निम्न में कौन परिमेय संख्या है -

(I) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (II) $\frac{1}{2}$ (III) $\sqrt{2}$ (IV) $\sqrt{11}$

(प) निम्न में कौन परिमेय संख्या है -

(I) $\sqrt{2}$ (II) $\sqrt{3}$ (III) $\sqrt{4}$ (IV) $\sqrt{5}$

(फ) निम्न में कौन अपरिमेय संख्या है -

(I) 0 (II) 1 (III) 2 (IV) $\sqrt{2}$

(भ) π क्या है -

(I) परिमेय संख्या (II) अपरिमेय संख्या

(III) पूर्ण संख्या (IV) कोई नहीं

(म) शून्य क्या है -

(I) परिमेय संख्या (II) अपरिमेय संख्या

(III) प्राकृत संख्या (IV) इनमें कोई नहीं

(य) प्रत्येक परिमेय संख्या है -

(I) एक प्राकृत संख्या (II) एक पूर्ण संख्या

(III) एक पूर्णांक (IV) एक वास्तविक संख्या

(र) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है -

(II) सत्य (II) असत्य (III) सम्भव नहीं (IV) इनमें से कोई नहीं

(ल) प्रत्येक परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं का समूह .... के अन्तर्गत आता है -

(III) प्राकृत संख्या (II) पूर्ण संख्या (III) पूर्णांक संख्या (IV) वास्तविक संख्या

2. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं में से सांत, असांत अनवसानी, अनवसानी आवर्ती वाली संख्या को छाँटिए।

अ) 0.36 ब) 0.0909090909 या $0.\overline{9}$

स) 4.125 द) 0.230739230......

य) 0.1818 प) 0.8225

3. निम्न दशमलव प्रसार वाली संख्याओं से परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या छाँटिए।

अ) 0.36 ब) 0.3796 स) 0.8225

द) $0.\overline{142857}$ य) 1.10100100010000

प) 1.25 फ) 7.478478

4. निम्न संख्याओं में से परिमेय एवं अपरिमेय संख्या को छाँटिए ।

अ) $\sqrt{2}$ ब) $\sqrt{16}$ स) $\sqrt{23}$ द) $\sqrt{25}$

य) $\sqrt{36}$ प) $\sqrt{35}$ फ) $\sqrt{49}$ ज) $\sqrt{50}$

वास्तविक संख्या पर सङ्क्रियाएँ –

भास्कराचार्य द्वारा लिखित 'बीजगणितम' में करणी संख्याओं के सङ्कलन एवं व्यवकलन के बारे में श्लोक मिलता है ।

योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ।

योगान्तरे रूपवदेतयो: स्तो वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च ॥

(बीजगणितम् ,अथ करणीषड्विधम् ,13)

अर्थात्, समान करणी वाली संख्या के योग एवं व्यवकलन किये जाते हैं । दूसरे शब्दों में समान करणी वाली संख्याओं का अन्तर करने पर योगफल प्राप्त होता है क्योंकि नियम है - **'धनर्णयोरन्तरमेव योग:'** साथ ही जिस करणी संख्या का पूरा-पूरा मूल ना मिलें वह संख्या मूल रूप (मूल करणी) में रखी जाती है ।

उदाहरण : $2\sqrt{2}$ एवं $\sqrt{2}$ का योगफल ज्ञात कीजिये ।

हल : $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

उदाहरण : $3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ एवं $2\sqrt{5}$ का योगफल ज्ञात करें ।

हल : $3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

$= (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) + 3\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

गुणन करें -

आइए, निम्न उदाहरणों का अभ्यास करें ।

1) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (चूँकि $2 = \sqrt{2}.\sqrt{2}$)

2) $3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 9 \times 2 = 18$

3) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

4) $3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{2 \times 3} = 9\sqrt{6}$

भाग - आइये, निम्न उदाहरणों का अभ्यास करें ।

उदाहरण: $8\sqrt{2}$ को $3\sqrt{2}$ से भाग दीजिए ।

हल: $8\sqrt{2} \div 3\sqrt{2}$

$= \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{8}{3}$

उदाहरण: $8\sqrt{15}$ को $3\sqrt{5}$ से भाग दीजिए ।

हल: $8\sqrt{15} \div 3\sqrt{5}$

$= \frac{8\sqrt{15}}{3\sqrt{5}}$

$= \frac{8\sqrt{5}\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

$= \frac{8\sqrt{3}}{3}$

वास्तविक संख्या को 'सरल करने' का अर्थ यह है कि व्यंजक को परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं को योग के रूप में लिखना चाहिए।

यहाँ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ पर विचार कीजिए।

यह एक अपरिमेय संख्या है। जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला पद होता है या कोई संख्या करणी चिह्न के अन्दर हो तब ऐसे तुल्य व्यंजक में हर को परिमेय संख्या में परिवर्तित करने की प्रक्रिया को हर का **परिमेयकरण** कहा जाता है।

आचार्य भास्कराचार्य द्वारा लिखित बीजगणित में परिमेयकरण की विधि बताई गयी है।

धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे करण्या असकृद्विधाय।

तादृक् छिदा भाज्यहरौ निहन्या- देकैव यावत्करणी हरे स्यात् ॥

(करणीषड्विधम् 16 पृ. 63)

अर्थात् किसी करणी संख्या के छेद(हर या भाजक) में किसी एक करणी के धन और ऋण चिह्न को बदल कर उस छेद (हर) से भाज्य और भाजक को गुणा कर दें। फिर उस करणी का भाज्यगत करणियों में भाग देने पर जो लब्धि प्राप्त हो, वह इष्ट करणी कहलाती है।इस प्रक्रिया को हर का **परिमेयकरण** कहा जाता है। आइये, निम्न उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण : संख्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना चाहते हैं। जिसमें हर एक परिमेय संख्या है।

हम जानते हैं, $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ परिमेय है, हम यह भी जानते हैं $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से गुणा करने पर हमें तुल्य व्यंजक प्राप्त होता है। क्योंकि $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ अत: इन दो तथ्यों को साथ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

इस रूप में $\frac{1}{\sqrt{2}}$ का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और $\sqrt{2}$ के मध्य स्थित है।

उदाहरण : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $(2-\sqrt{3})$ से गुणा करने व भाग देने पर हमे यह प्राप्त होता है।

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

हम जानते हैं। कि

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

उदाहरण : $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ को $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ से गुणा करने एवं भाग देने पर-

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

या $$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

या $$= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये ।

(अ) $6\sqrt{5} \times 6\sqrt{5} =$

(I) $12\sqrt{5}$ (II) 60 (III) 180 (IV) $8\sqrt{5}$

(ब) $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} =$

(I) $16\sqrt{45}$ (II) $16\sqrt{5}$ (III) $4\sqrt{5}$ (IV) 720

2. निम्न दी गई संख्याओं में से कौन-कौन सी परिमेय संख्या है ।

1) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $3\sqrt{3} - \sqrt{3}$ 4) 3π

3. सरल कीजिए ।

1) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ 2) $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ 3) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$

4) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ 5) $7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ 6) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

7) $4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$ 8) $\frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ 9) $\frac{5\sqrt{16}}{\sqrt{8}}$

4. निम्नलिखित के हर का परिमेयकरण कीजिए ।

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

हमने सीखा –

1) संख्या r को परिमेय संख्या कहा जाता है । यदि $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है । जहाँ p व q पूर्णाङ्क है और $q \neq 0$ है ।

2) संख्या r को अपरिमेय संख्या कहा जाता है । यदि $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p व q पूर्णाङ्क है और $q \neq 0$ है ।

3) एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है, **परिमेय संख्या** होती है ।

4) एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती होता है। **अपरिमेय संख्या** कहलाती है ।

5) सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं के समूह प्राप्त होता है ।

6) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ को हर का परिमेयीकरण करने के लिए हम $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ से गुणा करते हैं जहाँ a व b पूर्णाङ्क है ।

अध्याय 2

बहुपद

प्यारे विद्यार्थियों ! आपने पूर्व कक्षा में बीजीय व्यंजकों सङ्क्रियाएँ (+, – , ×, ÷) आदि को हल करना सीखा है । बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्ड भी किया जा सकता है ।

जैसे:

$$y^2 = y \times y$$

$$x^3y = x \times x \times x \times y$$

आपको बीजीय सर्वसमिका और उनके गुणनखण्ड के बारे में स्मरण होगा । जैसे -

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

इस अध्याय में सबसे पहले विशेष प्रकार के बीजीय व्यंजक जिसे बहुपद (Polynomial) कहा जाता है । इस अध्याय में हम बहुपद से सम्बन्धित शब्दावली एवं शेषफल प्रमेय का अध्ययन करेंगे ।

बहुपद -

बीजगणित के निम्न श्लोक में अव्यक्त (चर) राशियों को दर्शाने के बारे में निम्न श्लोक मिलता है ।

यावत्तावत्कालको नीलकोऽन्यो वर्णः पीतो लोहितश्चैतदाद्याः ।

अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञा-स्तत्संख्यानं कर्तुमाचार्यवर्यैः ॥

अर्थात् अव्यक्त (अज्ञातमान) या चर राशियों की गणना करने के लिए उन की यावत्-तावत्, कालक, नीलक, पीतक और लोहित इत्यादि संज्ञाएँ की है, जिससे सभी अव्यक्त राशियों का पृथ्क-पृथ्क परिज्ञान हो । एक चर राशि को एक सङ्केत यथा x, y, z……. के रूप में व्यक्त किया जाता है । इसी प्रकार, एक अचर और चर को चार मूलभूत सङ्क्रियाओं (+, −,×, ÷) के साथ व्यक्त किया जाता है तो उसे **बीजीय व्यंजक** कहते हैं । बीजीय व्यंजक का सामान्य रूप ax है जिसमें **a अचर** और **x चर** है ।

उदाहरण : $4x, 9x, x^2 + 2, x + 5, x^3 + 4x$………. आदि ।

उपर्युक्त उदाहरण में बीजीय व्यंजक हैं । इन सभी व्यंजकों में चर x की घाताङ्क पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3……….) में है । इस प्रकार के व्यंजकों को हम **एक चर वाले बहुपद** कहते हैं । बहुपद को P(x) से आदि से प्रकट करते हैं । दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि ''जिस बीजीय व्यंजक में चरों की घात एक पूर्ण (संख्या 0, 1, 2, 3………..) होती है । वह बीजीय व्यंजक **बहुपद** कहलाता है ।''

आइए, उदाहरण के माध्यम से बहुपद को समझते हैं ।

उदाहरण : क्या $x^2 + 2x + 1$ बीजीय व्यंजक बहुपद है ?

उत्तर : हाँ, यह बीजीय व्यंजक बहुपद है क्योंकि इस बहुपद में चर x है । जिसमें चर x का घाताङ्क (2 व 1) है । यहाँ चर के घाताङ्क 2 एवं 1 (पूर्ण संख्या) से है अत: यह एक बहुपद है ।

उदाहरण : क्या $x^2 + 2y^5 + 1$ बीजीय व्यंजक है ?

उत्तर : दिये गये बीजीय व्यंजक में चर x व y है यहाँ दोनों चरों का घाताङ्क (2 व 5) पूर्ण संख्या है अत: $x^2 + 2y^5 + 1$ एक बहुपद है ।

दीक्षा – क्या $3 + t^6$ भी एक बहुपद है ?

विशाल – हाँ यह भी एक बहुपद है क्योंकि यहाँ चर t की घाताङ्क 6 है जो कि पूर्ण संख्या है ।

दीक्षा – क्या यह भी $3x^3 + 4y^{-5} + 3$ बहुपद है इस बीजीय व्यंजक में कितने चर हैं ?

विशाल – इस बीजीय व्यंजक में दो चर x व y है यह बहुपद नहीं है क्योंकि चर y की घाताङ्क (-5) है जो पूर्ण संख्या नहीं है ।

गुरुजी – आप बिल्कुल सही चर्चा कर रहे हैं । **जिस बीजीय व्यंजक में चर की घाताङ्क पूर्ण संख्या हो बहुपद कहलाता है ।** जैसे : $x^2 + 2$, $x^2 + y^2 + t^3$, $3x + 5$

वहीं दूसरी तरफ जिस बीजीय व्यंजक में -

1) चर की घाताङ्क ऋणात्मक हो । **जैसे** : – 2, – 5, – 3

2) कोई भी पद जो किसी चर से विभाजित हो यथा $\frac{1}{x}$ **जैसे** : $\frac{1}{3x}$, $3x + \frac{5}{x}$

3) कोई भी भिन्न वाले घाताङ्क जैसे कि $\sqrt{x}$ क्योंकि इसे $x^{\frac{1}{2}}$ तरह लिखा जाता है।

जैसे : $x^2+y^{\frac{1}{2}}$ चर बीजीय व्यंजक में चर y की घाताङ्क $\frac{1}{2}$ (भिन्न संख्या) है अत: $x^2+y^{\frac{1}{2}}$ बहुपद नहीं है।

यदि **किसी बीजीय व्यंजक में चर की घाताङ्क ऋणात्मक या भिन्न संख्या या कोई भी पद जो किसी चर से विभाजित हो तो वह बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं होता है।** लेकिन एक बहुपद में अचर, चर या घात हो सकते हैं ।

उदाहरण :

अचर (Constants) = $3, 2, -5, \frac{1}{2}$

चर (Variables) = x, xy, xyz, abc

घाताङ्क (exponents) = 0, 1, 2, 3 इत्यादि

बहुपद का घात –

यदि बहुपद $P(x)$ है तो चर के बहुपद में x की उच्चतम घात (highest Power) **बहुपद का घात** (Degree of Polynomial) कहलाता है ।

1) जिस बहुपद में चर की उच्चतम घात 1 हो वह बहुपद एक घातीय बहुपद या **रैखिक बहुपद** कहलाता है । **जैसे** : $3x, 4x + 1, 1 + 5x$

2) जिस बहुपद में चर की उच्चतम घात 2 हो वह बहुपद **द्विघात बहुपद** कहलाता है ।

जैसे : $x^2 + x + 2, 2x^2 + 1, 3 + 3t^2$

3) जिस बहुपद में चर की घात तीन हो वह बहुपद **त्रिघात बहुपद** कहलाता है ।

जैसे : $3x^3 + 3x, 3x^3 + x^2 + 2x + 1, 4x^3$

4) अचर बहुपद **शून्य बहुपद** कहलाता है दूसरे शब्दों में शून्य बहुपद की अधिकतम घात शून्य होती है ।

जैसे : $3x^0 + 1, 4, -5y^0$ (चूँकि $x^0 = 1$)

सोचिए : 1) क्या $4x^0 + 1$ भी एक बहुपद है । (हाँ / नहीं)

2) क्या $3\sqrt{x} + 2$ भी एक बहुपद है । (हाँ / नहीं)

करो और सीखो –

रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद के दो उदाहरण लिखिए ।

अ) रैखिक बहुपद $\underline{3x + 5}$, __________ , __________

ब) द्विघात बहुपद $\underline{t^2 + 2t}$, __________ , __________

स) त्रिघात बहुपद $\underline{3t^3 + 2t^2 + 1}$, __________ , __________

उदाहरण : नीचे दिए गए बीजीय व्यंजक बहुपद हैं या नहीं यदि हैं तो बहुपद के पदों की संख्या एवं बहुपद की घात बताइये ।

1). $3x^4 + 2x^2 + 1$ **2).** $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$

हल 1) : $3x^4 + 2x^2 + 1$

दिया है - $3x^4 + 2x^2 + 1$ बीजीय व्यंजक एक बहुपद है ।

बहुपद में पदों की संख्या $= 3 \quad (3x^4, 2x^2, 1)$

बहुपद की घात 4 है ।

हल 2) : $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$

दिया है $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$ बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं है क्योंकि यहाँ 2 का गुणांक $\sqrt{x}$ है अर्थात् $x^{½}$ चर कि घात एक एक भिन्न संख्या (1/2) है । इसलिए यह बहुपद नहीं है ।

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये ।

(अ) निम्न में कौन रैखिक बहुपद है -

(I) x^2 (II) $7x^3$ (III) x-x^3 (IV) x+1

(ब) निम्न में कौन-सा द्विघाती बहुपद है -

(I) x - x^3 (II) 1 + x (III) y+y^2+1 (IV) 3t

(स) निम्न में कौन-सा द्विघाती बहुपद है -

(I) x^3+x (II) x^2+x (III) x+1 (IV) x^3

(द) निम्न में कौन-सा त्रिघाती बहुपद है -

(I) x^2 (II) x+1 (III) $7x^3$ (IV) $\frac{1}{x^3}$

(प) बहुपद $5x^3+4x^2+7x$ का घात है -

(I) 1 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(फ) बहुपद $5y^6-4x^2-6x$ का घात है -

(I) 2 (II) (III) 6 (IV) 8

2. निम्न व्यंजकों में से कौन-कौन बहुपद है ।

(1) $3x^2+1$ (2) $3x^2+4t^2+1$ (3) $2x^{-5}+2x^2+1$

(4) $3\sqrt{x}+1$ (5) $10x^5+3x$ (6) $4x^{-7}+3x-5$

3. निम्न बहुपदों में से रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपदों को छाँटिए ।

$(3x^2+4x+1$, $4x^2$, $3x+1$, $4x^2+t+1$,

$5x^2$, x^3+1 , $4y+1$, $5y$, $2x^2+1$, $x+3t^3)$

4. निम्नलिखित बहुपदों की घात क्या है ?

(1) $10x^{10} + 10$ (2) $5x^7 + 5x^6 + 1$ (3) $3x^2 + 2$

(4) $5x^2$ (5) $10y^3 + y + 1$ (6) $10x^9$ (7) 14

(8) $10x^0 + 1$ (9) $10x^7 + 10x^0 + 1$ (10) $5x^1 + 5x^0$ (11) 0

बहुपद के शून्यक -

निम्न बहुपद $p(x)$ लीजिए।

$$p(x) = 3x + 1$$

यदि हम $p(x)$ बहुपद में चर के स्थान पर 2 को प्रतिस्थापित करते(रखते) हैं तो इस बहुपद $p(x)$ का मान प्राप्त होगा।

$$\begin{aligned} p(2) &= 3(2) + 1 \\ &= 6 + 1 \qquad [\,3(2) = 3 \times 2 = 6\,] \\ &= 7 \end{aligned}$$

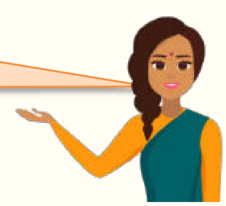
हम कह सकते हैं कि $x = 2$ पर बहुपद $p(x)$ का मान 7 है।

इस प्रकार, $p(0) = 3 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

$p(3) = 3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$

लक्ष्मी:

क्या आप $p(4)$ ज्ञात कर सकते हैं ?



किसी बहुपद में चर के स्थान पर ऐसा मान रखें जिसमें बहुपद का मान शून्य प्राप्त हो। बहुपद का वह मान **शून्यक** कहलाता है । एक वास्तविक संख्या k बहुपद p(x) का शून्यक कहलाती है । यदि $P(k) = 0$ है ।

आइये , उदाहरण के माध्यम से बहुपद के शून्यक को समझते हैं ।

उदाहरण : 2 अथवा(– 2) के बहुपद $p(x) = x + 2$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए ।

हल : $p(x) = x + 2$

$x = 2$ रखने पर $p(2) = 2 + 2 = 4$

$x = -2$ रखने पर $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अत: – 2 बहुपद $p(x) = x + 2$ का शून्यक है जबकि 2 नहीं है ।

उदाहरण : 3 अथवा – 3 के बहुपद $p(y) = 2y - 6$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए ।

हल : $p(y) = 2y - 6$

$y = 3$ रखने पर $p(3) = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$

$y = -3$ रखने पर $p(-3) = 2(-3) - 6 = -6 - 6 = -12$

अत: 3 बहुपद $p(y) = 2y - 6$ का शून्यक है जबकि – 3 नहीं ।

करो और सीखो –

चिह्नित (√)करें -

बहुपद (x + 10)का शून्यक है । (10 / – 10)

बहुपद में पद का गुणांक :

उदाहरण : बहुपद $\frac{\pi}{2}x^3$ +x में x^3 का गुणांक है -

हल: दिया है बहुपद $\frac{\pi}{2}x^3 + x$

x^3 का गुणांक $= \frac{\pi}{2} \times x^3$

अत: x^3 का गुणांक $\frac{\pi}{2}$ है ।

उदाहरण : यदि x = 5 के लिए बहुपद $4x^2$+3 का मान होगा -

हल: दिया है बहुपद $4x^2$+3

यदि x = 5 हो तब,

$P(x) = 4x^2+3$

$P(x) = 4\,(5)^2 + 3$

$P(x) = 4 \times 25 + 3$

$P(x) = 100+3 = 103$

अत: x = 5 होने पर बहुपद $4x^2$+3 का मान 103 होगा ।

शेषफल प्रमेय –

आइए , दो संख्याओं 16 व 3 को लीजिए आप जानते हैं 16 को 3 से भाग देने पर 5 भागफल एवं 1 शेषफल आएगा । हम जानते हैं,

भाज्य = भाजक ×भागफल + शेषफल

$16 = 3 \times 5 + 1$

$16 = 15 + 1$

$16 = 16$

भाजक भाज्य भागफल

3) 16 (5

– 15

01 (शेषफल)

हम यहाँ देखते हैं कि 1 शेषफल है ।

इस प्रकार, 10 में 2 से भाग देने पर हमे प्राप्त होता है ।

भाजक भाज्य भागफल

2) 10 (5

– 10

00 (शेषफल)

$10 = 5 \times 2 + 0$

$10 = 10$

यहाँ शेषफल 0 है ।

इससे हम कह सकते हैं कि 2, 10 का एक गुणनखण्ड है या 10, 2 का गुणज हैं ।

आराध्य – क्या हम एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दे सकते हैं ?

बीजगणित में बहुपदी शेषफल प्रमेय, बहुपदी दीर्घ विभाजन का एक अनुप्रयोग है । बीजीय पदों के भागफल ज्ञात करने के लिए बीजगणितम् में निम्न श्लोक मिलता है ।

भाज्याच्छेदः शुद्ध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।

यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥

(बीजगणितम् , भागहारे करणसूत्रं वृत्तम् , पृं. 38)

बीजगणित के उपर्युक्त श्लोक के अनुसार भाग विधि स्पष्ट है कि अव्यक्त राशि के विभाजन में भाज्य में से भाजक को शुद्ध रूप से व्यवकलन (घटाने) के लिए भाजक में जिस-जिस राशि या रूप का गुणा किया जाता है। अब 'भाज्याद्धर: शुध्यति' इस सूत्र के अनुसार भजनफल के सिद्ध होने पर भी, वर्णसंज्ञा का परिचय स्पष्ट करते हैं। जिन-जिन वर्ण और रूपों से गुणित भाजक, भाज्य से अपने-अपने स्थानों में घटानें से शुद्ध से शुद्ध हो अर्थात् शेष न रहें, वे वर्ण और रूप यहाँ लब्धि अर्थात् भजनफल होते हैं । वह राशि या रूप भागफल के रूप में प्राप्त होता है ।

आइए, उदाहरण से समझतें हैं ।

उदाहरण : बहुपद $(3x^2 + 4x + x)$ में x से भाग दीजिए ।

हल : $(3x^2 + 4x + 3) \div x$

$$= \frac{3x^2 + 4x + 3}{x}$$

$$= \frac{3x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{3}{x}$$

$$= 3x + 4 + \frac{3}{x}$$

करो और सीखो -

भाग दीजिए - $(2y^3 + 2y^2 + y) \div y$

उदाहरण: यदि दो बहुपद $p(x)$ और $g(x)$ है तो $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दीजिए ।

$$p(x) = 5x^2 + 7x + 3 \;, \quad g(x) = x + 1$$

हल : $p(x) \div g(x)$

$$= \quad (5x^2 + 7x + 3) \div (x + 1)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 5x + 2 \\
\hline
x + 1 & \quad 5x^2 + 7x + 3 \\
 & \underline{-5x^2 \pm 5x} \\
 & \qquad\quad 2x + 3 \\
 & \qquad\quad \underline{-2x \pm 2} \\
 & \qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

भागफल : 5x + 2

शेषफल : 1

उपर्युक्त दिया गया भाग निम्न चरणों में पूर्ण हुआ है ।

चरण I : भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग देने पर अर्थात् $5x^2$ को x भाग देकर 5x प्राप्त होता है ।

चरण II : भाजक को भागफल के प्रथम पद 5x से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल $5x^2$ + 5x को भाज्य में से घटाया । इस प्रकार 2x + 3 प्राप्त हुआ ।

चरण III : शेषफल 2x + 3 को नया भाज्य मानकर पुन: **चरण** (I) की प्रक्रिया अपनाई इस प्रकार भागफल का दूसरा पद 2 प्राप्त हुआ ।

चरण IV : **चरण** (II)की तरह भागफल के दूसरे पद को भाजक (x + 1) से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 2x + 2 को भाज्य 2x + 3 से घटाया इससे शेषफल 1 प्राप्त हुआ ।

यह प्रक्रिया हम तब तक दोहराते हैं जब तक कि भाज्य की घात, भाजक की घात से छोटी (न्यून) नहीं हो जाती है। अन्तिम चरण में भाज्य शेषफल बन जाता है और भागफलों के योग से पूर्ण भागफल बन जाता है।

इस उदाहरण का भाजक एक रैखिक बहुपद है। इसमें हम शेषफल और भाज्य के कुछ मानों में सम्बन्ध के बारे में विचार करते हैं।

$P(x) = 5x^2 + 7x + 3$ में

x के स्थान पर (-1) रखने पर

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= 5(-1)^2 + 7(-1) + 3 \\
&= 5 \times 1 + (-7) + 3 \\
&= 5 - 7 + 3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

चूँकि $(-1)^2$

$= -1 \times -1 = 1$

अत: बहुपद $P(x) = 5x^2 + 7x + 3$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है यह बहुपद $(x + 1)$ के शून्यक (-1) पर बहुपद $P(x)$ के मान के बराबर होता है।

उदाहरण : $(3x^2 + 2x + 1)$ को $(x + 2)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$(x + 2)$ का शून्यक -2 है

$$P(-2) = 3(-2)^2 + 2 \times (-2) + 1$$

$= \quad 3 \times 4 + (-4) + 1$

$= \quad 12 - 4 + 1$

$= \quad 13 - 4$

$= \quad 9$

चूँकि $x + 2 = 0$

$x = -2$

अत: शेषफल 9 है ।

करो और सीखो

1) बहुपद $(4x^2 + 2x + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) बहुपद $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक है-

(I) -1 (II) 1 (III) 2 (IV) 3

(ब) बहुपद $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक है-

(I) π (II) $\frac{\pi}{2}$ (III) 2π (IV) $\frac{1}{2}$

(स) $x^2 - x + 7$ में x का गुणांक है-

(I) 1 (II) -1 (III) 2 (IV) 7

(द) $x = -1$ के लिए बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान होगा -

(I) 0 (II) 1 (III) -5 (IV) -6

(अ) $x = 2$ के लिए बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान होगा -

(I) -2 (II) -3 (III) -5 (IV) -6

(प) $x = 0$ पर $p(y) = y^2 - y + 1$ का मान होगा -

(I) 0 (II) 1 (III) 2 (IV) 3

(फ) $x = 0$ पर $p(x) = x^2$ का मान होगा -

(I) 0 (II) 1 (III) 2 (IV) 3

(भ) $p(x) = x + 5$ के शून्यक है -

(I) 5 (II) -5 (III) 1 (IV) -1

2. निम्नलिखित पर बहुपद $(3x^2 + 2x + 1)$ के मान ज्ञात कीजिए।

अ) x = 2 ब) x = 1 स) x = 0

3. 3 अथवा (– 3) के बहुपद $P(x) = x^2 + 9$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए ।

4. 4 अथवा (– 4) के बहुपद $P(t) = t + 4$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए।

5. बहुपद $(2x2 + 3x + 1)$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

अ) (x + 1) ब) (x + 2) स) (x – 1) द) (x – 2)

6. बहुपद $(5x^4 + 4x^2 + 3x + 1)$ को $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा –

1) जब किसी चर (x, y, z, ………) और अचर को चारों मूलभूत सङ्क्रियाओं (+,–,×, ÷) के साथ व्यक्त किया जाता है तो उसे **बीजीय व्यंजक** कहते हैं ।

उदाहरण : (1)$x^2 + 2$ (2) $x^{-5} + 4x + 3$

2) जिस बीजीय व्यंजक के चरों की घात पूर्ण संख्या हो तो वह बीजीय व्यंजक **बहुपद** कहलाता है ।

उदाहरण: $3x^2 + 4$, $4x^{10}$, $5x^2 + 3$

3) इसके दूसरी तरफ जिस बीजीय व्यंजक की घात भिन्न संख्या या पूर्ण संख्या न हो बहुपद नहीं कहलाते हैं । **जैसे :** $3\sqrt{x}+1$, $3x^{½} + 4$, $x^{-5} + y$, $2x^{-4} + 3$

4) एक पद वाले बहुपद **एकपदी** कहलाते हैं । $5x$, $3x$

5) दो पदों वाले बहुपदों को **द्विपद** कहा जाता है । $3x^2 + 4x$, $5x + 1$

6) तीन पदों वाले बहुपद **त्रिपद** कहलाते हैं । $8x^3 + 5x^2 + 4x$

7) एक बहुपद में चर की उच्चतम घात **बहुपद का घात** कहलाता है ।

जैसे : $3x^{10} + 5x^2 + 3$ बहुपद में बहुपद का घात 10 है ।

8) एक घात वाला बहुपद **रैखिक बहुपद** कहलाता है। **उदाहरण:** x+1 , 2x+3

9) दो घात वाले बहुपद **द्विघात बहुपद** कहलाते हैं । **उदाहरण:** $2x^2+ x+1$, x^2+3

10) तीन घात वाले बहुपद **त्रिघात बहुपद** कहलाते हैं । **उदाहरण:** $x^3 + 2x^2 - x - 1$

11) वास्तविक संख्या a बहुपद p(x) का शून्यक होती है यदि p(a) = 0 हो

12) बहुपदों से बहुपद को भाग देकर शेषफल ज्ञात करना सीखा।

जैसे : $(3x^2 + 18x + 5)$ में $(x + 3)$ से भाग दीजिए।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 9 \\
\hline
x + 3 & 3x^2 + 18x + 5 \\
 & \underline{-\,3x^2 \pm 9x} \\
 & \quad 9x + 5 \\
 & \quad \underline{-\,9x \pm 27} \\
 & \quad\quad -22
\end{array}
$$

भागफल : $3x + 9$

शेषफल : -22

अध्याय 3

दो चर वाले रैखिक समीकरण

प्रिय बटुकों ! पिछली कक्षाओं में हमने चर राशियों के बारे में अध्ययन किया था । आपको स्मरण होगा कि **ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित होता(बदलता) रहता है, चर राशि कहलाती है ।** चर राशियों को हम x , y , z........ इत्यादि से दर्शाते हैं। आपने किसी अज्ञात राशि का मान ज्ञात करने एवं पहेली आदि में चर राशि का प्रयोग गणितीय कथन एक चर वाले समीकरण बनाना सीखा है। आपको स्मरण होगा कि एक चर वाले रैखिक समीकरण में चर की घात 1 हो तो उसे **रैखिक समीकरण** कहते हैं ।

जैसे: किसी संख्या में 3 जोड़ने पर दस (10) प्राप्त होता है । तो वह अज्ञात संख्या ज्ञात कीजिए ।

मान लीजिए, वह अज्ञात संख्या x है ।

अज्ञात संख्या + 3 = 10

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{चर राशि}}}{x} + 3 = 10$$

अत: x + 3 = 10 यह एक गणितीय कथन या एक चर वाले समीकरण कहलाते हैं। यहाँ चर x की घात एक है अत: यह **एक चर वाला रैखिक समीकरण** है ।

तब, $x + 3 = 10$

$x = 10 - 3$

$x = 7$

अत: 7 वह अज्ञात संख्या है जिसमें 3 जोड़ने पर 10 प्राप्त होता है। आइए, एक चर वाले रैखिक समीकरण के कुछ और उदाहरण देखते हैं ।

$x + 2 = 8$ $\qquad 9 + y = 10$

$z - 1 = 9$ $\qquad y - 2 = 6$

ध्यान रहे –

एक चर वाले रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय (एक और केवल एक) हल होता है इसे समीकरण का मूल कहते हैं । एक चर वाले समीकरण को व्यापक रूप से $ax + b = 0$ के रूप में दर्शाते हैं । जहाँ a व b वास्तविक संख्या है और a शून्य नहीं है ।

- ❖ प्यारे बटुकों ! अपने आचार्य जी से चर्चा करें कि a शून्य क्यों नहीं हो सकता है ?

दो चर वाले रैखिक समीकरण

आइए , हम निम्न स्थिति पर विचार करें ।

राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय, उज्जैन के दो बल्लेबाज शुभम और रजत ने क्रिकेट मैच में एक साथ मिलकर अपनी पारी के दौरान 50 रन बनाए । इस जानकारी (पहेली) को समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए ।

यहाँ आप यह देख सकते हैं। कि दोनों बल्लेबाजों (बटुकों) में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रन ज्ञात नहीं है अर्थात् यहाँ दो अज्ञात राशियाँ है।आइए हम शुभम और रजत द्वारा बनाये गए रनों (अज्ञात राशि) को x और y से प्रकट करें। यहाँ, हम शुभम द्वारा बनाये गये रनों की संख्या x है और रजत द्वारा बनाये गये रनों की संख्या y है । तब हम जानते हैं-

(शुभम के रनों की संख्या) + (रजत के रनों की संख्या) = 50

$$x + y = 50$$

जो कि एक अभिष्ट समीकरण है ।

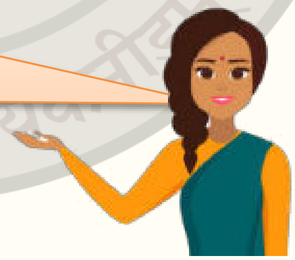
यह दो चरों वाली रैखिक समीकरण का एक उदाहरण है ।

$$\underset{\text{चर}}{\underset{\uparrow}{x}} + \underset{\text{चर}}{\underset{\uparrow}{y}} = 50$$

उपर्युक्त समीकरण में चरों को x और y से प्रकट किया गया है परन्तु आप अन्य अक्षरों ($a, b, \ldots\ldots z$) का भी प्रयोग किया जा सकता हैं ।

रुचि : मैंने तो इस समीकरण को ऐसे लिखा है ।

$$A + B = 50$$



गुरुजी – हाँ, बिल्कुल सही है । हम किन्हीं भी अक्षरों का प्रयोग कर चर राशियों को दर्शा सकते हैं ।

ऐसे समीकरण जिसमें दो अज्ञात राशि (चर) हो तथा प्रत्येक चरों की घाताङ्क एक (1) हो तो इसे **दो चर वाले रैखिक समीकरण** कहते हैं ।

आपको याद होगा -

शुभम : x^2 का घातांक 2 है इसे हम x की घात 2 पढ़ेंगे।
तथा x^1 या x में की घातांक 1 है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण के कुछ उदाहरण निम्न हैं ।

1) $3x + 4y = 5$ 2) $3m + 5n = 9$

3) $2p + q = 1$ 4) $A + 3B = 6$

क्या आप कुछ उदाहरण दे सकते हैं ? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः

$3x + 4y - 5 = 0,$ $3m + 5m - 9 = 0$,

$2p + q - 1 = 0$ और $A + 3B - 6 = 0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

दो चर वाली रैखिक समीकरण को व्यापक रूप को $ax + by + c = 0$ के रूप में दर्शाते हैं।

जहाँ a, b व c वास्तविक संख्या है । a और b दोनों शून्य नहीं हैं ($a \neq 0, b \neq 0$) तथा चर x एवं y कि घात 1 है । **दो चरों वाला रैखिक समीकरण** कहा जाता है ।

उदाहरण : निम्न समीकरण से a , b व c का मान करें ।

1) $2x + 3y - 5 = 0$

हल: दिये गये समीकरण $2x + 3y - 5 = 0$ की तुलना दो चर वाले रैखिक समीकरण के व्यापक रूप $\mathbf{ax + by + c = 0}$ से तुलना करने पर -

यहाँ $a = 2, b = 3, c = -5$ है, जो कि वास्तविक संख्याएँ हैं ।

2) $5x + 3y = 4$

हल: दिया है : $5x + 3y = 4$

या $5x + 3y - 4 = 0$

दिये गये समीकरण $5x + 3y - 4 = 0$ की तुलना दो चर वाले रैखिक समीकरण के व्यापक रूप $\mathbf{ax + by + c = 0}$ से तुलना करने पर -

यहाँ $a = 5, b = 3$ और $c = -4$ है ।

3) $\sqrt{3}x - 4y = -5$

हल: दिया है : $\sqrt{3}x - 4y = -5$

या $\sqrt{3}x - 4y + 5 = 0$

दिये गये समीकरण $\sqrt{3}x - 4y + 5 = 0$ की तुलना दो चर वाले रैखिक समीकरण के व्यापक रूप $\mathbf{ax + by + c = 0}$ से तुलना करने पर -

यहाँ $a = \sqrt{3}, b = -4$ और $c = 5$ है ।

निम्न कथन को दो चरों वाली रैखिक समीकरण के रूप लिखिए ।

कथन: एक किताब की कीमत और10 पेन्सिल की कीमत 50 रुपये हैं ।

मान लीजिए,किताब की कीमत x एवं पेन्सिलों की y है तो कथनानुसार समीकरण,

(किताब की कीमत) + 10 (पेन्सिल की कीमत) = 50

अत: $x + 10y = 50$

करो और सीखो –

निम्न रैखिक समीकरण के व्यापक रूप से तुलना कर a , b एवं c का मान लिखिए ।

$4x + 5y + 16 = 0$

a = ……… b = ………. c = ………

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) निम्न में से कौन-सा दो चर वाले रैखिक समीकरण है -

(I) $2x + 5 = 0$ (II) $x + y = 1$ (III) $y = 2$ (IV) $2x = 3$

(ब) निम्न में से कौन-सा दो चर वाले रैखिक समीकरण है -

(I) $2x + 5 = 0$ (II) $3x + 2 = 0$ (III) $5 = 2x$ (IV) $2x + y = 7$

(स) निम्न में से कौन-सा दो चर वाले रैखिक समीकरण है -

(I) $2x = 3$ (II) $y = 2$ (III) $x = 3y$ (IV) $x = -5$

2. निम्न कथनों को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

अ) दो बॉल और एक बैट की कीमत 200 रु. है। तो दो चर वाला रैखिक समीकरण लिखिए।

ब) 2 शॉल की कीमत में से 3 उपवस्त्र की कीमत घटाने पर 200 रु. प्राप्त होते हैं।

3. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में करते हुए a, b और c का मान बताइए।

1) $5x + 6y = 18$ 2) $7x + 8y + 9 = 0$

3) $10m + 4n + 6 = 0$ 4) $-7m + 5n + 10 = 0$

5) $4y + 10z - 12 = 0$ 6) $4y + 10z + 12 = 0$

रैखिक समीकरण का हल –

बीजगणितम् में रैखिक समीकरण को हल करने के पूर्व कुछ बातों को ध्यान में रखने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

> **एकाव्यक्तं शोधयेद् अन्यपक्षाद् रूपाण्यन्यस्य इतरस्माच्च पक्षात् ।**
>
> **शेषाव्यक्तेन उद्धरेद् रूपशेषं व्यक्तं मानं जायते ऽव्यक्तराशेः।।**
>
> **अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह ,यात्तावद् द्वयादिनिघ्नं हृतं वा।**
>
> **युक्तोनं वा कल्पयेद् आत्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा।**

(बीजगणितम्,एकवर्णसमीकरणम्, पृ. 263)

अर्थात् एक समीकरण को हल करने पर निम्न बातों का ध्यान रखें ।एक रैखिक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि-

1. रैखिक समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।
2. रैखिक समीकरण के दोनों पक्षों में समान शुन्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए ।

आइए , उदाहरण के माध्यम से सीखते हैं ।

उदाहरण : समीकरण $x + y = 10$ निम्नलिखित में से कौन-सा क्रमित युग्म समीकरण को सत्यापित (सन्तुष्ट) करता है।

(1) $(4, 5)$ (2) $(3, 7)$ (3) $(1, 9)$

हल 1): $(4, 5)$

समीकरण $x + y = 10$

यदि $x = 4$ व $y = 5$ समीकरण में रखने पर

$$4 + 5 \neq 10$$

$$9 \neq 10$$

बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

जो कि गलत है यहाँ $9 \neq 10$

यहाँ हम x व y के मान को क्रमित युग्म (4 , 5) के रूप में लिख सकते हैं ।

हल 2): (3 , 7)

समीकरण $x + y = 10$

क्रमित युग्म (3 , 7) में x का मान 3 एवं y का मान 7 समीकरण में रखने पर

$$3 + 7 = 10$$

$$10 = 10$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत: क्रमित युग्म (3 , 7) दिये गये समीकरण का हल है क्योंकि हम जानते हैं समीकरण में बायाँ पक्ष व दायाँ पक्ष का समान होता है ।

हल 3): (1 , 9)

समीकरण $x + y = 10$

क्रमित युग्म (1 , 9) में x का मान 1 व y का मान 9 समीकरण में रखने पर

$$1 + 9 = 10$$

$10 = 10$

अत: क्रमित युग्म (1, 9) दिये गये समीकरण $x + y = 10$ का हल है ।

आप यहाँ,देखते हैं कि समीकरण $x + y = 10$ को क्रमित युग्म (4 , 5) सत्यापित (सन्तुष्ट) नहीं करता है अत: (4, 5) क्रमित युग्म हल नहीं है ।

इसके विपरित, क्रमित युग्म (3, 7) व (1, 9) समीकरण को सत्यापित (बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष) करता है । अत: (3, 7) व (1, 9) समीकरण के हल है । आप देखते हैं कि यहाँ (3, 7) एवं (1, 9) हल है ।

इसलिए दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हल हो सकते हैं । इसका अर्थ है कि **दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं ।**

भारतीय गणित के अन्तर्गत भास्कराचार्य जी द्वारा रचित बीजगणितम् में दो चर वाले रैखिक समीकरण पर निम्न प्रश्न मिलता है-

एको ब्रवीति मम देहि शतं धनेन त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोऽन्य:।

ब्रूते दशार्पयसि चेन्मम षड्गुणोऽहं त्वत्तस्तयोर्वद धने मम किं प्रमाणे।।

(बीजगणित, अनेकवर्णसमीकरण पृ.272)

दो मित्र अपने धन की स्थिति को देखकर आपस में चर्चा करते हैं। प्रथम मित्र हे सखे, यदि आप मुझे 100 रु दे दो तो मेरा धन दो गुणा हो जायेगा फिर दूसरे मित्र ने कहा कि मित्र ! यदि आप मुझे सिर्फ 10 ही रु. देते हो तो मेरा धन आपके धन से छ: गुणा हो जायेगा, तो बताइये उन दोनों के पास कितना धन होगा।

हल : - मान लीजिए प्रथम मित्र के पास का धन x है तथा दूसरे मित्र के पास का धन y है तब प्रश्नानुसार,

$x + 100 = 2(y - 100)$ समीकरण (1)

$x + 10 = 6(x - 10)$ समीकरण (2)

तब समीकरण (1) से- $x + 100 = 2(y - 100)$

$x + 100 = 2y - 200)$
$x + 100 = 2y - 200)$
$x = 2y - 200 - 100)$

$x = (2y - 300)$ ....समीकरण (3)

समीकरण 2 से- $x + 10 = 6(x - 10)$

$y + 10 = 6x - 60)$

$x = \frac{y+70}{6}$ ....समीकरण (4)

समीकरण (3)एवं (4) से -

$(2y - 300) = \frac{y+70}{6}$
$6\ (2y - 300) = y + 70$
$12y - 1800 = y + 70$
$12y - y = 70 + 1800$
$11y = 1870$

$y = \frac{1870}{11}$ =170

y = 170

y का मान समीकरण (3) में रखने पर-

$x = (2y - 300)$

$$x = 2 \times 170 - 300$$
$$x = 340 - 300$$
$$x = 40$$

अर्थात् प्रथम मित्र के पास x रु. अर्थात् 40 रु. एवं द्वितीय मित्र के पास y रु. अर्थात् 140 रु. धन था।

प्रश्नावली 3.2

1. **निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।**

(अ) जब $x=2, y=1$ तो समीकरण $2x + 3y = k$ में k का मान होगा-

(I) $k = 5$ (II) $k = 6$ (III) $k = 7$ (IV) 8

(ब) निम्न हलों में कौन-सा समीकरण $2x + y = 7$ का हल है -

(I) $x =2, y=3$ (II) $x =3, y=2$ (III) $x =1, y=2$ (IV) $x =2, y=1$

(स) निम्न हलों में कौन-सा समीकरण $x + 4y = 17$ का हल है -

(I) $x =1, y=4$ (II) $x =4, y=1$ (III) $x =2, y=1$ (IV) $x =4, y=2$

(द) $x + y =4$ का हल है -

(I) $x =1, y=3$ (II) $x =0, y=0$ (III) $x =4, y=1$ (IV) $x =1, y=4$

(प) $x + 2y =6$ का हल है -

(I) (2,2) (II) (0,2) (III) (2,0) (IV) (-2, -2)

(फ) $y= x + 2$ का हल नहीं है -

(I) (0,2) (II) (1,3) (III) (-2,0) (IV) (2, 3)

(भ) $3= 2x + y$ का हल है -

(I) (0,3) (II) (3,0) (III) (-1,4) (IV) (-2, 7)

(म) $y= 3x$ का हल है -

(I) (1,3) (II) (3,1) (III) (2,5) (IV) (6, 2)

(य) $y= 2x+1$ का हल है -

(I) (1,3) (II) (2,4) (III) (3,5) (IV) (4, 6)

2. निम्नलिखित विकल्पों में कौन-सा विकल्प सत्य है और क्यों ?

$$m + n = 20$$

बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन- कौन से समीकरण $m + n = 20$ के हल हैं ।

(1) (10, 5) (2) (10, 10) (3) (3, 15)

(4) (2, 12) (5) (15, 5)

3. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 30$ या $y = 70$ समीकरण $x + y = K$ का एक हल हो ।

4. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि $m = 15$ व $n = 15$ समीकरण $m + n = K$ का एक हल हो ।

5. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2$, $y = 1$ समीकरण $2x + 3y = K$ का हल हो।

हमने सीखा –

इस अध्याय, में आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है।

1) ऐसी समीकरण जिसमें दो अज्ञात राशि (चर) हो तथा अज्ञात राशि की घाताङ्क एक हो **दो चर वाले रैखिक समीकरण** कहलाते हैं ।

- दो चर वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप $ax + by + c = 0$ यहाँ a, b और c वास्तविक संख्या है a और b शून्य नहीं है तथा चर x एवं y कि घात 1 है । $(a \neq 0, b \neq 0)$
- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप में अनेक हल होते हैं ।
- दो चर वाले गणितीय कथन को रैखिक समीकरण के रूप में लिखना सीखा ।

अध्याय 4

वैदिक गणित

वैदिक गणित का उपादयेता –

वैदिक गणितीय सूत्रों के प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल हो जाती हैं। गणना मे समय भी कम लगता है। वैदिक गणित के माध्यम से विद्यार्थियों की मानसिक,तार्किक क्षमता का विकास होता है गणना में त्रुटि की सम्भावना कम होने के कारण विद्यार्थी की गणित में रूची बढ़ती है वैदिक गणित के अल्प अभ्यास से जटिल गणनाओं को भी मौखिक रूप से हल कर सकते हैं। वैदिक गणित से उत्तर प्राप्त होने पर विद्यार्थी का आत्मविश्वास बढ़ता है साथ ही वैदिक गणित के अध्ययन से विद्यार्थी की बुद्धि एवं मेधा में अप्रत्याशित वृद्धि होती है ।

वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की सूची –

सूत्र –

1) एकाधिकेन पूर्वेण – पूर्व से एक अधिक द्वारा
2) निखिलं नवतश्चरमं दशत: - सभी नौ से अन्तिम दस से
3) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् – आड़ा और तिरछा
4) परावर्त्य योजयेत् – विलोम का प्रयोग करें
5) शून्यं साम्यसमुच्चये – समुच्चय समान होने पर शून्य होता हैं ।
6) आनुरूप्ये शून्यमन्यत् – यदि एक अनुपात में है, तो दूसरा शून्य होगा ।
7) सङ्कलन-व्यवकलनाभ्याम् – जोड़ने एवं घटाने से

8) पूरणापूरणाभ्याम् – पूर्ण एवं अपूर्ण से

9) चलनकलनाभ्याम् – युगपत् गति

10) यावदूनम् – जितना कम हो

11) व्यष्टि समष्टि: – समग्र एक ही तरह और एक समग्र की तरह

12) शेषाण्यङ्केन चरमेण – शेष को अन्तिम अङ्क से

13) सोपान्त्य द्वयमन्त्यम् – अन्त के साथ उपान्त को दोगुणा जोड़कर

14) एकन्यूनेन पूर्वेण – पूर्व से एक कम द्वारा

15) गुणित समुच्चय: - गुणनफल की गुणन संख्याओं का योग

16) गुणक समुच्चय: - गुणनखण्डों का समुच्चय

वैदिक उप-सूत्र –

1) आनुरूप्येण – अनुपात से

2) शिष्यते शेषसंज्ञ: – शेष से शेष ज्ञात करना

3) आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन – पहले को पहले से और अन्तिम को अन्तिम से

4) केवलै: सप्तकं गुण्यात् – केवल सात के गुणज

5) वेष्टनम् – आश्लेषण (विभाजनीयता परीक्षण की विशिष्ट क्रिया का नाम)

6) यावदूनम तावदूनम – जितना कम हो, उतना और कम करें

7) यावदूनम तावदूनीम कृत्य वर्गं च योजयेत् – जितना कम हो, उसका दोगुणा कम करके वर्ग प्रयोग करें ।

8) अन्त्ययोर्दशकेऽपि – जब अन्तिम अङ्कों का योग दस हो ।

9) अन्त्ययोरेव – केवल अन्तिम को ही

10) समुच्चय गुणितः - समुच्चयों का गुणनफल

11) लोपनस्थापनाभ्याम् – लोपन और स्थापना से

12) विलोकनम् – देखकर

13) गुणित समुच्चयः समुच्चयगुणितः - गुणनफल का समुच्चय, समुच्चय का गुणनफल होता है।

14) द्वन्द्व योग – द्वन्द्व योग

15) शुद्धः - बिन्दु

16) ध्वजाङ्क – भाजक के इकाई का अङ्क

विशेष सूत्रों के अर्थ एवं अनुप्रयोग

1) **एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र –**

इस सूत्र का अर्थ है ' **पिछले से एक अधिक** ' किसी संख्या का एकाधिक करना हो,तो उसमें एक जोड़ना अथवा इकाई अङ्क पर एकाधिकेन का चिह्न(.) लगाना।

जैसे-

2 का एकाधिकेन = $\dot{2}$ = $2 + 1 = 3$

3 का एकाधिकेन = $\dot{3}$ = $3 + 1 = 4$

134 में 3 का एकाधिक करने पर = $1\dot{3}4$ = 144

6525 में 2 का एकाधिकेन करने पर = $65\dot{2}5$ = 6535

अनुप्रयोग –

1) **योग सङ्क्रिया (जोड़ने) –**

विधि – प्रश्न में दी गई संख्याओं को स्तम्भ रचना में ऊपर से नीचे लिखिए इकाई स्तम्भ में ऊपर से नीचे जोड़ना प्रारम्भ कीजिए। जिस अङ्क का योग दस या दस से अधिक हो जाए उस अङ्क के पूर्व अङ्क में एकाधिक का चिह्न लगायें इस क्रिया की आवृत्ति कीजिए अन्त में जो शेष रहे उस अङ्क को उत्तर के स्थान में नीचे लिखिए इस प्रकार अन्य स्तम्भों का योग कीजिए।

उदाहरण : योग कीजिए ।

हल :

$$\begin{array}{r} 3\,7\,3\,8\,3 \\ \dot{1}\,5\,\dot{2}\,\dot{2}\,8 \\ 3\,\dot{4}\,5\,8\,1 \\ +\ \dot{2}\,3\,\dot{7}\,7\,3 \\ \hline \boxed{1\,1\,0\,9\,6\,5} \end{array}$$

सङ्केत –

1) प्रथम स्तम्भ में 3 + 8 = 11 अत: 8 के पूर्व अंक 2 पर एकाधिक का चिह्न लगायें ।
2) 11 के इकाई अंक 1 + 1 = 2
3) 2 + 3 = 5 को उत्तर में नीचे के स्थान पर लिखें ।

उदाहरण : योग कीजिए ।

हल:

$$\begin{array}{rrcl} & \textbf{रुपये} & & \textbf{पैसे} \\ & 7\,2 & . & 8\,6 \\ & 3\,\dot{2} & . & \dot{2}\,5 \\ + & \dot{3}\,8 & . & 8\,2 \\ \hline & 1\,4\,3 & . & 9\,3 \end{array}$$

सङ्केत –

यहाँ भी स्तम्भों को सामान्य स्थिति द्वारा योग कीजिए ।

व्यवकलन सक्रिया (अन्तर) –

वैदिक गणित में व्यवकलन की सङ्क्रिया के चार-पाँच विधियों में सबसे श्रेष्ठ एवं सरल विधि (एकाधिकेन सूत्र + परममित्र) आधारित विधि है।

परममित्र अङ्क –

जिन दो अङ्कों का योग 10 हो, वे एक-दूसरे के **परममित्र अङ्क** कहलाते हैं ।

जैसे : 7 का परममित्र अङ्क = 3

6 का परममित्र अङ्क = 4

10 का परममित्र अङ्क = 0

$\dot{2}$ (यानि की 3) का परममित्र अङ्क = 7

विधि –

जब ऊपर वाले अङ्क (वियोज्य) में से नीचे वाला अङ्क (वियोजक) नहीं घटता है, तब नीचे वाले अङ्क का परममित्र अङ्क ऊपर वाले अङ्क जोड़कर योगफल नीचे (उत्तर में) लिख दिया जाता है और नीचे वाले अङ्क के पूर्व अङ्क में एकाधिकेन का चिह्न लगा दिया जाता है । इस क्रिया की आवृत्ति से उत्तर (शेषफल) ज्ञात हो जायेगा ।

ध्यान रहे –

यदि ऊपर का अङ्क नीचे वाले अङ्क से बड़ा या बराबर है तब भी परममित्र अङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है । इसे सामान्य विधि से घटाते हैं ।

उदाहरण : निम्न को घटाइये -

हल :

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ 1\ 2\ 4 \\ -\ \dot{2}\ 7\ \dot{2}\ 7\ 1 \\ \hline \boxed{2\ 4\ 8\ 5\ 3} \end{array}$$

सङ्केत –

1) 4 – 1 = 3 नीचे उत्तर के स्थान में लिखें।

2) 2 मे 7 नहीं घटता अत: 7 का परममित्र अंक 3 को जोड़ 2 में तथा योग 5 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर साथ ही 7 के पूर्व अंक 2 पर एकाधिकेन चिह्न इसी प्रकार घटाने की क्रिया पूरी कीजिए ।

उदाहरण : व्यवकलन (अन्तर) कीजिए ।

हल:	घ.	मि.	से.
	34	32	15
-	$\dot{1}5$	$\dot{2}\dot{4}$	32
	$\boxed{19}$	$\boxed{07}$	$\boxed{43}$

सङ्केत –

1) मापन इकाई समय के स्तम्भ आधार भिन्न-भिन्न

2) मिनट व सेकेण्ड के स्तम्भ में दो आधार रहेंगे ।

3) दोनों के इकाई स्तम्भ में आधार = 10

4) दोनों के दहाई स्तम्भ में आधार = 6

5) घण्टे के स्तम्भ में आधार = 10

6) मिनट एवं सेकेण्ड के दहाई स्तम्भ में परममित्र अङ्क निकालने का आधार= 6 रहेगा तथा शेष में आधार =10 रहेगा ।

गुणन सङ्क्रिया (गुणा) –

वैदिक गणित में गुणन की भिन्न-भिन्न स्थितियों में विभिन्न सूत्र आधारित विधियाँ है। सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण आधारित विधि प्रभावी है तथा कुछ विशेष गुणन विधियों बड़ी सरल एवं आकर्षक है ।

अन्त्ययोर्दशकेऽपि सूत्र के अन्तर्गत एकाधिकेन का प्रयोग कर गुणन करते हैं ।

- गुणा करने में इस सूत्र का सीमित प्रयोग है। यह वही काम करता है जहाँ गुण्य और गुणक के इकाई के अङ्कों का योग 10 हो तथा शेष अङ्क समान हो, परिणाम दो भागों में प्राप्त होता है।
- **दायाँ पक्ष -** इकाई के अङ्कों को गुणा करें और गुणनफल लिखें।
- **बायाँ पक्ष** - (दहाई या इकाई के शेष अङ्क) × (दहाई या इकाई के शेष अङ्क+ 1) का गुणनफल लिखें।

उदाहरण : 24 को 26 से गुणा करें।

हल :

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times \quad 26 \\ \hline \boxed{624} \end{array}$$

सङ्केत -

1) यहाँ इकाई के अङ्कों का योग 4 + 6 = 10 है।
2) गुण्य व गुणक के दहाई के अङ्क समान हैं।
   4 × 6= 24 को दायें पक्ष में लिखें।
3) 2 × (2 का एकाधिकेन)
   2 × 3 = 6 को बायें पक्ष में लिखें।

उदाहरण : 83 को 87 से गुणा करें।

हल :

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times \; 87 \\ \hline \boxed{7221} \end{array}$$

सङ्केत –

1) यहाँ इकाई के अङ्कों (चरमांक) का योग
   3 + 7 = 10 है।
2) शेष दहाई और अङ्क 8
   अत: दायाँ पक्ष = 3 × 7 = 21
3) बायाँ पक्ष = 8 × (8 का एकाधिकेन)
   = 8 × 9

उदाहरण : गुणा कीजिए। (सूत्र एकाधिकेन के प्रयोग से)

हल : $3\frac{5}{6} \times 3\frac{5}{6}$

$= 3 \times 4 \,/\, \frac{5}{6} + \frac{5}{6}$

$= 12 \,/\, \frac{10}{6}$

$= 12\,\frac{10}{6}$

सङ्केत -

1) भिन्न का योगफल

$\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5+5}{6} = \frac{10}{6}$

2) शेष आगे का अङ्क (निखिलम् अङ्क) = 3

= 3 × (3 का एकाधिकेन)

इस सूत्र पर आधारित प्रश्नों के गुणन मौखिक किये जा सकते हैं।

करो और सीखो – गुणन करें (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से)

1) $\begin{array}{r} 34 \\ \times 36 \\ \hline \boxed{} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 82 \\ \times 88 \\ \hline \boxed{} \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 93 \\ \times 97 \\ \hline \boxed{} \end{array}$

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र -

सूत्र दो शब्द 'एकन्यूनेन' तथा 'पूर्वेण ' से बना है । सूत्र का अर्थ है - **''पहले के अङ्क का एकन्यून (कम) होने की क्रिया के द्वारा ''** जिस अङ्क का एकन्यून करना है उसके इकाई के अङ्क के नीचे एक बिन्दु (·) लगा दीजिए। यह बिन्दु **एकन्यून चिह्न** कहलाता है ।

जैसे : 7 का एकन्यूनेन = $\dot{7}$ = 6

15 का एकन्यूनेन = $1\dot{5}$ = 14

अनुप्रयोग –

व्यवकलन (सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण + परममित्र अङ्क) का हासिल वाला प्रत्येक प्रश्न इस विधि से सरल किया जा सकता है ।

विधि –

यदि वियोज्य अङ्क में से वियोजक का अङ्क नहीं घटता है, तो वियोजक अङ्क का परममित्र अङ्क वियोज्य अङ्क में जोड़कर योगफल को नीचे के स्थान पर लिख दीजिए इसके साथ-साथ वियोजक के पूर्व अङ्क के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए , यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है । इस क्रिया की आवृत्ति से अन्त शेषफल (उत्तर) ज्ञात हो जायेगा ।

उदाहरण : निम्न को घटाइये (एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से)

हल :

$$\begin{array}{rccc} & \underset{\cdot}{5} & \underset{\cdot}{6} & 0 \rightarrow \text{वियोज्य} \\ - & 3 & 7 & 5 \rightarrow \text{वियोजक} \\ \hline & \boxed{1\ 8\ 5} & & \rightarrow \text{शेषफल} \end{array}$$

सङ्केत –

1) सम्पूर्ण क्रिया सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण पर आधारित विधि के समान है ।

2) अन्तर इतना है कि इस क्रिया में एकाधिक चिह्न के स्थान एक न्यूनेन का चिह्न वियोज्य के अङ्क के पूर्व अङ्क के नीचे लगेगा ।

करो और सीखो –

व्यवकलन (अन्तर) करें। (सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण के प्रयोग से)

1) 5 8 0 $\quad\quad$ 2) 7 4 8

– 3 9 4 $\quad\quad$ – 3 7 9

गुणन सङ्क्रिया –

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र के प्रयोग से

एक न्यूनेन पूर्वेण दो संख्याओं के गुणन में जब एक संख्या का प्रत्येक अङ्क 9 हो, तो गुणा करने की इस अद्भुत विधि का प्रयोग किया जाता है ।

विधि – गुणनफल के दो पक्ष होते हैं ।

बायाँ पक्ष = गुण्य – 1

दायाँ पक्ष = गुणक – बायाँ पक्ष

अत: गुण्य × गुणक = गुण्य – 1 / गुणक – बायाँ पक्ष

यह सूत्र तीन परिस्थितियों में काम करता है ।

1) **प्रथम स्थिति : (गुणक अङ्क संख्या = गुण्य अङ्क संख्या)**

देखिए निम्न उदाहरण

उदाहरण : गुणन करें- 8×9

हल: बायाँ पक्ष $= 8 - 1 = 7$

दायाँ पक्ष = 9 – 7 = 2

अत: 8 × 9 = 8 – 1 / 9 – 7

= 7 / 2

= 72

उदाहरण : गुणन करें 345 × 999

हल : 345 × 999

= 345 – 1 / 999 – 344

= 344 / 655

= 344655

2) द्वितीय स्थिति : गुणक अङ्क संख्या > गुण्य अङ्क संख्या

उदाहरण : गुणन करें- 34 × 999

हल: 34 × 999

= 034 – 1 / 999 – 033

= 33 / 966

= 33966

उदाहरण : गुणन करें- 254 × 99999

हल : 254 × 99999

= 254 – 1 / 99999 – 00253

$= \quad 253 \ / \ 99746$

$= \quad 25399746$

ध्यान रखें –

1) गुणक संख्या के जितने अङ्क गुण्य संख्या से अधिक होते हैं उतने ही 9 के अङ्क गुणनफल के मध्य होते हैं ।

2) शेष वाम पक्ष और दाहिने पक्ष के क्रमानुसार अङ्कों का योग 9 होता है अर्थात् वाम पक्ष प्रथम अङ्क + दायाँ पक्ष का अङ्क = 9

3) तृतीय स्थिति : (गुणक अङ्क संख्या < गुण्य अङ्क संख्या)

उदाहरण : गुणन करें- 53×9

हल: 53×9

$= \quad (53 - 1) \ / \ 9 - 52$

$= \quad 529/ \ - 52$

$= \quad 477$

उदाहरण : गुणन करें- 312×99

हल : 312×99

$= \quad 312 - 1 \ / \ 99 - 311$

$= \quad 31199 \ / - 311$

$= \quad 30888$

अन्य विधि: जब गुण्य अङ्क में 9 की संख्या ,गुणक की संख्या से कम हो तो जितने 9 अङ्क गुण्य में हो उतने शून्य गुणक में लगाकर दिये हुए गुणक को घटा दिया जाता है।तो प्राप्त संख्या का गुणनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण: गुणन करें- 312×99

हल: 3 1 2 0 0

− 3 1 2

$\boxed{= 3\,0888}$

करो और सीखो –

निम्न के गुणनफल ज्ञात करें। (सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण के प्रयोग से)

1) 32×999 2) 3112×99 3) 121×999

4) 2×999 5) 452×99 6) 951×999

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(अ) एकाधिकेन सूत्र का अर्थ .... है।

(ब) एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का अर्थ .... है।

(स) संख्या 8 का परममित्र अंक ....है।

(द) 456×999 = ...

(प) 456×99999 = ...

(फ) 4568×99 = ...

2. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग कीजिए ।

1)
```
   98765
   34549
+  12757
```

2)
```
   38219
   21989
+  13456
```

3)
```
   456
   397
+  138
```

3. वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिये।

1)
```
   982
-  137
```

2)
```
   747
-  388
```

3)
```
   4037
-  2158
```

4. सूत्र (अन्त्ययोदर्शकेऽपि + एकाधिकेन) द्वारा गुणा कीजिए।

1) $\begin{array}{r} 97 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 58 \\ \times 52 \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 77 \\ \times 73 \\ \hline \end{array}$

5. सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण विधि गुणा कीजिए।

1) 52×99 2) 173×999

3) 47×999 4) 134×9999

5) 72×9 6) 123×99

6. वैदिक विधि से गुणा कीजिए। (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से)

1) $2\frac{5}{7} \times 2\frac{3}{7}$ 2) $5\frac{11}{3} \times 5\frac{2}{3}$ 3) $5\frac{5}{3} \times 5\frac{5}{3}$ 4) $6\frac{11}{7} \times 6\frac{2}{7}$

स्मरण बिन्दु :

- **विनकुलम् (ऋणात्मक) संख्या -**

विनकुलम् प्रयोग की सङ्कल्पना वैदिक गणित की देन है। विनकुलम् प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल तथा कभी-कभी मौखिक भी हो जाती है। इसका प्रयोग 5 से बड़े अङ्क (6, 7, 8, 9) वाली संख्या को छोटे अङ्क (0, 1, 2, 3, 4, 5) में बदली जाती है। जिससे गणना आसान हो जाती है।

जैसे : $\bar{1}\,\bar{2}, \bar{5}, \bar{7}$अङ्कों के ऊपर छोटी सी रेखा विनकुलम् $(-)$चिह्न है।

- **बीजाङ्क (आङ्किक योग) :**

किसी संख्या के अङ्कों का योग उस संख्या का किया बीजाङ्क(आङ्किक योग) कहलाता है। यह बीजाङ्क केवल एक ही अङ्क का हो सकता है और यदि एक से अधिक अङ्क का हो तो उन अङ्कों को फिर से जोड़कर एक-एक अङ्क का बना लिया जाता है।

(75 का आङ्किक योग 7+5= 12, किन्तु दो अङ्क हैं इसलिए 1+2=3)

बीजाङ्क ज्ञात करते समय '9' को 0 के समतुल्य माना जाता है. क्यों?

उदाहरण: 531 का बीजाङ्क होगा 5+3+1 = 9.

172654 का बीजाङ्क होगा 1+7+2+6+5+4 = 25 और 25 से 2+5 = 7.

- **आधार –**

गणनाओं को सरल बनाने के लिए वैदिक गणित में 10, 100, 1000 या 10 की घात को **आधार** माना जाता है ।

ध्यान रहे –

आधार में जितने शून्य होते हैं । उतने ही अङ्क गुणनफल में दाहिने पक्ष में रखते हैं । अङ्क संख्या की कमी होने पर 0 मिलकर पूरी संख्या लिखते हैं ।यदि दाहिने पक्ष में अङ्क अधिक तो बायें पक्ष में अङ्क जोड़ते हैं ।

जैसे : आधार संख्या 10 में दाहिने तरफ 1 अङ्क, आधार संख्या 100 में दाहिने तरफ 2 अङ्क, आधार संख्या 1000 में दाहिने तरफ 3 अङ्क लिखते हैं ।

- **उपाधार –**

उपाधार आधार संख्या का गुणज होता है अधिकतर यह शून्यान्त संख्या होती है । यदि आधार संख्या 10 की गुणज हो (20, 30, 40, 50, 60, 70…………) या आधार संख्या 100 की गुणज (200, 300, 400…………………..) इत्यादि ।

यदि आपका आधार = 10 तो उपाधार = $10 \times a$ यहाँ,a एक पूर्ण संख्या है।

जैसे: आधार = 20 = 10×2

तब, आधार = 10 और उपाधार = 2 है ।

- **विचलन –**

दी गई संख्या में से आधार घटा दिया जाए , तो शेषफल **विचलन** कहलाता है ।

विचलन = संख्या – आधार

जैसे :

जब आधार 10 हो ।	जब आधार 100 हो ।
18 का विचलन = 10 + 8 = +8	102 का विचलन = 102 – 100 = +2
8 का विचलन = 8 – 10 = –2	93 का विचलन = 93 – 100 = – 3
12 का विचलन = ________	92 का विचलन = ________

यदि संख्या आधार संख्या से बड़ी हो तो **विचलन धनात्मक** होता है । यदि संख्या आधार संख्या से छोटी हो तो **विचलन ऋणात्मक** होता है ।

निखिलम् नवत: चरमं दशत: सूत्र -

अर्थ – इस सूत्र का तात्पर्य '**सभी नौ से और अन्तिम दस**' से है । प्राचीन भारतीय गणित में 9 को ब्रह्म अङ्क तथा 10 को पूर्ण अङ्क कहते हैं । यह सूत्र विनकुलम् , व्यवकलन (अन्तर), गुणन एवं भाग से सम्बन्धित अनेकों स्थिति में प्रयोग किया जाता है।

अनुप्रयोग –

1) **सामान्य संख्याओं को विनकुलम् संख्या में बदलना ।**

(एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र + निखिलम् सूत्र)

जब सामान्य संख्या 5 या 5 से अधिक से बड़ा हो तो निखिलम् सूत्र से उसे विनकुलम् संख्या में बदला जा सकता है ।

विधि –

1) संख्या के इकाई अङ्क को 10 से घटाइये ।

2) संख्या के शेष अङ्क का 9 से घटाइये ।

3) शेषफल के प्रत्येक अङ्क पर विनकुलम् रेखा खींचिए ।

4) शेषफल के पूर्व अङ्क 0 अथवा 5 से छोटे अङ्क पर एकाधिकेन का चिह्न लगाइये।

आइए, उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

1) सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलना ।

उदाहरण : 1 2 7 सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलिए।

हल : संख्या 1 2 7 को विनकुलम् संख्या में बदलने पर –

$$1\,2\,7$$

$$= 1\,\dot{2}\,\bar{3}$$

$$= 1\,3\,\bar{3}$$

उदाहरण : 1 6 8 सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलिए।

हल : संख्या 1 6 8 को विनकुलम् संख्या में बदलने पर –

$$1\,6\,8$$

$$= 1\,\dot{6}\,\bar{2}$$

$$= 1\,7\,\bar{2}$$

$$= \dot{1}\,\bar{3}\,\bar{2}$$

$$= 2\,\bar{3}\,\bar{2}$$

2) विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या मे बदलना

(एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र + निखिलम् सूत्र)

विधि –

1) इकाई अङ्क के धनात्मक मान को 10 से घटाइये ।

2) शेष निखिलम् अङ्कों (इकाई के अङ्कों छोड़कर) के धनात्मक मानों को 9 से घटाइये।

3) आवश्यकतानुसार उपर्युक्त क्रियाविधि को दोहराइये (आवृत्ति) कीजिए ।

आइए , उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलने पर

उदाहरण : - $1\,\bar{3}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

हल : संख्या $1\,\bar{3}$ को विनकुलम् संख्या में बदलने पर

$= \quad 1\,\bar{3}$

$= \quad \dot{1}\,7$

$= \quad 0\,7$

उदाहरण : $2\,\bar{7}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

हल : संख्या $2\,\bar{7}$को विनकुलम् संख्या में बदलने पर

$= \quad 2\,\bar{7}$

$= \quad \dot{2}\,3$

$= \quad 1\,3$

उदाहरण : $6\,\bar{2}\,\bar{4}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

हल : संख्या $6\,\bar{2}\,\bar{4}$को विनकुलम् संख्या में बदलने पर

$= \quad 6\,\bar{2}\,\bar{4}$

$= \quad \underset{\cdot}{6}\,8\,\bar{4}$

$= \quad 5\,8\,\bar{4}$

$= \quad 5\,\underset{\cdot}{8}\,6$

= 576

3) दो संख्याओं का गुणन (सूत्र निखिलं नवत: चरमं दशत:)

जब दो संख्याओं आधार 10 या 100 या 10 की घात के निकट होता है तो उनका गुणनफल सूत्र निखिलम् के आधार पर बड़ी सरलता से किया जा सकता है ।

विधि –

1) संख्याओं के अनुसार निकटतम आधार 10 या 100 चुनिए ।

2) आधार के सापेक्ष विचलनों को उनकी संख्या के सामने लिखिए ।

3) तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए ।

4) दाहिने पक्ष के विचलनों का गुणनफल लिखिए ।

5) वाम पक्ष में एक संख्या + दूसरी संख्या का विचलन लिखिए ।

6) आधार में जितने शून्य उतने ही अङ्क दाहिने पक्ष में रखिए अङ्क संख्या की कमी 0 लिखकर पूरी कीजिए यदि अङ्क अधिक हो तो बायें पक्ष में जोड़िये ।

7) विचलनों का गुणनफल यदि ऋणात्मक हो तो बायें पक्ष से एक आदि लेकर धनात्मक रूप में बदलिए ।

ध्यान रहे – बायें पक्ष से आये एक का मान दाहिने पक्ष के आधार के बराबर होता है ।

आइए , उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

उदाहरण : निखिलम् नवत: चरमं दशत: (आधार 10 एवं 100) विधि से गुणा कीजिए।

- **जब आधार 10 हो**

1) गुणा करें: 13×12

$$\begin{array}{rrr} & 1\,3 & +3 \\ \times & 1\,2 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$13 + 2 \,/\, 3 \times 2$

$15 \,/\, 6$

$= \quad 156$

अत: $13 \times 12 = 156$

सङ्केत –

1) विचलन = +3, +2

2) बायें पक्ष में 13 + 2 या 12 + 3 लेते हैं।

3) दायें पक्ष में विचलनों का गुणन

- **जब आधार 100 हो**

2) गुणा करें: 92×93

$$\begin{array}{rrr} & 9\,2 & -08 \\ \times & 9\,3 & -07 \\ \hline \end{array}$$

$92 - 7 \,/\, (-8) \times (-7)$

$85 \,/\, 56$

$= \quad 8556$

अत: $92 \times 93 = 8556$

सङ्केत –

1) विचलन = – 08, – 07

2) दायें पक्ष में दो अङ्क अत: 56 को लिखें।

3) गुणा करें - 93×102

$$\begin{array}{rr} 93 & -7 \\ \times\ 102 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$93 + 2 \ / \ (-7) \times 2$

$95 \ / \ -14$

$+1$

$94 \ / \ 100 - 14$

$94 \ / \ 86$

$= \quad 9486$

सङ्केत –

1) गुणनफल

$95 \ / -14$

2) बायें पक्ष से 1 दायें पक्ष में लाइये।

3) दायें पक्ष में 1 का स्थानीयमान = 100

अत: $93 \times 102 = 9486$

4) दो संख्याओं का गुणन (उपाधार सूत्र – निखिलं नवत: चरमं दशत:)

किसी प्रश्न में विचलन बड़े प्राप्त होने से उनका गुणा करना कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में **उपाधार की सङ्कल्पना** का प्रयोग करते हैं। इसमें उपाधार अङ्क का गुणा बायें पक्ष में किया जाता है एवं दायाँ पक्ष पूर्व समान रहता है ।

आइए , उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

उदाहरण : निखिलम् नवत: चरमं दशत: (उपाधार विधि) से गुणा कीजिए ।

1) गुणा करें: 32×34

$$\begin{array}{rrr} & 32 & +2 \\ \times & 34 & +4 \\ \hline \end{array}$$

$32 + 4 \,/\, 2 \times 4$

$36 \times 3 \,/\, 8$

$108 \,/\, 8$

$= 1088$

अत: $32 \times 34 = 1088$

सङ्केत –

1) आधार $= 10$

उपाधार $= 3 \times 10 = 30$

आधार अंक $= 3$

2) उपाधार विचलन $= +2$ एवं $+4$

3) बायें पक्ष में उपाधार अंक 3 का गुणा

$= 36 \times 3 = 1088$

2) गुणा करें- 64×67

$$\begin{array}{rrr} & 64 & +4 \\ \times & 67 & +7 \\ \hline \end{array}$$

$(64 + 7) \times 6 \,/\, 4 \times 7$

$71 \times 6 \,/\, 28$

$426 + 2 \,/\, 8$

$= 4288$

अत: $64 \times 67 = 4288$

सङ्केत –

1) उपाधार $= 10 \times 6$

आधार अंक $= 6$

2) बायें पक्ष में उपाधार अंक 6 का गुणा

$= 71 \times 6 = 426$

3) उसके बाद दायें पक्ष का समायोजन करना चाहिए ।

3) गुणा करें- 306×312

$$\begin{array}{rrr} & 3\,0\,6 & +6 \\ \times & 3\,1\,2 & +12 \\ \hline \end{array}$$

$318 \times 3 \;/\; 72$

$954 \;/\; 72$

$= 95472$

सङ्केत –

1) आधार = 100

2) उपाधार = 100×3

उपाधार अङ्क = 3

3) विचलन = +6 तथा +12

अत: $306 \times 312 = 95472$

भाग सङ्क्रिया (सूत्र निखिलं नवत: चरमं दशत:) –

प्रश्न लिखने की विधि –

दो खड़ी रेखाओं निर्धारित स्थान के तीन खण्ड बनाइये, बायीं ओर प्रथम खण्ड में भाजक और उसके नीचे पूरक संख्या लिखिए। आधार में जितने शून्य है, भाज्य के उतने ही अङ्क इकाई अङ्क की तरफ से तीसरे खण्ड में लिखिए भाज्य के शेष अङ्क मध्य खण्ड में लिखिए।

कार्य प्रणाली या विधि –

1) बायीं ओर से भाज्य के प्रथम अङ्क को नीचे योगफल के स्थान पर लिखिए।

2) पूरक संख्या से इस अङ्क का गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अङ्क के नीचे लिखिए।

3) पूरक संख्या में दो अङ्क हो तो गुणनफल को तीसरे अङ्क के नीचे भी लिखिए।

4) केवल दूसरे स्थान के नीचे ऊपर के अङ्कों को योगकर , योगफल के स्थान पर लिखिए ।

5) अभी तीसरे स्थान में अङ्कों को नहीं जोड़ना है ।

6) योग में लिखे दूसरे अङ्क का फिर पूरक संख्या से गुणा कर गुणनफल को भाज्य के तीसरे अङ्क के नीचे लिखिए और जोड़िये।

इस प्रक्रिया को आवृत्ति करते रहिये (दोहरायें) ,जब तक कि गुणनफल के अङ्क तृतीय खण्ड के इकाई अङ्क के नीचे तक न लिख जाये । अन्त में फिर जोड़िये ।

मध्यखण्ड में लिखा गया योगफल = भागफल

तथा तृतीय खण्ड में लिखा गया योगफल = शेषफल होता है ।

यदि प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटाकर संशोधित भागफल और शेषफल प्राप्त कीजिए ।आइए , उदाहरण से स्पष्ट करते हैं ।

उदाहरण : भागफल ज्ञात कीजिए - 3 7 8 ÷ 8

हल:

8	1 1	1
2	2	6
	1 3	7
	भागफल	शेषफल

सङ्केत –

1) भागफल = 13

व शेषफल = 7

उदाहरण : भागफल ज्ञात कीजिए -   1 1 8 9 ÷ 8 8

हल:

88	1	1	8	9
12		1	2	
			2	4
	1	2	13	3
		+1	– 88	
		13	45	
		भागफल	शेषफल	

सङ्केत –

1) पूरक संख्या = 100 – 88 = 12

2) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखें 1 × 12 = 12 के अङ्क मध्य खण्ड में आगे के अङ्कों के नीचे लिखा ।

3) 1 + 1 = 2 मध्य खण्ड में नीचे लिखें ।

4) 2 × 12 = 24 मध्य एवं तृतीय खण्ड में दर्शाये अनुसार लिखें ।

5) योगफल करें – भागफल = 12, शेषफल = 133

6) शेषफल > भाजक से

अत: संशोधन आवश्यक है । तब,

संशोधित भागफल = 13, शेषफल = 45

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

(अ) सामान्य संख्या 46 को विनकुलम् संख्या में .... लिखते हैं।

(ब) सामान्य संख्या 28 को विनकुलम् संख्या में .... लिखते हैं।

(स) विनकुलम् संख्या $3\bar{3}$ को सामान्य संख्या में .... लिखते हैं।

(द) विनकुलम् संख्या $4\bar{4}$ को सामान्य संख्या में .... लिखते हैं।

(प) विनकुलम् संख्या $4\bar{4}$ को सामान्य संख्या में .... लिखते हैं।

(फ) सामान्य संख्या 17 का विचलन = ... है।

(भ) संख्या 89 का विचलन = ... है।

2. सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलिए ।

अ) 89 ब) 187 स) 253

3. विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए ।

अ) $3\bar{2}1$ ब) $4\bar{3}2$ स) $5\bar{3}\bar{4}$

4. सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः द्वारा गुणा कीजिए ।

अ) 1 0 3	ब) 9 4	स) 1 0 8	द) 9 6
× 1 0 7	× 9 5	× 1 0 5	× 9 3
$\boxed{\quad}$	$\boxed{\quad}$	$\boxed{\quad}$	$\boxed{\quad}$

प) $\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 74 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	फ) $\begin{array}{r} 203 \\ \times 204 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	भ) $\begin{array}{r} 506 \\ \times\ 504 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	म) $\begin{array}{r} 810 \\ \times\ 804 \\ \hline \boxed{} \end{array}$
य) $\begin{array}{r} 302 \\ \times\ 312 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	र) $\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 83 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	ल) $\begin{array}{r} 716 \\ \times\ 711 \\ \hline \boxed{} \end{array}$	म) $\begin{array}{r} 407 \\ \times\ 412 \\ \hline \boxed{} \end{array}$

5. **निखिलम् नवत: चरमं दशत: विधि से भाग दीजिए।**

अ) $1245 \div 97$ ब) $311 \div 8$ स) $1013 \div 88$ द) $1113 \div 888$

हमने सीखा

1) वैदिक गणित के **16 सूत्र एवं 16 उपसूत्र** के बारे में चर्चा किया ।

2) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के द्वारा योगफल, व्यवकलन, गुणन सङ्क्रिया एवं भिन्नों के गुणन हल किये ।

3) सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण के द्वारा व्यवकलन, गुणन सङ्क्रिया (जब दो संख्याओं एवं संख्या का प्रत्येक अङ्क 9 हो) का अभ्यास किया ।

4) विनकुलम् , संख्या को सामान्य संख्या तथा सामान्य संख्या को विनकुलम् में बदलने की चर्चा की गई ।

5) आधार, उपाधार एवं विचलन संख्या प्रयोग कर सूत्र निखिलम् नवत: चरमं दशत: के द्वारा गुणन करना सीखा ।

6) सूत्र निखिलम् नवत: चरमं दशत: द्वारा भाग करना सीखा ।

उत्तर जाँचने की विधियाँ

गणित में किसी भी सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर जाँच करने की विधि-

बीजाङ्क विधि :-

किसी भी संख्या का बीजाङ्क ज्ञात करने के लिये उस संख्या के अङ्कों का योग एक अङ्क प्राप्त होने तक करते हैं।

जैसे: **क)** 134 का बीजाङ्क $1+3+4 = 8$

ख) 78 का बीजाङ्क $7+ 8 = 15$ यहाँ,15 प्राप्त हुआ है जो कि बीजाङ्क नहीं हैं। अत: इसके अङ्कों को पुन: जोड़ेंगे $1+5 = 6$

- **योग सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

संख्याओं के बीजांकों का योग का बीजाङ्क = उत्तर का बीजाङ्क होने पर उत्तर सही होगा।

उदाहरण:

	4815	9
	2487	3
+	1904	5
	9206	8

जाँच: संख्याओं के बीजाङ्क के योग का बीजाङ्क

$9 + 3 + 5 \rightarrow 17 \rightarrow 1 + 7 \rightarrow 8$

उत्तर का बीजाङ्क

$9 + 2 + 0 + 6 \rightarrow 17 \rightarrow 1 + 7 \rightarrow 8$ दोनों बीजाङ्क बराबर हैं।

अर्थात् उत्तर सही है।

- **व्यवकलन सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

(इसमें घटने वाली (नीचे की) संख्या का बीजाङ्क + उत्तर का बीजाङ्क) के योगफल का बीजाङ्क = ऊपर की संख्या का बीजाङ्क

उदाहरण:

	781	7
−	325	1
	456	6

जाँचः क) घटने वाली (नीचे की) संख्या का बीजाङ्क + उत्तर का बीजाङ्क $\longrightarrow$

$$1 + 6 \longrightarrow 7$$

ख) वियोज्य (ऊपर) कि संख्या का बीजाङ्क $\longrightarrow$ 7

दोनों बीजाङ्क बराबर है ,अर्थात् उत्तर सही है।

- **गुणा सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

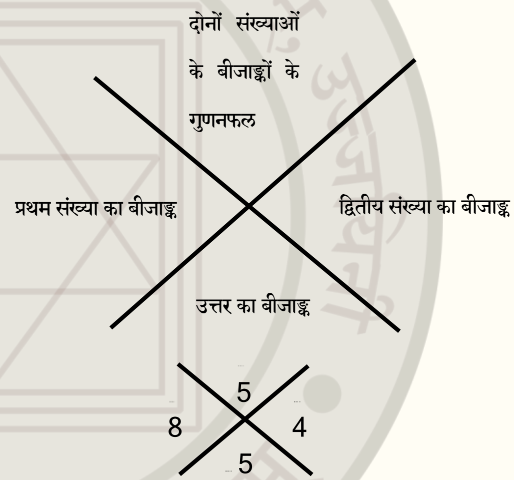
(प्रथम संख्या का बीजाङ्क × द्वितीय संख्या का बीजाङ्क)

से प्राप्त गुणनफल का बीजाङ्क = उत्तर का बीजाङ्क

उदाहरण : 413 × 517

हलः

```
       413 × 517
      ----------
       2891
       4130
     206500
    ----------
     213521
```



जाँच : क) प्रथम संख्या का बीजाङ्क×द्वितीय संख्या का बीजाङ्क $\longrightarrow$ प्राप्त गुणनफल का बीजाङ्क $\longrightarrow$ $8 \times 4 = 32$ का बीजाङ्क $\longrightarrow$ 5

ख) उत्तर का बीजाङ्क $\longrightarrow$ 5

दोनों बीजाङ्क बराबर है,अर्थात् उत्तर सही है।

- **भाग सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

उदाहरणः $4857 \div 14$

हलः

भाजक 14) 4 8 5 7 (3 4 6 भागफल

$\underline{-\ 4\ 2}$

0 6 5

$\underline{-\ \ 5\ 6}$

0 9 7

$\underline{-\ \ 8\ 4}$

1 3 शेषफल

जाँच :

भाज्य का बीजाङ्क = (भागफल का बीजाङ्क × भाजक का बीजाङ्क) + शेषफल का बीजाङ्क

$\rightarrow$ 6 (4 × 5) + 4

$\rightarrow$ 2 0 + 4

$\rightarrow$ 2 4

$\rightarrow$ 6

अर्थात् उत्तर सही है।

अध्याय 5

वृत्त

प्यारे बटुकों ! आपने दैनिक जीवन में अनेक वस्तुएँ देखी हैं या बहुत वस्तुओं के सम्पर्क में अवश्य आए होंगे ,जिनका आकार गोल है । **जैसे** –चूड़ियाँ, पहिया, कुर्ते के बटन, थाली आदि ।

चूड़िया

पहिया

कुर्ते का बटन

थाली

आपने अपने कक्ष में पंखे को चालू करके देखेंगे तो उसकी पंखुड़ियाँ तेजी से गोल-गोल चक्कर लगाने लगेंगी ऐसी स्थिति में आपको पंखुड़ियाँ अलग-अलग दिखाई देने की अपेक्षा एक नई आकृति दिखाई देती है ।

आप सभी ने डोरी और पत्थर के एक साथ खेल खेला होगा ? डोरी के एक छोर पर पत्थर को बाँधिये और दूसरे छोर को पकड़ कर घुमाइये और गति तेज कीजिए तथा अपना ध्यान पत्थर पर रखिए।

आप देखेंगे कि पत्थर के स्थान पर एक वलय (रिंग) दिखने लगेगा। यही **वृत्त** है ।

वैदिक मन्त्रों में कालगणना से सम्बन्धित एक मन्त्र दिया गया है।

चतुर्भिः साकं नवतिं च नामभिश्चक्रं न वृत्तं व्यतीरवीविपत् ।

बृहच्छरीरो विमिमान ऋक्कभिर्युवाकुमारः प्रत्येत्याहवम् ॥

(ऋग्वेद 1/155/6)

ऋग्वेद के उपर्युक्त में वृत्त के बारे में उल्लेख मिलता है । जिसमें वृत्त को नब्बे-नब्बे डिग्री के चार अंशों में विभाजित करने का सङ्केत मिलता है ।

इस अध्याय में हम वृत्त से सम्बन्धित पदों के बारे में अध्ययन करेंगे ।

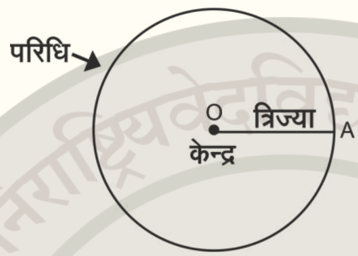
वृत्त–

परकार लीजिए तथा एक भाग पर पेन्सिल लगाकर कागज के पृष्ठ के एक बिन्दु पर रखिए , दूसरी भुजा को कुछ दूरी तक खोलिए, नुकीले सिरे को उसी बिन्दु पर स्थिर कर दूसरी भुजा को एक चक्कर घुमाइए । पेन्सिल से कागज पर बनी आकृति क्या है ? जैसा कि आप जानते हैं यह **वृत्त** है आपने वृत्त कैसे प्राप्त किया ?

वास्तव में एक वृत्त परकार को घुमाने पर पेन्सिल की नोंक से अनवरत अंकित अनन्त बिन्दुओं का समूह (सम्मुचय) है अर्थात् **एक तल चर उन सभी बिन्दुओं का समूह जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित है** ,एक **वृत्त** कहलाता है ।

वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या –

स्थिर बिन्दु को **वृत्त का केन्द्र** कहते हैं तथा स्थिर दूरी को **वृत्त की त्रिज्या** कहते हैं । आकृति में वृत्त का केन्द्र O है और OA वृत्त की त्रिज्या है । सम्पूर्ण वृत्त की लम्बाई **वृत्त की परिधि** कहलाती है ।



ध्यान दीजिए - वृत्त केन्द्र और परिधि को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत्त की **त्रिज्या** कहलाती है।

एक वृत्त के तल को जिस पर वह स्थित है उसे तीन भागों में बाँटा गया है ।

1) **आभ्यन्तर** – वृत्त के अन्दर का माप जिसे आभ्यन्तर कहते हैं ।

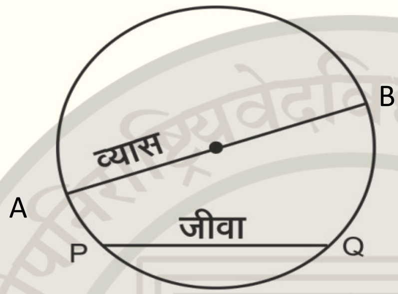
2) **परिसीमा** – वृत्त (आकृति स्वयं)

3) **बहिर्भाग** – वृत्त के बाहर का भाग जिसे बहिर्भाग कहते हैं ।

वृत्त तथा इसका आभ्यन्तर मिलकर **वृत्त क्षेत्र** बनाते हैं ।

जीवा और व्यास –

वृत्त पर स्थित दो बिन्दु P व Q को स्केल की सहायता से मिलने पर प्राप्त रेखाखण्ड $\overline{PQ}$ वृत्त की **जीवा** कहलाती है । यदि कोई जीवा वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है तो वह जीवा उस वृत्त का **व्यास** कहलाती है । जैसे : AB



वृत्त की **सबसे बड़ी जीवा व्यास** होती है, वृत्त का **व्यास, त्रिज्या की माप का दो गुणा** होता है। अर्थात् **व्यास = 2 × त्रिज्या** तथा **त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2}$**

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 10 से.मी. है तो व्यास कितने से.मी. होगा ।

हल :दिया है वृत्त की त्रिज्या = 10 से.मी.

हम जानते हैं - **व्यास = 2 × त्रिज्या**

= 2 × 10 = 20 से.मी.

अत: 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त का व्यास 20 से.मी. होगा ।

करो और सीखो –

1) अपनी अभ्यास पुस्तिका में भिन्न-भिन्न त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइये और व्यास को मापे तथा प्रत्येक वृत्त में दो से अधिक जीवाएँ खींचिए सभी जीवाओं को मापे?

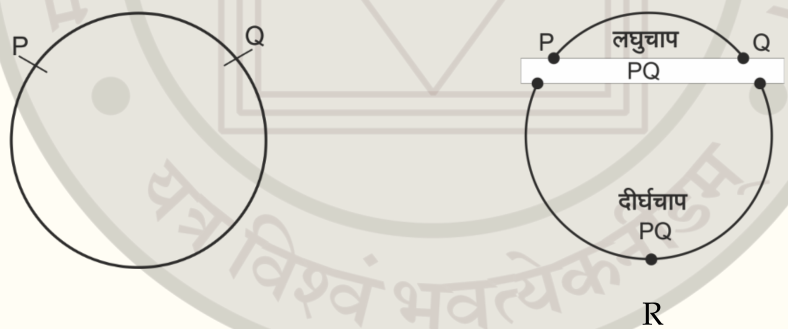
2) यदि वृत्त का व्यास 40 से.मी. है तो त्रिज्या कितने से.मी. होगी ?

गतिविधि -

एक वृत्त बनाइए और देखिए उसमें कितने व्यास खींचे जा सकते हैं ? क्या एक से अधिक व्यास होंगे? हाँ , अनन्त व्यास खींचे जा सकते हैं । निम्न आकृति देखिए ।

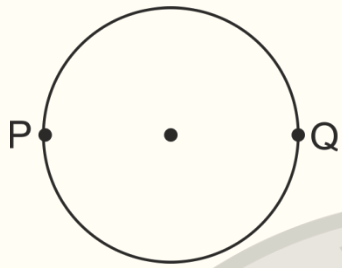
चाप –

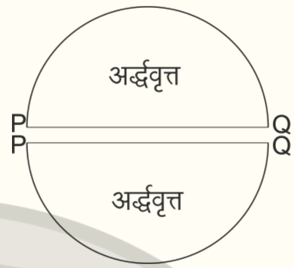
दो बिन्दुओं के बीच के वृत्त भाग को **चाप** कहते हैं । निम्न आकृति में वृत्त पर दो बिन्दु P एवं Q दिखाए गए हैं। जो वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है ।



यदि दोनों चापों को उपर्युक्त आकृति में अलग-अलग करके देखें तो लघु चाप ($\widehat{PQ}$) से दर्शाते हैं । परन्तु दीर्घ चाप PQ में एक बिन्दु R लेकर चाप ($\widehat{PRQ}$)द्वारा व्यक्त करते हैं ।

यदि P और Q व्यास पर स्थित हों और दोनों चाप समान होते है तो प्रत्येक चाप को **अर्द्धवृत्त** कहते हैं। निम्न आकृति देखिए -



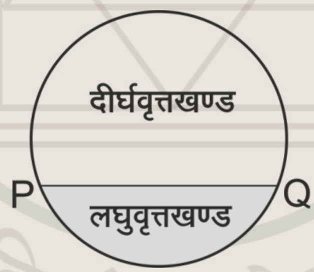


वृत्तखण्ड –

केन्द्र रहित एक क्षेत्र जो वृत्त की एक जीवा और एक चाप से घिरा होता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखण्डों में विभाजित करती है।

1) दीर्घ वृत्तखण्ड

2) लघु वृत्तखण्ड



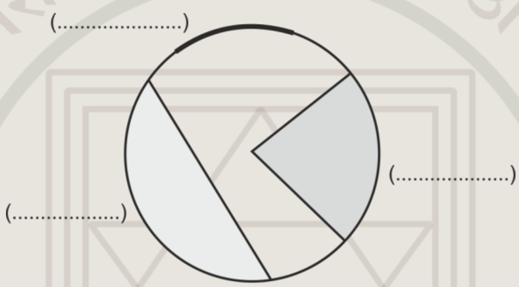
त्रिज्याखण्ड –

किन्हीं दो त्रिज्याओं के बीच एक चाप से घिरा हुआ क्षेत्र **त्रिज्याखण्ड** कहलाता है। निम्न आकृति में OPQ लघु त्रिज्याखण्ड व शेष दीर्घ त्रिज्याखण्ड है।

करो और सीखो ।

निम्न वृत्त की आकृति को नामांकित कीजिए ।

(चाप, त्रिज्याखण्ड, वृत्तखण्ड)



प्रश्नावली 5.1

1. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1) वृत्त का केन्द्र वृत्त के................में स्थित है। (बहिर्भाग / आभ्यन्तर)

2) एक बिन्दु , जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो वृत्त के ....में स्थित होता है। (बहिर्भाग / आभ्यन्तर)

3) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का..............होता है। (व्यास / त्रिज्या)

4) एक चाप................होता है। जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों। (अर्द्धवृत्त/वृत्त)

5) वृत्त के चाप एवं जीवा के मध्य का क्षेत्र.............होता है। (वृत्तखण्ड / त्रिज्याखण्ड)

6) दो त्रिज्या तथा चाप द्वारा घेरा गया क्षेत्र...........................होता है। (वृत्तखण्ड / त्रिज्याखण्ड)

7) वृत्त के केन्द्र और परिधि के बीच की दूरी............................कहलाती है। (जीवा / त्रिज्या)

8) व्यास वृत्त की सबसे...................जीवा है। (छोटी / बड़ी)

2. सत्य / असत्य लिखिए।

1) वृत्त एक समतल आकृति है।

2) जीवा और संगत चाप के बीच का क्षेत्र त्रिज्याखण्ड होता है।

3) केन्द्र से वृत्त पर किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है ।

4) यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए तो प्रत्येक चाप दीर्घ चाप होता है ।

5) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा व्यास है ।

6) वृत्त की वह जीवा जिस पर केन्द्र स्थित हो ,त्रिज्या कहलाती है ।

7) वृत्त के अन्दर अनन्त व्यास खींचे जा सकते हैं ।

3. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) अर्द्धवृत्त का कोण होता है-

(I) न्यूनकोण (II) समकोण (III) अधिककोण (IV) ऋजुकोण

(ब) एक ही वृत्तखण्ड के कोण होते है-

(I) असमान (II) समान (III) (1) और (2) दोनों (IV) इनमें से कोई नहीं

वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ -

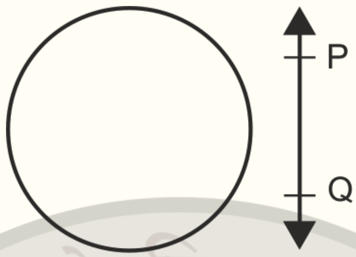
स्पर्श रेखा-

वृत्त के समतलीय सीधी रेखा जो एक बिन्दु पर वृत्त को स्पर्श (टच) करती है। वृत्त की **स्पर्श रेखा** कहलाती है।

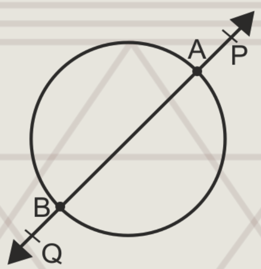
एक तल में स्थित एक वृत्त तथा एक रेखा की विभिन्न स्थितियाँ –

जब एक वृत्त तथा एक सरल रेखा जैसे कि PQ एक तल में स्थित हो, तो निम्नांकित संभावनाएँ हो सकती हैं ।

अ) रेखा PQ और वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है । इस दशा में PQ को वृत्त के सापेक्ष **अप्रतिच्छेदी रेखा** कहते हैं ।

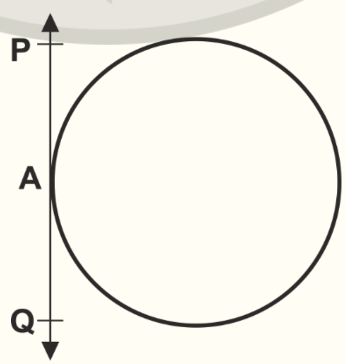


ब) रेखा P और Q वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिन्दु A और B हैं ।इस दशा में रेखा को वृत्त की **छेदक रेखा** कहते हैं ।



अर्थात् एक विस्तारित जीवा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदी करती है **छेदक रेखा** कहलाती है ।

स) रेखा PQ वृत्त में केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है।इस दशा में रेखा को PQ को वृत्त की **स्पर्श रेखा**(tangent)कहते हैं ।



वृत्त की स्पर्श रेखा –

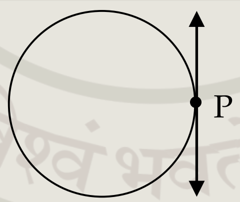
किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है,जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। किसी वृत्त की स्पर्श छेदक रेखा की विशिष्ट दशा है।वृत्त की स्पर्श रेखा को अंग्रेजी में tangent कहते हैं।

स्पर्श रेखा के गुण –

अ) वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।

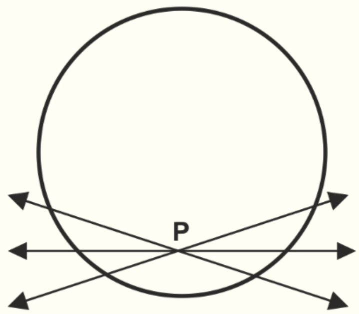
ब) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे सम्पाती हो जाएँ।

स) स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु (common point) को स्पर्श बिन्दु (Point of Contact) कहते हैं तथा स्पर्श रेखा को वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु पर स्पर्श करना चाहते हैं,तो वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु कहलाता है।

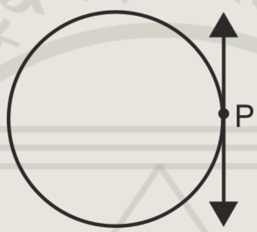


यहाँ P बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते हैं।

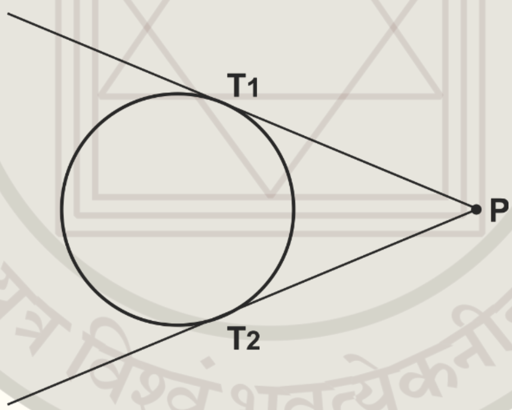
द) वृत्त के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।



य) वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।



प) वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ है।



दी गई आकृति में PT_1 व PT_2 के क्रमशः T_1 तथा T_2 स्पर्श बिन्दु है।

फ) बाह्य बिन्दु P से वृत्त के स्पर्श बिन्दु तक स्पर्श रेखाखण्ड की लम्बाई को बिन्दु P से वृत्त पर रेखा की लम्बाई कहते हैं।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) यदि ABC एक त्रिभुज है तो तीनों शीर्ष बिन्दु A,B और C से कितने वृत्त खींचे जा सकते है।

(I) 1 (II) 2 (III) 3 (IV) अनन्त

2. वृत्त की स्पर्श रेखा और छेदक रेखा में क्या अन्तर है ?

3. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(स्पर्श, छेदक रेखा, एक और केवल एक, दो और केवल दो, बराबर, स्पर्श बिन्दु)

अ) एक विस्तारित जीवा, जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदी करती है , ...कहलाती है।

ब) वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर................स्पर्श रेखा है।

स) वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर............स्पर्श रेखा है।

द) वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची जाने वाली दोनों स्पर्श रेखा ....होती है।

य) स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु (कॉमन प्वाइंट) को ....कहते हैं।

प) वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक.......................रेखा होती है।

हमने सीखा –

1) एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हो ।

2) वृत्त से सम्बन्धित पद –

केन्द्र - वह बिन्दु जो वृत्त पर स्थित सभी बिन्दुओं से समान दूरी पर होता है।

परिधि - वृत्त के चारों ओर के वक्र की लम्बाई परिधि कहलाती है

त्रिज्या - वृत्त के केन्द्र और परिधि के बीच दूरी त्रिज्या कहलाती है ।

जीवा - वृत्त पर दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड जीवा कहलाता है ।

व्यास - एक ऐसी जीवा जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाए , व्यास कहलाती है । यहाँ व्यास, त्रिज्या का दोगुनी होती है ।

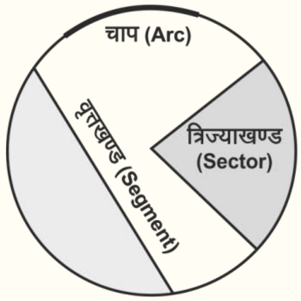
स्पर्श रेखा - वृत्त को एक सीधी रेखा जो एक बिन्दु पर वृत्त को स्पर्श करती है और जिस बिन्दु पर स्पर्श करती है वह **स्पर्श बिन्दु** कहलाता है ।

छेदक रेखा - एक विस्तारित जीवा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है । छेदक रेखा कहलाती है ।

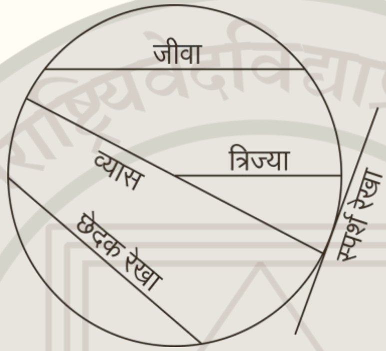
चाप - वृत्त की परिधि का कोई भाग होता है।

त्रिज्याखण्ड - किन्हीं दो त्रिज्याओं के बीच एक चाप से घिरा क्षेत्र त्रिज्याखण्ड होता है।

वृत्तखण्ड - एक जीवा और एक चाप से घिरा हुआ क्षेत्र वृत्तखण्ड होता है।



3) वृत्त की स्पर्श रेखा के बारे में अध्ययन किया ।



अध्याय - 6

त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता एवं समरूपता

प्रिय बिटुकों ! हम अपने दैनिक जीवन में कई प्रकार की ज्यामितीय आकृतियों को देखते हैं। जैसे: त्रिभुज,चतुर्भुज, वृत्त, ... इत्यादि । जिसमें कई बार आपको देखने में आता है कि किन्हीं दो वस्तु की आकृति में आकार एवं माप समान है या कभी आकार समान है परन्तु माप समान नहीं है। इस स्थिति में क्या दोनों आकृतियाँ समरूप होंगे या सर्वाङ्गसम होंगे? इस अध्याय में हम त्रिभुजाकार आकृति के सर्वाङ्गसमता एवं समरूपता की अवधारणा का विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे।

पुनरावलोकन :

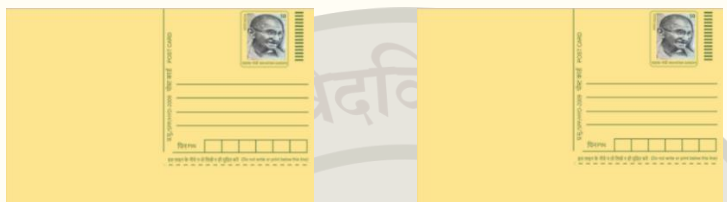
आपको स्मरण होगा कि तीन बिन्दुओं से घिरी हुई बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग 180^0 होता है। क्या आप त्रिभुज के प्रकार (भुजा एवं कोणों के आधार पर) का वर्गीकरण कर सकते हैं ?

सर्वाङ्गसमता की अवधारणा -

सर्वाङ्गसमता का अर्थ है- 'सभी प्रकार से बराबर' अर्थात् दो आकृतियाँ जिनका आकार एवं माप में एक-दूसरे के समान हो । **सर्वाङ्गसम आकृति** कहलाती है । सर्वाङ्गसम आकृति यह गुण सर्वाङ्गसमता कहलाता है। सर्वाङ्गसमता को दर्शाने के लिए संकेत '$\cong$' का प्रयोग किया जाता है । सर्वाङ्गसमता के कई उदाहरण आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं ।

जैसे: 1) 10 रुपये के 2 सिक्के

2) पोस्टकार्ड पर दो डाक टिकट

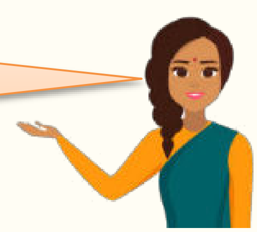


अनिमेष: दो वर्गाकार आकृति की एक भुजा 5 सेण्टीमीटर है तो क्या दोनों वर्ग आकृतियाँ सर्वाङ्गसम होंगे ?

त्रिभुजों की सर्वाङ्गसमता :

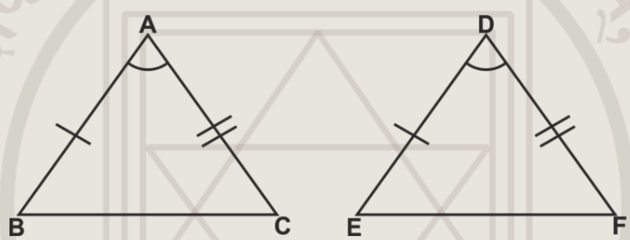
हम जानते हैं की **त्रिभुज के कुल 6 अवयव में तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं।** दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे अथवा नहीं यह सिद्ध करने के लिए हमें यह ज्ञान होना आवश्यक होता है कि एक त्रिभुज के सभी 6 अवयव दूसरे त्रिभुज के सभी संगत 6 अवयव के समान हों तो दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे । दूसरे शब्दों में हम कर सकते हैं 'दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम कहलाते है। यदि दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णत: ढक ले।' आइये, त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता के नियम पर चर्चा करते हैं।

आशा : क्या दो त्रिभुज में कोई तीन अवयव समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे ?



सर्वाङ्गसमता के नियम : त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता के लिए त्रिभुज के छः अवयव (तीन भुजाएँ एवं तीन कोण) में से कोई तीन अवयव के समान होने पर भी दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे । यदि दोनों त्रिभुज निम्न नियम को सन्तुष्ट करता हो-

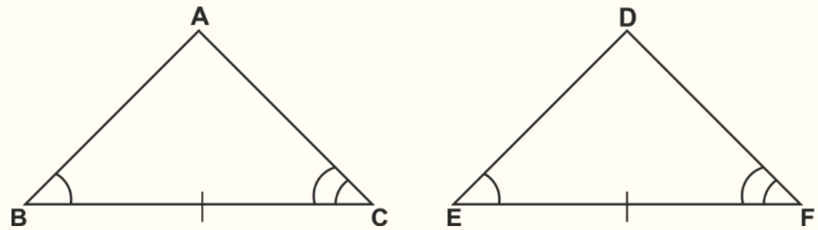
1. **SAS सर्वाङ्गसमता के नियम (भुजा कोण भुजा) :** यदि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और उनके मध्य का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाएँ एवं उनके मध्य का कोण बराबर हो तो वह दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में दो भुजाओं के युग्म में AB = DE, AC = DF तथा उनके मध्य का कोण $\angle A = \angle D$ समान है अतः दोनों त्रिभुज भुजा कोण भुजा नियम से सर्वाङ्गसम होंगे । यह सर्वाङ्गसमता को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\Delta BAC \cong \Delta EDF$$

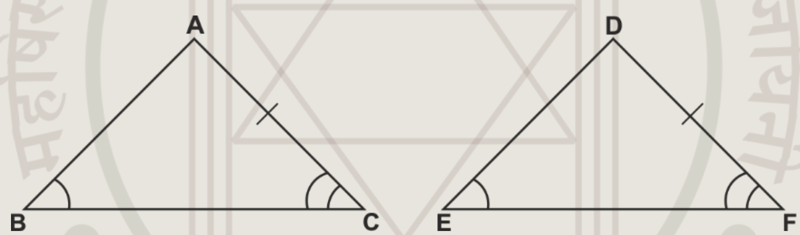
2. **ASA सर्वाङ्गसमता के नियम (कोण भुजा कोण) :** यदि किसी त्रिभुज के कोई दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और एक संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं ।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजा BC = EF दो कोणों के युग्म $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ में समान है अतः दोनों त्रिभुज कोण भुजा कोण नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

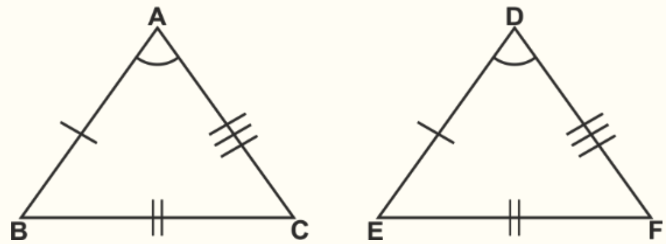
3. **AAS सर्वाङ्गसमता के नियम(कोण कोण भुजा) :** दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोण एवं एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजा AC = DF दो कोणों के युग्म $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ में समान है अतः दोनों त्रिभुज कोण भुजा कोण नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।

- AAS सर्वाङ्गसमता का नियम, ASA सर्वाङ्गसमता का ही एक मानदण्ड है।

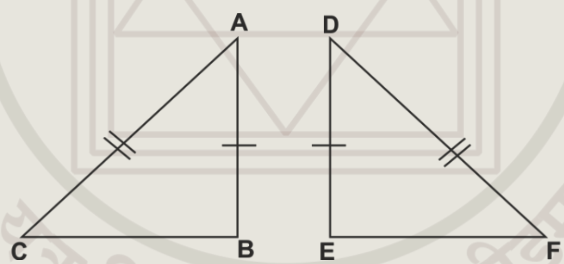
4. **SSS सर्वाङ्गसमता के नियम (भुजा भुजा भुजा) :** यदि एक त्रिभुज के तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज के तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों तो वह त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं । तीन भुजाओं के युग्म में समान है अतः दोनों त्रिभुज भुजा भुजा भुजा नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजाओं के युग्म में AB = DE , BC = EF तथा AC = DF उनके बीच के संगत कोण $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$ समान है। अतः दोनों त्रिभुज SSS (भुजा भुजा भुजा) नियम से सर्वाङ्गसम होंगे ।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

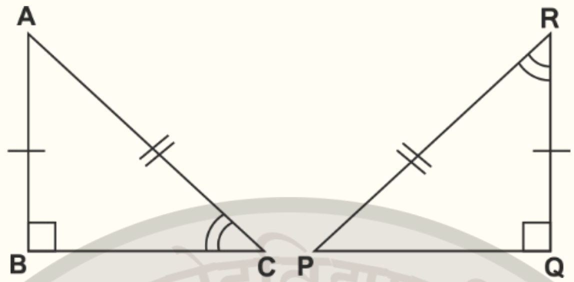
5. **RHS सर्वाङ्गसमता के नियम :** यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की संगत एक भुजा और कर्ण के बराबर हो तो वह त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त समकोण कर्ण भुजा (RHS) नियम में R = समकोण (Right angle), H = कर्ण (Hypotenuse) तथा S = भुजा (Side) को दर्शाता हैं । त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में $\angle B = \angle E$ = समकोण (90^0), कर्ण भुजा AC = DF तथा भुजा BC = EF है। अत: RHS नियम से दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे ।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

उदाहरण : संलग्न आकृति में एक सर्वाङ्गसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे ΔABC और ΔPQR सर्वाङ्गसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबन्ध का प्रयोग किया ?



हल : यहाँ, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$ एवं $\angle C = \angle R$

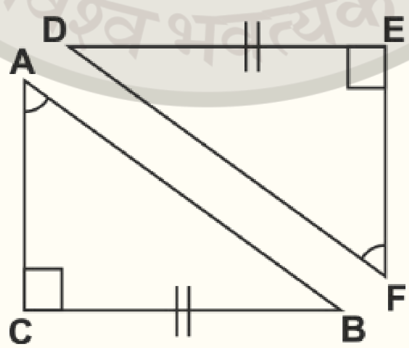
$\therefore$ सर्वाङ्गसम भागों का अतिरिक्त युग्म–

$BC = QR$

अत: हमने यहाँ ASA सर्वाङ्गसम प्रतिबन्ध का प्रयोग किया है।

करो और सीखो : क्या दिये गये निम्न दोनों त्रिभुजाकार सर्वाङ्गसम है ? यदि है तो किस नियम से दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम है ?

$\Delta ABC \cong \Delta FED.$



प्रश्नावली 6.1

1. रिक्त-स्थानों कि पुर्ति कीजिये।

   (अ) दो रेखाखण्ड सर्वाङ्गसम होते हैं यदि .... ।

   (ब) दो सर्वाङ्गसम कोणों में से एक कोण की माप $80°$ है तो दूसरे कोण की माप...........होती है।

   (स) यदि कोण $\angle A = \angle B$ लिखते हैं, जिसका अर्थ कि दोनों कोण .... होते हैं।

2. दैनिक जीवन से सम्बन्धित दो सर्वाङ्गसम आकारों के उदाहरण दीजिए।

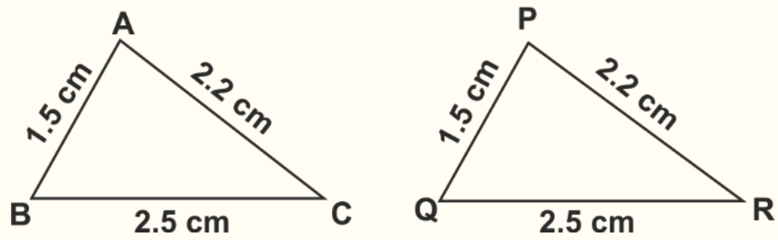
3. यदि सुमेलन $ABC \leftrightarrow FED$ के अन्तर्गत $\Delta ARC \cong \Delta FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वाङ्गसम भागों को लिखिए।

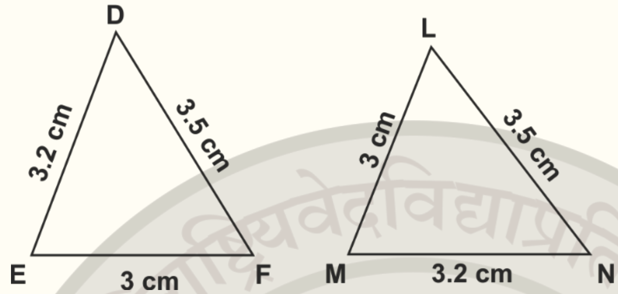
4. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो, तो ΔPQR के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हों :

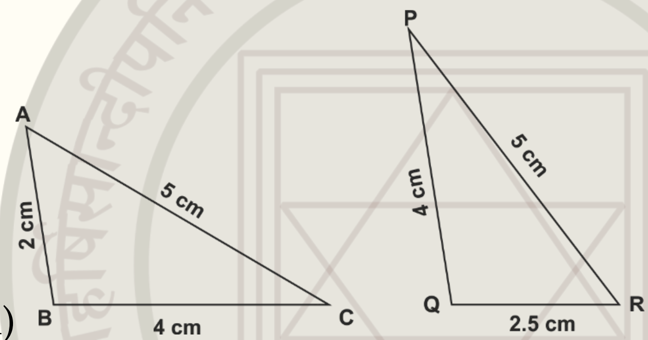
   (i) $\angle B$ (ii) $\overline{BC}$

   (iii) $\angle C$ (iv) $\overline{AC}$

5. निम्न आकृति में त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाइयाँ दर्शाई गई हैं । सर्वाङ्गसमता के प्रतिबन्ध SSS का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज सर्वाङ्गसम हैं । सर्वाङ्गसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए ।

(i) 

(ii) 

(iii) 

समरूपता की अवधारणा :

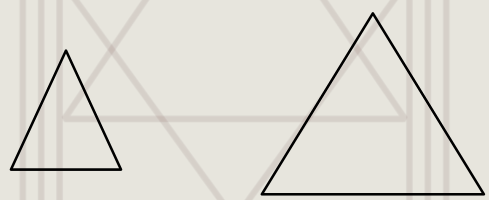
बटुकों ! हम अपने आसपास कई ऐसी वस्तुओं को देखते हैं जो एक ही आकार की तो है परन्तु उनकी माप अलग-अलग है। उदाहरणार्थ एक पेड़ पर लगी हुई पत्तियों को आप देखते हैं तो आपको ज्ञात होगा की इन पत्तियों का आकार तो समान है परन्तु माप समान नहीं है। इसी प्रकार एक ही नेगेटिव से विभिन्न साइज के बने फोटो एक ही आकार के होते हैं अर्थात् वह दो वस्तुएँ जिनके माप अलग-अलग है परन्तु एक ही आकार हो समरूप वस्तुएँ कहलाती है ओर यह गुण **समरूपता** कहलाता है।

आइये, समरूपता को कुछ निम्न उदाहरणों के माध्यम से समझते हैं

1. दो रेखाखण्ड जो एक ही लम्बाई के हों सर्वाङ्गसम तथा समरूप होते हैं परन्तु अलग-अलग लम्बाई के रेखाखण्ड समरूप होते हैं सर्वाङ्गसम नहीं।

2. दो एक समान त्रिज्या वाले वृत्त सर्वाङ्गसम तथा समरूप होते हैं परन्तु भिन्न त्रिज्या वाले वृत्त समरूप होते हैं सर्वाङ्गसम नहीं।

3. भिन्न-भिन्न भुजाओं के दो समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं परन्तु सर्वाङ्गसम नहीं।



उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि वे दो आकृति जिसका आकार एवं माप समान हों सर्वाङ्गसम आकृति कहलाती हैं। तथा दो आकृति जिनका आकार समान होता है परन्तु माप नहीं है। ऐसी आकृति समरूप आकृति कहलाती हैं ।

त्रिभुजों की समरूपता :

आपको स्मरण होगा कि त्रिभुज सबसे कम भुजाओं से बनने वाला बहुभुज है । हम त्रिभुजों की समरूपता के लिए भी निम्न प्रतिबन्ध लिख सकते हैं । अर्थात् दो त्रिभुज समरूप होते हैं । यदि-

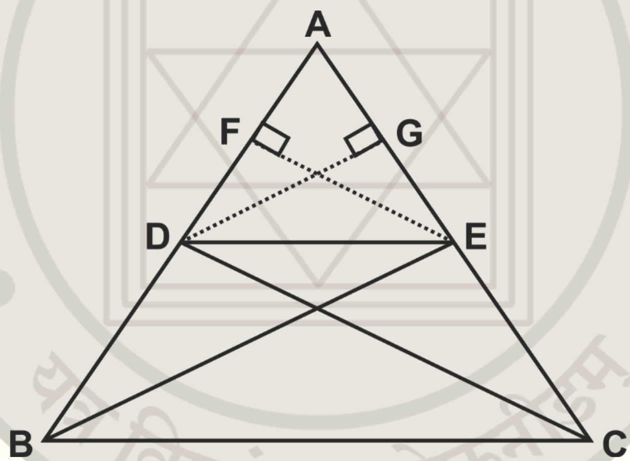
क) उनके संगत कोण बराबर हों ।

ख) तथा उनकी संगत भुजाओं एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों ।

याद रहे कि यदि दो त्रिभुज के संगत कोण बराबर हों तो वे समानकोणिक त्रिभुज (equinangular triangles) कहलाते हैं । गणितज्ञ थेल्स ने दो समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित एक महत्वपूर्ण तथ्य प्रतिपादित किया है जो निम्न है।

प्रमेय : आधारभूत आनुपातिक प्रमेय का कथन (थेल्स प्रमेय) लिखिए तथा सिद्ध कीजिए ।

कथन : एक त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गयी रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, वे बिन्दु भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं।



दिया हैं : ΔABC में $DE \parallel BC$ तथा DE, भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती हैं।

सिद्ध करना हैं : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना : BE और CD को मिलाया तथा $DG \perp AC$ तथा $EF \perp AB$ खींचा।

उत्पत्ति : ΔADE एवं ΔDBE में-

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AD \times EF$ ....(i)

त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times DB \times EF$ ....(ii)

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर-

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{(\frac{1}{2} \times AD \times EF)}{(\frac{1}{2} \times DB \times EF)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{AD}{DB} \text{ ....(iii)}$$

अब ΔADE और ΔECD में,

त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AE \times DG$ .... (iv)

त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times EC \times DG$ .... (v)

समीकरण (iv) में समीकरण (v) का भाग देने पर-

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल}} = \frac{(\frac{1}{2} \times AE \times DG)}{(\frac{1}{2} \times EC \times DG)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल}} = \frac{AE}{EC} \text{ ....(vi)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{AE}{EC} \text{ ....(vii)}$$

समीकरण (iii) व समीकरण (vi) से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

अत: आधारभूत आनुपातिक प्रमेय $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ सिद्ध हुआ ।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न रिक्त-स्थानों कि पुर्ति कीजिये।

   (अ) सभी वृत्ताकार आकृतियाँ .... होते हैं। (सर्वाङ्गसम, समरूप)

   (ब) सभी वर्गाकार आकृतियाँ .... होते हैं। (समरूप, सर्वाङ्गसम)

   (स) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

   (द) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि

   (i) उनके संगत कोण .... हों तथा

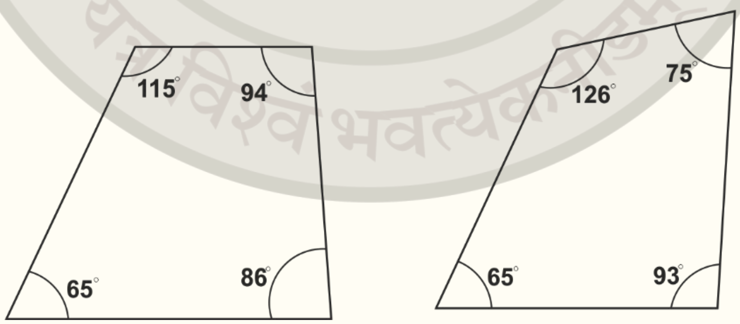
   (ii) उनकी संगत भुजाएँ .... हों। (बराबर, समानुपाती)

2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए।

   (अ) समरूप आकृतियाँ

   (ब) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।

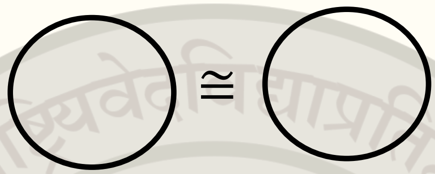
3. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं।



4. आधारभूत आनुपातिक प्रमेय कथन लिखिए।

हमने सीखा:

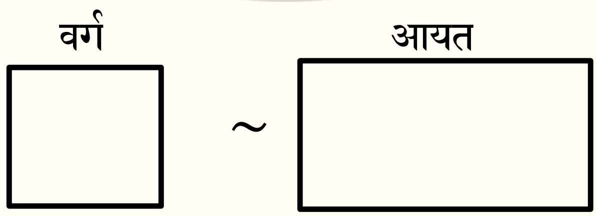
1. वे दो आकृति जिनके आकार एवं माप (shape and size) में समान हों। दोनों आकृति परस्पर सर्वांगसम आकृति कहलाती है। सर्वांगसम आकृतियों को चिह्न से '≅' दर्शाते हैं। **जैसे :** दो समान त्रिज्या वाले दो वृत्त



2. दो त्रिभुजों परस्पर सर्वांगसम होंगे यदि दोनों त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एवं संगत कोण समान हो। त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता के नियम-

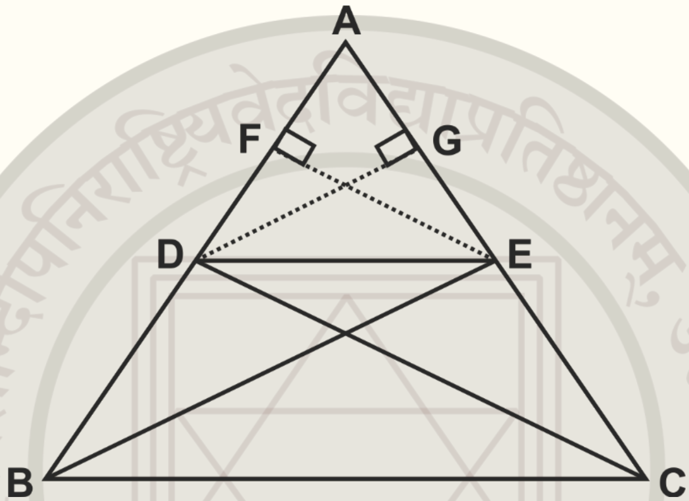
   1. SAS (भुजा-कोण-भुजा) नियम
   2. SSS (भुजा-भुजा-भुजा) नियम
   3. ASA (कोण-भुजा-कोण) नियम
   4. AAS (कोण-कोण-भुजा) नियम
   5. RHS (समकोण-कर्ण-भुजा) नियम

3. वे दो आकृति जिनके आकार (shape) समान हो परन्तु माप (size) समान न हो। उन्हें समरूप आकृति कहा जाता है। समरूप आकृतियों को चिह्न से '~' दर्शाते हैं। **जैसे :** वर्गाकार एवं आयतकार आकृति



4. **थेल्स प्रमेय का कथन** : यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खीचीं जाए तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

यदि त्रिभुज ABC में-



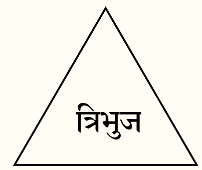
उपर्युक्त त्रिभुज ABC में भुजा DE भुजा BC के समान्तर होने पर भुजा DE, भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करती हैं। तब निम्न परिणाम प्राप्त होता है। जिसे आधारभूत आनुपातिक प्रमेय भी कहा जाता है।

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

अध्याय 7

बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय

प्रिय बटुकों ! हमनें पूर्व कक्षाओं मे त्रिभुज के बारे में अध्ययन किया है। आपको स्मरण होगा तीन बिन्दुओं से घिरी हुई बन्द समतल आकृति **त्रिभुज** कहलाती है।



यजुर्वेद के निम्न मन्त्र में त्रिभुज निर्माण की विधि बताई गयी है।

तिरश्चीनो विततो रश्मिरेषामधः स्विदासीइदुपरि स्विदासीइत् ।

रेतोधाऽआसन्महिमानऽआसन्त्स्वधाऽअवस्तात्प्रयतिः परस्तात् ॥

(यजुर्वेद : 33/74)

यजुर्वेद के उपर्युक्त मन्त्र में सूर्य की किरणों की गति तिरछी, नीचे और ऊपर की ओर बताई गई है जिससे त्रिभुज निर्माण का सङ्केत प्राप्त होता है। त्रिभुज तीन कोण, तीन भुजाओं से मिलकर बना होता है ।

क्या आपको पता है ? कोणों के आधार पर त्रिभुज कितने प्रकार के होते हैं ?

कोणों के आधार पर त्रिभुज -

(1) **न्यूनकोण त्रिभुज -** वह त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण (90^0 से कम) हों **न्यूनकोण त्रिभुज** कहलाता है ।

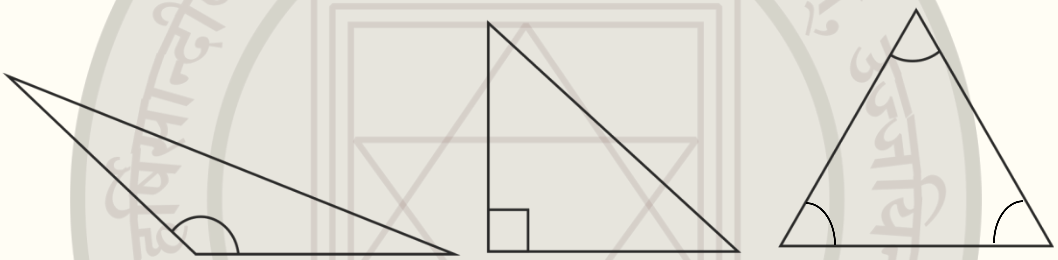
(2) **समकोण त्रिभुज** - वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण (90^0) हो **समकोण त्रिभुज** कहलाता है ।

(3) अधिक कोण - वह त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण (90^0 से अधिक)शेष दोनों कोणों न्यून कोण हों **अधिककोण त्रिभुज** कहलाता है ।

करो और सीखो

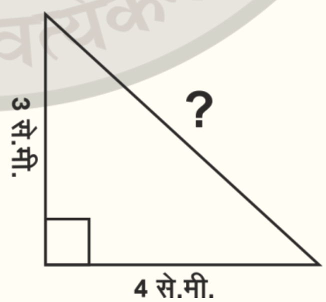
निम्न में त्रिभुज के नाम लिखिए ।

(समकोण त्रिभुज, न्यूनकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज)



(...............)   (...............)   (...............)

विशाल को समकोण त्रिभुज के बारे में एक जिज्ञासा है । यदि समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं की माप दिया है, और वह तीसरी भुजा की माप ज्ञात करना चाहता है ।

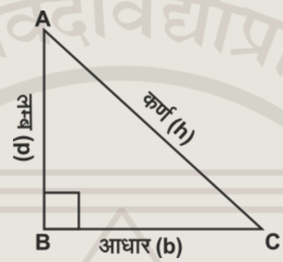


वह अपने गुरुजी के पास जाकर अपनी समस्या बतलाता है ।

गुरुजी - हम प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ बौधायन जी द्वारा बताये प्रमेय से समकोण त्रिभुज की जब दो भुजा दी हुई हो तो तीसरी भुजा को ज्ञात कर सकते हैं ।

आइए , इस अध्याय में हम **भारतीय गणितज्ञ ऋषि बौधायन** द्वारा बताये गये प्रमेय का विस्तृत अध्ययन करेंगे ।

समकोण त्रिभुज का परिचय –



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें लम्ब व आधार दो भुजाएँ मिलकर समकोण (90^0) बनाती हैं । दिये गये त्रिभुज ABC मे $\angle B$ समकोण (90^0) है ।

कर्ण (Hypotenuse) –

- समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा को **कर्ण** कहा जाता है ।
- कर्ण समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है ।
- कर्ण की लम्बाई शेष दोनों भुजाओं की लम्बाई के योग से कम होती है , कर्ण को प्राय: अंग्रेजी के “h” से दर्शाया जाता है ।

आधार (Base)-

- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण छोड़कर नीचे वाली भुजा जो आधार का कार्य करती है , प्राय: **आधार** कहलाती है ।

- समकोण त्रिभुज की एक न्यूनकोण की संलग्न भुजा को आधार कहा जाता है । (**जैसे** : ∠C की संलग्न भुजा आधार है ।)
- आधार को प्राय: अंग्रेजी के अक्षर "b" से दर्शाया जाता है ।

लम्ब(Perpendicular) -

- समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के सम्मुख की भुजा को **लम्ब** कहा जाता है। (**जैसे** : ∠A के संलग्न भुजा लम्ब है ।)
- लम्ब ऊँचाई को भी कहा जाता है लम्ब को प्राय: अंग्रेजी के अक्षर "p" से निरूपित किया जाता है ।

नोट – समकोण त्रिभुज में 90^0 के कोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** कहलाती है। तथा अन्य दो भुजाएँ आधार एवं लम्ब कहलाती है।समकोण त्रिभुज में आधार के साथ लम्ब 90^0 का कोण बनाता है।

प्रयास कीजिए –

1) समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई अन्य दोनों भुजाओं की लम्बाई के योग से ....होती है । (कम / ज्यादा)

2) समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा...............है । (लम्ब / कर्ण)

महर्षि बौधायन –

बौधायन भारत के प्राचीन गणितज्ञ और शुल्बसूत्र तथा श्रौतसूत्र के रचियता थे । समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित पाइथागोरस प्रमेय सबसे पहले महर्षि बौधायन की देन है ।

पाइथागोरस (540 ई. पूर्व) से 460 वर्ष पूर्व बौधायन (1000 ई. पूर्व) उपर्युक्त सिद्धान्त का पूर्णतया प्रतिपादन कर चुके थे। बौधायन का यह निम्नलिखित सूत्र है।

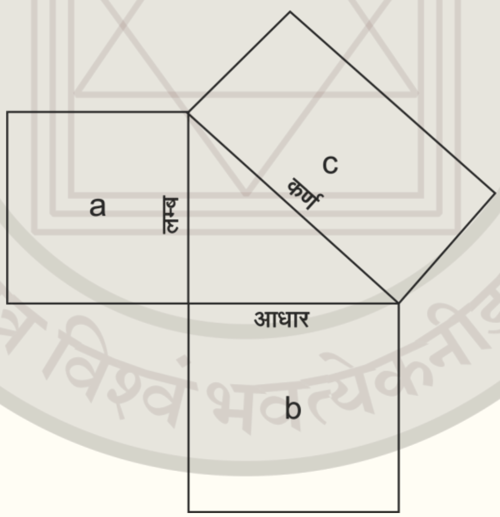
सूत्र – **दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी**

च यत्पृथग्भूते कुरुतस्य्दुभयं करोति।

(बौधायन शुल्बसूत्र 1.48)

अर्थात् समकोण त्रिभुज के कर्ण पर कोई रस्सी तानी जाय तो उस बने वर्ग का क्षेत्रफल, ऊर्ध्व तथा क्षैतिज भुजा पर बने वर्ग के क्षेत्रफल योग के बराबर होता है।

बौधायन शुल्बसूत्र के अतिरिक्त उपर्युक्त प्रमेय का उल्लेख **मानव शुल्बसूत्र** 10.10 **एवं लीलावती गणित के अथ क्षेत्रव्यवहार** 2(अ) में भी मिलता है।



बौधायन प्रमेय –

समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाईयों के वर्गों का योग कर्ण की लम्बाई के वर्ग के बराबर होता है।

किसी समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बीच एक सम्बन्ध बनाने वाला प्रमेय है । इस प्रमेय को आमतौर पर एक समीकरण के रूप में निम्न तरीके से अभिव्यक्त किया ।

(कर्ण)^2 = (लम्ब)^2 + (आधार)^2

$$c^2 = a^2 + b^2$$

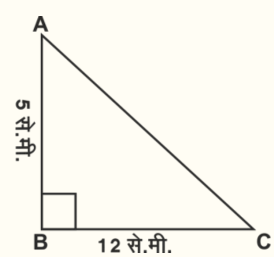
या

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

जहाँ c समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई है तथा a और b अन्य दो भुजाओं की लम्बाई है ।इस समकोण त्रिभुज की तीनों भुजा के सम्बन्ध की सहायता से किसी भी समकोण त्रिभुज की तीसरी भुजा की लम्बाई की गणना कर सकते हैं । यदि शेष दो भुजाओं की लम्बाई और उनकी माप दी गई है।परम्परा से इस प्रमेय की खोज का श्रेय यूनान के गणितज्ञ पाइथागोरस को दिया जाता है जबकि यह प्रमाण है कि प्रमेय की जानकारी उससे पूर्व तिथि की है। **भारत के प्राचीन ग्रन्थ बौधायन शुल्बसूत्र ये यह प्रमेय दिया हुआ है** और भी कई प्रमाण हैं, बेबीलोन के गणितज्ञ भी इस सूत्र के सिद्धान्त को जानते हैं। इसे **बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय** भी कहते हैं ।

आइए , उदाहरणों के माध्यम से प्रश्नों को हल करना सीखें।

उदाहरण :त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है यदि लम्ब 5 से.मी. हो और आधार 12 से.मी. है तो त्रिभुज कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।



हल: बायीं तरफ आकृति से चूँकि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है इसलिए बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय से

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

या $(AC)^2 = (5)^2 + (12)^2$

या $(AC)^2 = 25 + 144$

या $(AC)^2 = 169$

या $AC = \sqrt{169}$

$AC = 13$ से.मी.

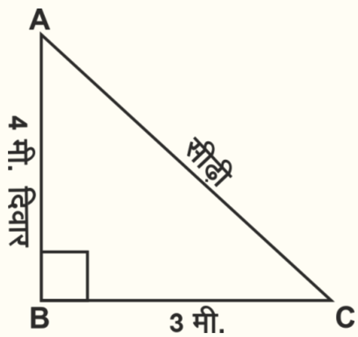
यहाँ AC = 13 से.मी.प्राप्त हुआ अर्थात् दिये गये त्रिभुज ABC का कर्ण की माप 13 से.मी. है।

उदाहरण :एक सीढ़ी की एक दीवार से इस प्रकार लगाकर रखा है कि उसका आधार दीवार से 3 मी. की दूरी पर रहता है और उसका शीर्ष जमीन से 4 मी. की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की पर लगा है। सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना AC सीढ़ी है और AB दीवार है। जिसमें खिड़की A है।

यहाँ आधार BC = 3 मी. और लम्ब AB = 4 मी. है।

तब, बौधायन प्रमेय से -



$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

या $(AC)^2 = (4)^2 + (3)^2$

या $(AC)^2 = 16 + 9$

या $(AC)^2 = 25$

या $AC = \sqrt{25} = 5$ मी.

अत: सीढ़ी की लम्बाई 5 मी. है ।

उदाहरण : यदि किसी समकोण त्रिभुज मे कर्ण की लम्बाई 13 से.मी. एवं लम्ब 5 से.मी. है तो आधार की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है- समकोण त्रिभुज में कर्ण = 13 से.मी., लम्ब = 5 से.मी. है ।

तब, बौधायन प्रमेय से -

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

$(13)^2 = (5)^2 + (\text{आधार})^2$

या $169 = 25 + (\text{आधार})^2$

या $169 - 25 = (\text{आधार})^2$

या $(\text{आधार})^2 = 144$

या $\text{आधार} = \sqrt{144} = 12$

अत: आधार की लम्बाई 12 से.मी. है ।

उदाहरण : लीलावती गणित में दिये गये, बौधायन प्रमेय पर आधारित निम्न उदाहरण प्रश्न को हल करें।

कोटिश्चतुष्टयं यत्र दोस्त्रयं तत्र का श्रुतिः।

कोटिं दोःकर्णतः कोटिश्रुतिभ्यां च भुजं वद।।

समकोण त्रिभुज के भुज एवं कोटि के ज्ञान से कर्ण का मान बताओ। यदि कोटि (लम्ब) = 4 हस्त प्रमाण तथा भुज (आधार) = 3 हस्त प्रमाण हो।(उक्त प्रश्न में माप की किसी भी इकाई को रख सकते हैं।)

हल : विद्यार्थी स्वयं हल करें।

करो और सीखो –

1) बौधायन प्रमेय -

(कर्ण)^2 = (.........)^2 + (आधार)^2

2) समकोण त्रिभुज में कर्ण की माप लम्ब एवं आधार की माप से....................होती है । (कम / अधिक)

प्रश्नावली 7.1

1. निम्न में सही-विकल्प का चयन करें।

(अ) एक समकोण त्रिभुज में यदि समकोण बनाने वाली एक भुजा 6 और कर्ण 10 तो अन्य भुजा की लम्बाई क्या होगी ?

I) 8 II) 10 III) 12 IV) 6

(ब) पाइथागोरस प्रमेय केवल _________ त्रिभुजों पर लागू किया जा सकता है।

I) समद्विबाहु II) समकोण

III) समद्विबाहु एवं समकोण IV) समबाहु

(स) समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा .... होती है।

I) कर्ण II) आधार III) लम्ब IV) इनमें से कोई नहीं

2. बौधायन प्रमेय का कथन लिखिए।

3. निम्न रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(समकोण, कर्ण, $(\text{आधार})^2$, आधार, बराबर, लम्ब)

अ) समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा को............ कहते हैं। जो समकोण त्रिभुज की सबसे लम्बी भुजा होती है।

ब) समकोण त्रिभुज में कर्ण को छोड़कर अन्य दो भुजा लम्ब एवं आधार मिलकर कितने अंश का कोण.........बनाते हैं ?

स)	बौधायन प्रमेय –

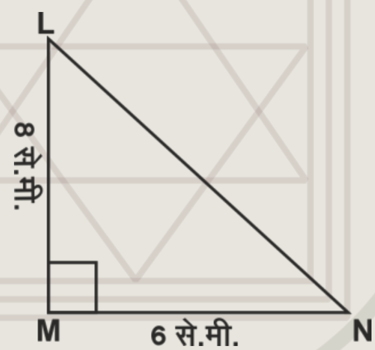
$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + \ldots\ldots\ldots$

द)	समकोण के संलग्न क्षैतिज भुजा को..............कहा जाता है ।

य)	समकोण के संलग्न ऊर्ध्वाधर भुजा को...............कहा जाता है ।

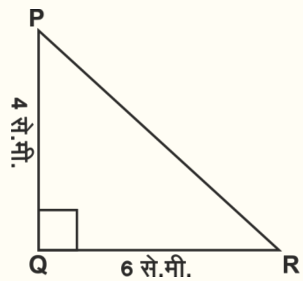
प)	समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा का वर्ग शेष दोनों भुजा के वर्गों के योग के.............होता है ।

4. त्रिभुज LMN में कोण M समकोण है । यदि लम्ब (LM) = 8 से.मी. व आधार (MN) = 6 से.मी. हो तो कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।



5. किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण की लम्बाई 25 मी. एवं लम्ब की लम्बाई 24 मी. है । तो आधार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

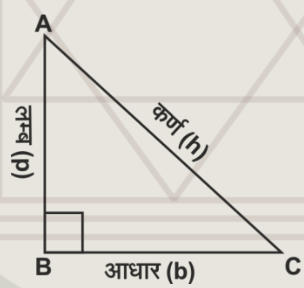
6. त्रिभुज PQR में को $\angle Q$ समकोण है । यदि PQ = 4 cm एवं QR = 6 cm है तब $(PR)^2$ का मान ज्ञात कीजिए ।



7. एक समकोण ABC में, भुजा AB=12 मीटर तथा BC=5 मीटर और कोण ABC=90°है तब AC भुजा का माप ज्ञात कीजिये।

हमने सीखा –

1) **समकोण त्रिभुज** – वह त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 का अर्थात् (समकोण) हो **समकोण त्रिभुज** कहलाता है ।



2) समकोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** कहलाती है। यह समकोण त्रिभुज की सबसे लम्बी भुजा होता है । इसे "h" से दर्शाते हैं ।

3) समकोण त्रिभुज के न्यूनकोण के संलग्न क्षैतिज भुजा **आधार** कहलाती है। इसे "b"से दर्शाते हैं ।

4) समकोण त्रिभुज के न्युनकोण के संलग्न ऊर्ध्वाधर भुजा **लम्ब** कहलाती है इसे “p”से दर्शाते हैं।

5) समकोण त्रिभुज की भुजाओं का एक विशेष सम्बन्ध को बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय के नाम से जानते हैं।

6) **बौधायन प्रमेय** – समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाइयों के वर्गों का योग, कर्ण की लम्बाई के वर्ग के बराबर होता है।

दूसरे शब्दों में-

कर्ण की लम्बाई का वर्ग = लम्ब की लम्बाई का वर्ग + आधार की लम्बाई का वर्ग

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

अध्याय 8

हीरोन का सूत्र

मेरे प्रिय बटुकों ! हम जानते हैं कि एक तल में तीन रेखाओं से घिरी आकृति **त्रिभुज** कहलाती है । यह एक बंद आकृति से घिरा हुआ भाग समतल का **क्षेत्र** कहलाता है । पिछली कक्षाओं मे हमने कई समतल आकृतियों (त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त इत्यादि) का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखा है । इस अध्याय में हम हीरोन के सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

आइए , पूर्व में किये गये अभ्यास को दोहराते हैं ।

त्रिभुज का क्षेत्रफल –

वैदिक वाङ्मय में ऋग्वेद (1/105/17) मन्त्र में 'त्रित' शब्द के रूप में त्रिभुजाकार आकृति उल्लेखित है एवं अथर्ववेद के एक रोचक मन्त्र से किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल का विवरण प्राप्त होता है। मन्त्र निम्नलिखित है ।

यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं शयानः।

वत्स कामदुघो विराजः स गुहा चक्रे तन्वः पराचैः।

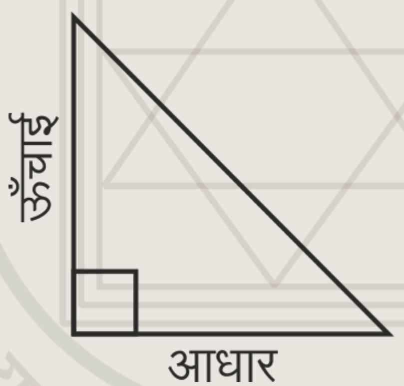
(अथर्ववेद 8/9/2)

अर्थात् उस क्षेत्र में जो त्रिभुजाकार आकृतियों के अन्तर्गत सन्निहित क्षेत्र की समस्त विशेषताएँ विद्यमान है। इसका तात्पर्य यह है कि त्रिभुज के अन्तर्गत क्षेत्रफल विद्यमान रहता है तथा रेखा गणित का आधार क्षेत्र का गुण अर्थात् क्षेत्रफल पर आधारित होता है

त्रिभुजाकार Δ आकृति द्वारा घरे गये क्षेत्र को **त्रिभुज का क्षेत्रफल** कहते हैं ।

ध्यान रहे : त्रिभुज के आधार एवं ऊँचाई का मात्रक मीटर (m.)या सेण्टीमीटर(c.m.) इत्यादि लिखा लिया जाता है किसी समतल आकृति त्रिभुज के क्षेत्रफल को मापने का मात्रक वर्ग मीटर (m^2)या वर्ग सेण्टीमीटर(cm^2) इत्यादि लिया जाता है

समकोण त्रिभुज -



$$\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{ऊँचाई}$$

उपर्युक्त सूत्र के द्वारा हम समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात सकते है, या जब त्रिभुज का आधार एवं ऊँचाई दी हो तब यह सूत्र प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण: त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि ऊँचाई 4 से.मी. एवं आधार 5 से.मी. हो।

हल : दिया है आधार = 5 से.मी., ऊँचाई = 4 से.मी.

हम जानते हैं,

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ **आधार** $\times$ **ऊँचाई**

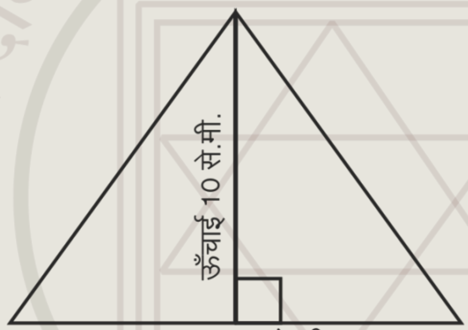
$= \frac{1}{2} \times 5$ से.मी. $\times$ 4 से.मी.

$= \frac{20}{2}$

$= 10$ से.मी.^{2}

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल 10 से.मी.^{2} है ।

उदाहरण : निम्न आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करें ।



हल: दी गई आकृति एक त्रिभुजाकार है ।

तब जिसका आधार 5 से.मी. व ऊँचाई 10 से.मी. है ।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ **आधार** $\times$ **ऊँचाई**

$= \frac{1}{2} \times 10$ से. मी.$\times$ 5 से.मी.

$= \frac{50}{2}$

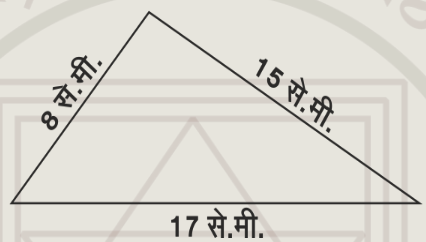
$= 25$ से.मी.^{2}

करो और सीखो –

ऐसा त्रिभुज जिसका आधार 4 से.मी. एवं ऊँचाई 6 से.मी. हो तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा ।

हीरोन का सूत्र –

प्रत्यूष एक त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहता है , जिसकी तीनों भुजाएँ 8 से.मी. ,15 से.मी. एवं 17 से.मी. है ।



आप इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे ? निश्चित ही आप सूत्र-I $\left(\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2} \times \text{ आधार } \times \text{ ऊँचाई}\right)$का प्रयोग कर क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहेंगे तो आपको इसकी ऊँचाई ज्ञात करनी होगी । परन्तु हम इसकी ऊँचाई नहीं ज्ञात करते हैं क्योंकि यह एक **विषमबाहु** त्रिभुज है ।

प्रत्यूष और उसके सहपाठी , गुरुजी के पास जाते है और समस्या को बताते हैं ।

गुरुजी – जब त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई का माप दिया हो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल हम हीरोन के सूत्र से ज्ञात करते हैं । हीरोन का सूत्र, ब्रह्मगुप्त के सूत्र की एक विशेष स्थिति है। किसी चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ a, b, c, तथा d हो तो जिसका क्षेत्रफल सूत्र-

स्थूलफलम् त्रिचतुर्भुज बाहु प्रतिबाहु योग दल घातः।

भुज योग अर्ध चतुष्टय भुज ऊन घातात् पदम् सूक्ष्मम् ॥

(ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त,गणिताध्याय, 12.21)

$$\sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c))(s-d)}$$

हीरोन का सूत्र, ब्रह्मगुप्त के सूत्र की एक विशेष स्थिति है जब $d = 0$. क्योंकि एक भुजा के शून्य हो जाने पर चतुर्भुज, त्रिभुज बन जाता है और प्रत्येक त्रिभुज 'चक्रीय' है। (सभी त्रिभुजों के तीनों शीर्षों से होकर वृत्त खींचा जा सकता है।)

सर्वदोर्युतिदलं चतु:स्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्वघात्।

मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके।।

(लीलावती गणित क्षेत्रव्यवहारः पृ. 217)

अर्थात् त्रिभुज और चतुर्भुज के सभी भुजाओं के योगार्ध को क्रमशः तीन और चार जगहों (भुजाओं) में रखकर उनमें क्रम से प्रत्येक भुज को घटाकर जो शेष बचे उन सभी के गुणनफल का मूल लेने से त्रिभुज और चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः a, b व c हो तो-

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$

यहाँ s = अर्द्धपरिमाप है तथा a, b एवं c त्रिभुज की भुजाएँ है ।

जहाँ $s = \frac{a+b+C}{2} = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{2} =$ **त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप**

गुरुजी द्वारा सूत्र बताने पर प्रत्यूष क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयास करता है ।

उदाहरण: त्रिभुजाकार पार्क की भुजाएँ 8 से.मी., 15 से.मी., 17 से.मी. है तब क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल: दिया है-त्रिभुज की भुजाएँ a= 8 से.मी., b=15 से.मी., c=17 से.मी.

त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (s) = $\frac{a+b+C}{2} = \frac{8+15+17}{2} = \frac{40}{2}$ = 20 से.मी.

अब (s – a) = (20 – 8) = 12 cm

(s – b) = (20 – 15) = 5 cm

(s – c) = (20 – 17) = 3 cm

त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल = $\sqrt{\boldsymbol{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}}$

= $\sqrt{20 \times 12 \times 5 \times 3}$

= $\sqrt{100 \times 36}$

= $\sqrt{3600}$

या = $\sqrt{100} \times \sqrt{36}$

= 10×6

= 60 वर्ग से.मी.

उदाहरण : एक त्रिभुजाकार मैदान की भुजाएँ क्रमश: 7 मी., 8 मी.एवं 9 मी. हैं । मैदान का अर्द्धपरिमाप 12 मी. है । तब त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : दिया है त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप S = 12 मी.

त्रिभुज की भुजाएँ माना a = 7 मी. , b = 8 मी., c = 9 मी.

त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल $= \sqrt{\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}$

$= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$

$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$

$= \sqrt{720}$ वर्ग मी.

$= \sqrt{12 \times 12 \times 5}$ वर्ग मी.

$= 12\sqrt{5}$ वर्ग मी.

उदाहरण : त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (s) ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 से.मी., 12 से.मी. व 3 से.मी. हों ।

हल : दिया है- त्रिभुज का भुजाएँ a = 5 से.मी., b = 12 से.मी., c = 3से.मी.

त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (s) $= \frac{\boldsymbol{a+b+c}}{\boldsymbol{2}}$

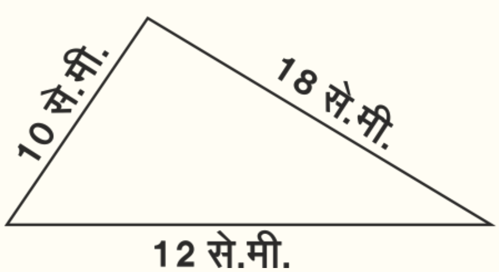
$= \frac{5+12+3}{2}$ से.मी.

$= \frac{20}{2}$ से.मी.

$= 10$ से.मी.

अत: त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप 10 से.मी. है ।

उदाहरण – निम्न आकृति का अर्द्धपरिमाप ज्ञात कीजिए ।



हल : दी गई आकृति एक त्रिभुजाकार है जिसकी भुजाएँ 12 मी., 18 मी. व 10 मी. हैं तब

हम जानते हैं-

त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (S) $= \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{12+18+10}{2}$ मीटर

$= \frac{40}{2}$ मीटर

$= 20$ मीटर

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प चयन करें।

(अ) हीरोन सूत्र में, त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ a,b तथा c है-

(I) त्रिभुज की भुजाएँ (II) त्रिभुज का परिमाप

(III) त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (IV) त्रिभुज का क्षेत्रफल

(ब) हीरोन का सूत्र है –

(I) $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ (II) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(III) $\frac{-a+b+c}{2}$ (IV) इनमें से कोई नहीं।

(स) एक त्रिभुज की भुजाएँ 40 m, 24m और 32m हैं, तो इस त्रिभुज का परिमाप है –

(I) 45m (II) 96m (III) 24m (IV) 32m

(द) एक त्रिभुज की भुजाएँ 40m, 24m और 32m की हैं, तो इस त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है -

(I) 48m (II) 96m (III) 24m (IV) 32m

(प) एक त्रिभुज की भुजाएँ 15m, 11m और 6m हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है –

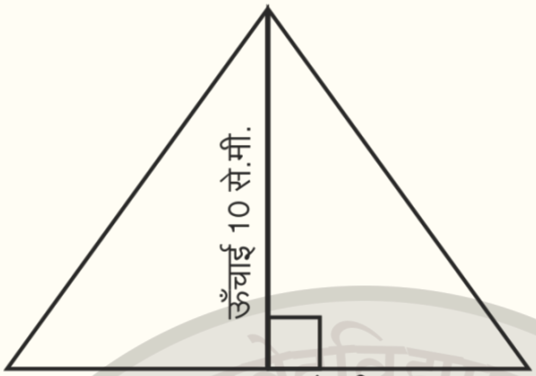
(I) $10\sqrt{2}\ m^2$ (II) $20\sqrt{2}\ m^2$ (III) $30\sqrt{2}\ m^2$ (IV) $40\sqrt{2}\ m^2$

2. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें- $\left(\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}\right)$

अ) एक त्रिभुज का आधार 20 से.मी. तथा ऊँचाई 3 से.मी. है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ब) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसका आधार 4 से.मी. एवं ऊँचाई 5 से.मी. हो।

स)	निम्न आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



3.	त्रिभुजाकार आकृतियों का अर्द्धपरिमाप ज्ञात कीजिए ।

$$\left(\text{जहाँ अर्द्धपरिमाप } \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

4.	हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । हीरोन का सूत्र -

$$\left(\text{जहाँ त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}\right)$$

अ)	त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका अर्द्धपरिमाप 16 से.मी. है एवं भुजाएँ 8 से.मी., 11 से.मी. एवं 13 से.मी. हो ।

ब)	उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 6 से.मी., 10 से.मी. व 14 से.मी. है एवं त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप 15 से.मी. हो ।

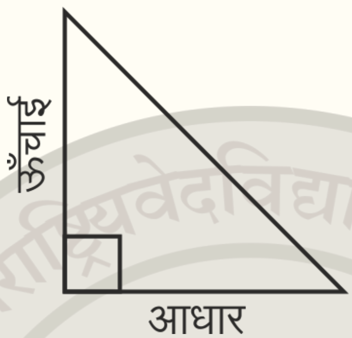
द) एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तीनों भुजाएँ 10 से.मी. हो एवं त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप 15 से.मी. हो ।

य) एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान दो भुजाएँ 8 से.मी. है तथा तीसरी भुजा 4 से.मी. है ।

हमने सीखा –

1) यदि किसी त्रिभुज कि आधार एवं ऊँचाई दिया हो तो तब त्रिभुज का क्षेत्रफल-

समकोण त्रिभुज -



त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

2) यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दी हो तब हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते है । यदि त्रिभुज की भुजाएँ a , b और c हो तो ।

हीरोन के सूत्र द्वारा –

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\boldsymbol{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}}$

यहाँ s = अर्द्धपरिमाप है और a, b एवं c त्रिभुज की भुजाएँ है ।

जहाँ $\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{a+b+C}}{\mathbf{2}} = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{\mathbf{2}} =$ **त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप** है ।

अध्याय 9

घन और घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

प्यारे वेद पाठियों ! हमने पिछली कक्षा में त्रिभुज , चतुर्भुज एवं आयत जैसी समतल आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात किये हैं। इस अध्याय में ठोस आकृतियों में घन, घनाभ **जैसे** – ईंट, माचिस की डिब्बी, चॉक का डिब्बा, सन्दूक (पेटी) आदि का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे ।

ईट

माचिस

चॉक बाक्स

पेटी

उपर्युक्त बताइये गई सभी वस्तुओं का निश्चित आकार तथा आयतन होता है ये सभी ठोस आकृतियाँ है (त्रिविमिय आकृतियाँ) है अर्थात् इनकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई होती है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल - किसी ठोस आकृतियों के पृष्ठीय का क्षेत्रफल से तात्पर्य **समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफल** का योग से हैं ।

आयतन - किन्हीं ठोस आकृतियाँ के द्वारा जितना स्थान घेरा जाता है। वह उसका **आयतन** कहलाता है।

ध्यान रहे - क्षेत्रफल को वर्ग इकाई और आयतन को घन इकाई में मापा जाता है ।

❖ बटुकों ! अपने गुरुजी से चर्चा करें क्षेत्रफल को वर्ग इकाई तथा आयतन को

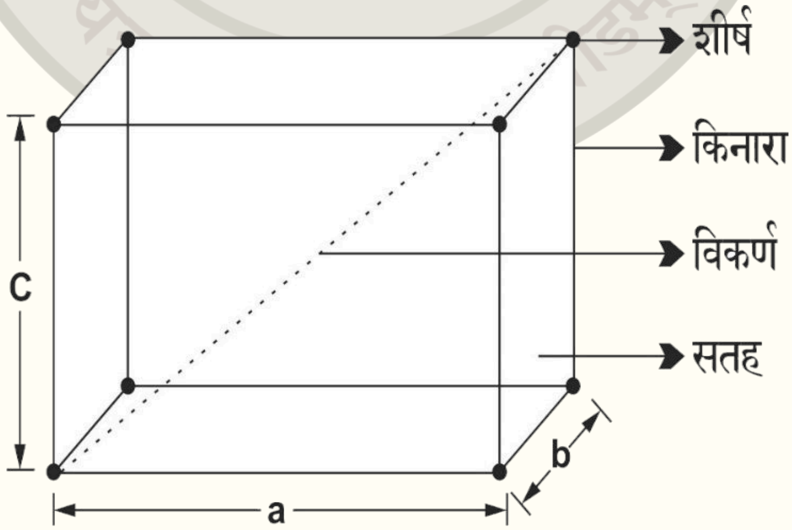
घन इकाई में क्यों मापते हैं ?

घनाभ (आयताकार ठोस) -

आपने माचिस की डिब्बी, ईंट, पुस्तक आदि आयताकार ठोस देखे होंगे इनमें कितने आयताकार समतल सतहें होती है । इस प्रकार के ठोस में तीन जोड़ी-जोड़ी समान्तर (समान) सतहें होती है ? सभी सतहें आयताकार होती है । इस ठोस को घनाभ कहते हैं । प्रत्येक जोड़ी सतह भिन्न होती है । घनाभ में लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई होती है अर्थात् यह एक ठोस आकृति है ।

घनाभ के गुणधर्म –

1) इसकी सभी सतहें आयताकार है ।
2) घनाभ के 8 शीर्ष (कोने), 12 कोने (दो शीर्षों को जोड़ने वाली रेखा) और 6 सतहें (यानि कि 3 जोड़ी) एवं 4 विकर्ण होते हैं ।
3) प्रत्येक सतह के सामने सतह के समान्तर होती है ।



घनाभ में आमने-सामने की सतहे परस्पर समान होती है। घनाभ का पृष्ठीय ज्ञात करने के लिए इसके छ: फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा ।

1) **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल** = 2 [ab + bc + ca] **वर्ग इकाई**

2) **घनाभ का विकर्ण** = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

जहाँ, a = लम्बाई , b = चौड़ाई c = ऊँचाई है।

उदाहरणार्थ प्रश्न –

उदाहरण 1 : एक कमरे की लम्बाई 3 मी. , चौड़ाई 2 मी. तथा ऊँचाई 4 मी. है तो कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल : कमरे की लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 4 मी.

कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल =

= **2 [लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई]**

= 2 [3 × 2 + 2 × 4 + 4 × 3]

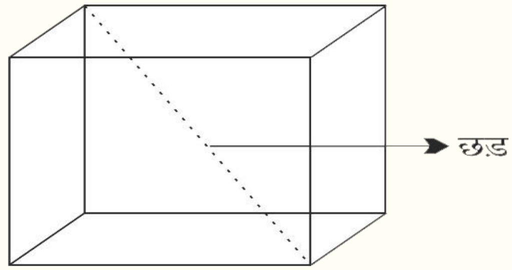
= 2 [6 + 8 + 12]

= 2 [26]

= 52 वर्ग मीटर

अत: कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 52 वर्ग मीटर हैं ।

उदाहरण 2 : 3 से.मी., 2 से.मी. एवं 1 से.मी. ऊँचे बॉक्स में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ (पेन्सिल) रखी जा सकती है ।



हल : बॉक्स की लम्बाई = 3 से.मी., चौड़ाई = 2 से.मी., ऊँचाई = 1 से.मी.

बॉक्स में अधिक से अधिक रखी जाने वाली छड़ (पेन्सिल) बॉक्स के विकर्ण के बराबर है ।

अत: छड़ की लम्बाई

बॉक्स (घनाभ) का विकर्ण $= \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}$

$= \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{9 + 4 + 1}$

$= \sqrt{14}$ से.मी.

उदाहरण 3 : यदि एक घनाभाकार सन्दूक की लम्बाई 2 मी., चौड़ाई 2 मी. एवं ऊँचाई 1 मी. है तो घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : घनाभ की लम्बाई = 2 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 1 मी.

हम जानते हैं,

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= 2 [लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई]

$= 2 [2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2]$

$= \quad 2 [4 + 2 + 2]$

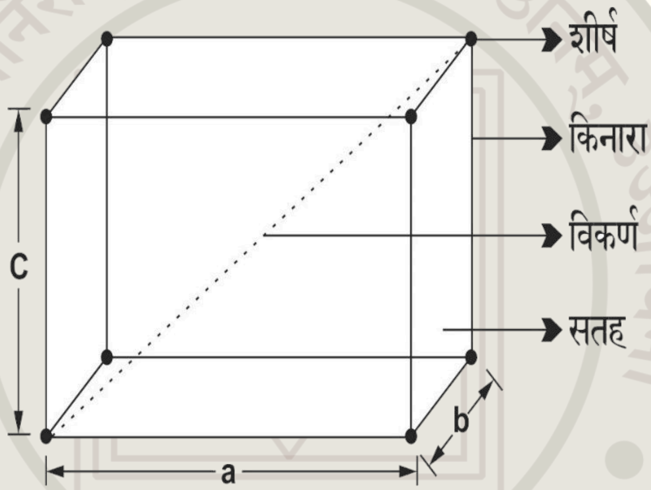
$= \quad 2 [8]$

= 16 वर्ग मी.

अत: सन्दूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल 16 वर्ग मी. है ।

घन –

यहाँ a = लम्बाई, b = चौड़ाई व c = ऊँचाई है ।



घनाभ में लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई यदि आपस में बराबर है तो वह **घन** कहलाता है ।

अर्थात्

लम्बाई (a) = चौड़ाई(b) = ऊँचाई(c) = a (एक भुजा)

इस स्थिति में सभी सतहें आपस में बराबर और वर्ग होती है एक भुजा (a) **घन की एक कोर** कहलाती है ।

घन के विकर्ण की लम्बाई

$$\text{घन का विकर्ण} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2}$$

$$= a\sqrt{3}$$

घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$ इकाई

या **= भुजा $\sqrt{3}$ इकाई**

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

घन की छ: सतहें (सभी सतहें) वर्गाकार होती है अत: लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई आपस में बराबर होंगे। अर्थात्

a = b = c = a (एक भुजा)

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × एक पृष्ठ का क्षेत्रफल

= 6 × (भुजा × भुजा)

= 6 (भुजा^{2})

= 6 $(a)^2$ वर्ग इकाई

उदाहरण : एक घन की एक कोर (भुजा) 2 मी. है। घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है - घन की एक कोर भुजा = 2 मी.

अत: **घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 6\ (\text{भुजा})^2$

$= 6\ (2)^2$

$= 6\ (4)$

$= 24$ वर्ग मी.

उदाहरण : एक घन की कोर 2 से.मी. है तो घन का विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है - घन की कोर (भुजा) a = 2 से.मी.

अत: **घन का विकर्ण** $= a\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$ से.मी.

अत: घन के विकर्ण की लम्बाई $2\sqrt{3}$ से.मी.है

उदाहरण : एक घन का विकर्ण $12\sqrt{3}$ से.मी. है तो घन की कोर ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है - घन का विकर्ण $= 12\sqrt{3}$

तब हम जानते हैं,

घन का विकर्ण $= a\sqrt{3}$

$12\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$a = 12$ से.मी.

अत: घन की कोर 12 से.मी.है

प्रश्नावली 9.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) एक घन जिसका किनारा a है घन का कुल पृष्ठीय क्षैत्रफल = ... वर्ग इकाई है-

(I) a^2 (II) $4a^2$ (III) $6a^2$ (IV) a^3

(ब) एक घन जिसका किनारा a है तो घन का विकर्ण = ...

(I) a$\sqrt{3}$ (II) $a^2\sqrt{3}$ (III) $\frac{\sqrt{3}}{a}$ (IV) $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(स) एक घनाभ जिसकी लम्बाई ,चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमश: a,b एवं c है तब घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = ... वर्ग इकाई है-

(I) 2 [ab + bc + ca] (II) 2 [ab + bb + ca]

(III) 2 [a + b + c] (IV) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(द) एक घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमश: a, b एवं c है तब,

घनाभ का विकर्ण = ...

(I) $\sqrt{a^2 + c^2}$ (II) $\sqrt{a^2 + b^2}$

(III) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

- **घनाभ –**

2. एक घनाभकार डिब्बे की लम्बाई 3 मी., चौड़ाई 2 मी. एवं ऊँचाई 3 मी. है तो डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

3. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई क्रमश: 2 से.मी., 1 से.मी. और 4 से.मी. है घनाभ का पृष्ठीय ज्ञात कीजिए ?

4. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 5 मी., 4 मी. और 3 मी. है तो कमरे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ? कमरे का कितने अधिक लम्बे बांस को (घनाभ का विकर्ण) रखा जा सकता है ?

5. घनाभ का विकर्ण ज्ञात कीजिए यदि लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमश: 1 से.मी., 2 से.मी. व 3 से.मी. है ?

- **घन –**

6. एक घनाकार चॉक के डिब्बे कि लम्बाई 4 से.मी. है तो चॉक के डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

7. यदि एक घन की कोर 3 मी. है तो घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं घन का विकर्ण ज्ञात कीजिए ?

8. एक घन का विकर्ण $10\sqrt{3}$ से.मी. है तो घन के कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए ?

9. एक घनाकार टंकी की लम्बाई 2 से.मी. है तो घनाकार टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

घन और घनाभ का आयतन –

बटुकों ! हम जानते हैं कि प्रत्येक ठोस वस्तु स्थान घेरती है, इस घेरे गये स्थान के माप को उस वस्तु का **आयतन** कहते हैं । यदि वस्तु खोखली है तो उसे द्रव (तरल पदार्थ) या हवा से भरा जा सकता है । यह द्रव उस वस्तु (बर्तन) के आकार का हो जाता है इस स्थिति में

बर्तन के अन्दर जितना द्रव भरा जाता है । वह उसकी **धारिता** कहलाती है।लीलावती गणित में घन एवं घनाभ के आयतन ज्ञात करने का सूत्र मिलता है।

क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात् ।

(लीलावती गणित अथ खातव्यवहार: पृ. 303)

अर्थात् कोई गहराई वाली चौकोर आकृति अर्थात् घन एवं घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिए आकृति के लम्बाई एवं चौड़ाई के गुणन से प्राप्त क्षेत्रफल को उस आकृति की ऊँचाई से गुणन करने पर आयतन प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में किसी घन एवं घनाभ लम्बाई चौड़ाई एवं ऊँचाई का परस्पर गुणन करने पर आयतन प्राप्त होता है।

किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अन्दर भरे जाने वाले द्रव का आयतन होता है । इसका मात्रक घन मात्रक है ।घन व घनाभ आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= a \times b \times c$

घनाभ का आयतन = abc घन इकाई

घन का आयतन –

चूँकि घन की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई बराबर होती है।

अत: घनाभ के आयतन में $a = b = c = a$ (समान भुजा)

अत: घन का आयतन $= a \times a \times a$

घन का आयतन = a^3 घन इकाई

आयतन सम्बन्धित इकाई –

आप दैनिक जीवन में पानी की टंकी के घन एवं घनाभ आकृति में कितना पानी है? यह सरलता से पता कर सकते हैं ।

1 लीटर = 1000 घन से.मी.

1000 लीटर = 1 घन मीटर = 1 किलो लीटर

1 घन से.मी. = 1000 घन मि.मी.

1 घन मीटर = 1000000 घन से.मी.

उदाहरणार्थ प्रश्न –

उदाहरण : एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 से.मी. × 12 से.मी. × 10 से.मी. है घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए ।

हल : **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

= 15 × 12 × 10 घन से.मी.

= 1800 घन से.मी. या 1800 $(\text{से. मी.})^3$

उदाहरण : एक घन की एक कोर 5 मी. है तो घन का आयतन ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है - एक भुजा (कोर) = 5 मी.

तब **घन का आयतन** = a^3

= 5^3 घन मी.

= 5 × 5 × 5 घन मी.

= 125 घन मी.

उदाहरण : एक घनाभाकार पानी की टंकी है जिसकी लम्बाई 600 से.मी., चौड़ाई 500 से.मी. एवं गहराई 200 से.मी. है। उसमें कितने लीटर पानी आ सकता है।

हल : दिया है - घनाभकार टंकी की लम्बाई = 600 से.मी.

चौड़ाई = 500 से.मी.

गहराई (ऊँचाई) = 200 से.मी.

टंकी (घनाभकार) का आयतन = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ गहराई(ऊँचाई)

$= 600 \times 500 \times 200$

$= 6{,}00{,}00{,}000$ घन से.मी.

1 लीटर = 1000 घन से.मी.

$\frac{1}{1000}$ लीटर = 1 घन से.मी.

$= \frac{6{,}00{,}00{,}000}{1{,}000}$ लीटर

$= 60{,}000$ लीटर

अत: टंकी में 60,000 लीटर पानी भरा जा सकता है।

उदाहरण : एक घनाकार टंकी की एक कोरे 2 मी. है तो घनकार टंकी में कितना पानी भरा जा सकता है।

हल : दिया है - घनाकार टंकी की एक भुजा (कोर) = 2 मी.

घनाकार टंकी का आयतन $= \boldsymbol{a^3}$

$= 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2$

$= 8$ घन मी.

हम जानते हैं , 1 घन मी. = 1000 लीटर

अन्त: 8 घन मी. = 8×1000 लीटर

= 8000 लीटर

अत: घनाकार टंकी में पानी 8000 लीटर पानी भरा जा सकता है ।

उदाहरण : एक टंकी का आयतन 8000 घन से.मी. है तो बताओ टंकी में कितना पानी भरा है।

हल : दिया है - टंकी का आयतन = 8000 घन से.मी.

1000 घन से.मी. = 1 लीटर

1 घन से.मी. = $\frac{1}{1000}$ लीटर

8000 घन से.मी. = $8000 \times \frac{1}{1000}$ लीटर = 8 लीटर

अत: टंकी 8 लीटर पानी भरा है ।

करो और सीखो– निम्न रिक्त-स्थानों को पूर्ण करें ।

1) 9000 घन से.मी. = ………………. लीटर

2) 5000 घन से.मी. =………………. लीटर

3) 3 घन मी. = ………………. लीटर

4) 4 घन मी. =………………. लीटर

प्रश्नावली 9.2

1. घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए ? जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई निम्नलिखित हैं।

   अ) लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 4 मी., ऊँचाई = 2 मी.

   ब) लम्बाई = 1 से.मी., चौड़ाई = 5 से.मी., ऊँचाई = 3 से.मी.

   स) लम्बाई = 4 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 3मी.

   द) लम्बाई = 4 से.मी., चौड़ाई = 5 से.मी., ऊँचाई = 6 से.मी.

2. घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा या एक कोर निम्नलिखित है ।

   अ) 4 मी. ब) 5 मी. स) 6 से.मी. द) 10 से.मी.

3. एक पानी की टंकी की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई क्रमश: 1 मी. × 2 मी. × 4 मी. हैं ।

   अ) टंकी में कितने घन मीटर पानी आएगा ?

   ब) टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ?

4. एक आयतकार पानी की टंकी 8 मी. × 7 मी. × 1 मी. तक भर जाती हैं ।

   अ) टंकी में कितने घन मीटर पानी आएगा ?

   ब) टंकी में कितने लीटर पानी आएगा ?

5. एक घनाकार टंकी की कोर 100 से.मी. है तो बताओ टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ?

6. एक घनाकार टंकी का आयतन 150 घन मीटर है तो बताइये घनाकार टंकी कितने लीटर पानी आएगा ?

7. अपने गुरुकूल की (घन एवं घनाकार आकृति) की पानी की टंकी का पैमाना लेकर आयतन ज्ञात करें साथ ज्ञात कीजिए कि पानी की टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ?

हमने सीखा –

1) यदि घनाभ की लम्बाई a, चौड़ाई b एवं ऊँचाई c हो तो

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 [ab + bc + ca]

घनाभ का आयतन = a x b x c

घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2) यदि घन की एक भुजा a हो तो

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

घन का आयतन = a^3

घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$

3) आयतन सम्बन्धित इकाई

1 लीटर = 1000 घन से.मी.

1000 लीटर = 1 घन मीटर = 1 किलोलीटर

1 घन से.मी. = 1000 घन मिली

1 घन मीटर = 1000000 घन से.मी.

अध्याय – 10

सांख्यिकी

प्रिय बटुकों ! हमने पिछली कक्षाओं मे आंकड़ों का प्रबंधन नामक अध्याय में सांख्यिकी का उपयोग किया - प्राचीन काल से भारतवर्ष में गणित की शाखा सांख्यिकी का उपयोग किया जा रहा है। जो निम्न उदाहरण द्वारा प्रकट होता है ।

महाभारत काल में दमयन्ती के स्वयंवर पर राजा नल के साथ जाते हुए , राजा ऋतुपर्ण का न्यायदर्श के आधार पर एक पेड़ पर लगे फल एवं पत्तों की सही संख्या बता देना। दैनिक जीवन में भी हम समाचार पत्रों, इलेक्ट्रानिक मीडिया चैनलों, पत्रिकाओं एवं अन्य संचार साधनों को अवलोकन करते हैं । वर्षा की स्थिति, खेती की पैदावर आदि तथ्यात्मक एवं तुलनात्मक जानकारी आंकड़ों के द्वारा मिलती है । हम जीवन भर किसी न किसी रूप में आंकड़ों का उपयोग करते रहते हैं । अत: हमारे लिए यह बहुत आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध कर सकें । अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से सम्बंधित अध्ययन गणित की इस शाखा में किया जाता है । जिसे **सांख्यिकी** कहा जाता है।

अत: इस अध्याय में हम आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण चित्रों द्वारा निरूपण माध्यम, माध्यिका एवं बहुलक का विस्तार से अध्ययन करने का प्रयास करेंगे ।

आंकड़ों का संग्रह –

आंकड़ों को संग्रह करने के आधार पर दो भागों में विभाजित किया जा सकता है ।

1) प्राथमिक आंकड़े

2) द्वितीयक आंकड़े

1) **प्राथमिक आंकड़े –**

ऐसे आंकड़े जिन्हें नवीन सिरे से पहली बार एकत्रित किया जाता है । तो उन्हें **प्राथमिक आंकड़े** कहते हैं । **जैसे** – गुरुकूल में वेद भूषण चतुर्थ वर्ष के बालकों का भार, लम्बाई इत्यादि ।

2) द्वितीयक आंकड़े –

वे आंकड़े जिनका पहले से सङ्कलन किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित (कई संस्थाओं द्वारा आंकड़े एकत्रित किये जाते परन्तु प्रकाशित नहीं होते हैं।) ऐसे सामग्री में फाइलों, रजिस्टरों, प्रलेखों आदि से प्राप्त की जाती है । इस स्थिति को **द्वितीयक आंकड़े** कहलाते हैं ।

आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण –

आंकड़ों को एकत्रित करने के बाद उनके प्रस्तुतिकरण को अर्थपूर्ण एवं सरलता से समझा जा सके इसलिए आंकड़ों को प्रस्तुतिकरण के आधार पर भी दो भागों में विभाजित किया जाता है ।

1) अवर्गीकृत आंकड़े 2) वर्गीकृत आंकड़े

1) अवर्गीकृत आंकड़े –

जब संकलित (एकत्रित) आंकड़े जिस रूप में एकत्रित किए जाए उसी रूप में प्रस्तुत कर दिये जाएँ ,तो उन्हें **अवर्गीकृत आंकड़े** कहा जाता है ।

जैसे : वेद भूषण चतुर्थ के 10 बटुकों के प्राप्तांक इस प्रकार हैं ।

9 , 7 ,8 , 6 , 5 , 7 , 7 , 8 , 9 , 8

2) **वर्गीकृत आंकड़े –**

जब संकलित आंकडों को सही रूप से समझने, अध्ययन करने के लिए सही प्रस्तुतिकरण आवश्यक होता है। इसके लिए प्राप्त आंकडों को शीर्षकों के अनुसार विभाजित कर प्रस्तुत किया जाए तो उन्हें **वर्गीकृत आंकड़े** कहा जाता है। यह प्रस्तुतिकरण वर्गीकरण कहलाता है ।

आवृत्ति –

आंकड़ों की जितनी बार पुनरावृत्ति होती है । उसे आंकड़ों की **आवृत्ति** कहते हैं आवृत्ति को सङ्केत ‘ f ’ से दर्शाते हैं ।

प्रेक्षण –

संकलित आंकड़ों के प्रत्येक मान को **प्रेक्षण** कहा जाता है ।

जैसे : 2, 4, 7, 7, 6, 9, 1, 5 में प्रेक्षणों की संख्या 8 है ।

करो और सीखो –

8, 4, 7, 1 और 3 में प्रेक्षणों की संख्या कितनी है ? (………)

परिसर –

प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मान के अन्तर को **परिसर** (परास) कहा जाता है।

परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान

उदाहरण : निम्न आंकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए ।

6 , 12 , 21 , 25 , 91 , 57

हल : न्यूनतम मान = 6, अधिकतम मान = 91

अतः **परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान**

= 91 – 6

= 85

आवृत्ति सारणी –

जब संकलित आंकड़ों को सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर उसे सारणी में प्रस्तुत करते हैं तो इस सारणी को **आवृत्ति सारणी** कहा जाता है ।

आवृत्ति सारणी के अध्ययन हेतु हम उससे सम्बन्धित कुछ आवश्यक परिभाषाओं का स्मरण करते हैं ।

टेली चिह्न (मिलान चिह्न) –

किन्हीं अवर्गीकृत आंकड़ों के सङ्कलन में आंकड़े की आवृत्ति चिह्नित करने के लिए संख्या के आगे उतनी ही खड़ी रेखाखण्ड खींच दी जाती हैं परन्तु यह सिर्फ चार रेखाओं तक ही किया जाता है,पांचवी बार संख्या के आने पर पूर्व की चार रेखाओं को तिर्यक् रेखा से काट

(卌) दिया जाता है । छठी बार में पुन: आगे तक खड़ी रेखा (卌 ।) खींच दी जाती है । ऐसा करने से मिलान चिह्न की गणना सरल हो जाती है।

जैसे : कुल 15 संकलित आंकड़े आरोही क्रम में दिये गये हैं ।

7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9

इनके मिलान चिह्न निम्नानुसार होंगे ।

उक्त आंकड़ों से सारणी निम्न विधि से तैयार करते हैं ।

1) प्रथम स्तम्भ में प्राप्त आंकड़े लिख लेते हैं जिसमें कोई अङ्क छूटना नहीं चाहिए|

2) दूसरे स्तम्भ में प्रत्येक आंकड़े की आवृत्ति के लिये खड़ी रेखा(मिलान चिह्न) खींचते जाते हैं ।

3) दूसरे स्तम्भ का कार्य पूर्ण होने पर तीसरे स्तम्भ में प्रत्येक अङ्क की आवृत्ति मिलान चिह्न की गिनती करके लिख देते हैं ।

संख्या	मिलान (टेली) चिह्न	आवृत्ति
7	।।।	3
8	卌	5
9	卌 ।।	7
		$\sum f = 15$

इस प्रकार से आवृत्ति सारणी को अवर्गीकृत आंकड़ों की **आवृत्ति सारणी** कहा जाता है ।

यदि आंकड़ों की संख्या बहुत अधिक हो तो आंकड़े को समूह में रखकर छोटा कर लेते हैं। इन समूहों को **वर्ग** (Classes) कहा जाता है और इनके माप को वर्ग अन्तराल का वर्गमाप कहा

जाता है प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को **निम्न वर्ग सीमा (Lower Class Limit)**और अधिकतम संख्या को **ऊपरी वर्ग सीमा (Upper Class Limit)** कहा जाता है।

आइए , उदाहरण के माध्यम से आंकड़ों को सारणी के रूप में प्रकट करना सीखते हैं ।

उदाहरण : एक पाठशाला में चारों वदों के बटुकों की संख्या 30 है प्रत्येक विद्यार्थी ने पाठशाला के आस-पास 50 पौधे लगाए, दो माह बाद लगाए गए पौधों में से पौधे की संख्या निम्न है । 15, 17, 18, 12, 34, 34, 35, 43, 18, 29, 23, 40, 35, 25, 26, 28, 13, 10, 3, 4, 3, 0, 14, 25, 25, 0, 2, 47, 19, 20

हल:

नये पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	आवृत्ति
0 – 10	ᚎ ।	6
10 – 20	ᚎ ।।।।	9
20 – 30	ᚎ ।।।	8
30 – 40	।।।।	4
40 – 50	।।	3
		$\sum f = 30$

आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण की इस विधि को **वर्गीकृत आवृत्ति सारणी** कहा जाता है। इस सारणी में सरलता देखकर हम आसानी से अनुमान लगा सकते हैं एवं निष्कर्ष निकाल सकते हैं ।

प्रश्नावली 10.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन करें-

(अ) मिलान चिह्न ~~llll~~ ~~llll~~ lll की बारम्बारता है-

(I) 5 (II) 10 (III) 13 (IV) 15

(ब) बारम्बारता 13 का टैलीमार्क है-

(I) lllllllllllll (II) ~~llll~~ lllllll (III) ~~llll~~ ~~llll~~ l (IV) ~~llll~~ ~~llll~~ lll

(स) 17,15,19,20,17,5,6,9,13,18,17,5,9,6,19,में 17 की बारम्बारता है-

(I) 3 (II) 5 (III) 15 (IV) 20

(द) 9,7,3,5,11,3,13,5,6,3,9,10,5,9,7,5 में 5 की बारम्बारता है-

(I) 1 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(प) वर्ग अन्तराल 15-25 की उच्च सीमा है-

(I) 15 (II) 25 (III) 40 (IV) 20

(फ) वर्ग अन्तराल 31-35 की निम्न सीमा है-

(I) 4 (II) 31 (III) 66 (IV) 35

(भ) आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के अन्तर को क्या कहा जाता है-

(I) परिसर (II) निम्नसीमा (III) ऊपरीसीमा (IV) बारम्बारता

(म) आँकड़ों 39, 25, 15, 13, 32, 16 का परिसर है-

(I) 32 (II) 26 (III) 25 (IV) 15

(य) आँकड़ों 11,32,51,49,49,6,14 के लिए परिसर है-

(I) 6 (II) 45 (III) 49 (IV) 51

2. प्राथमिक आंकड़े एवं द्वितीयक आंकड़े से आप क्या समझते हैं ?

3. आंकड़ों का संग्रह से आप क्या समझते हैं ?

4. आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण से आप क्या समझते हैं तथा इसे कितने भागों में विभाजित किया गया है ?

5. आवृत्ति किसे कहते हैं ?

6. प्रेक्षण को स्पष्ट कीजिए ?

7. परिसर = ... – ....

8. वेद भूषण चतुर्थ वर्ष के 20 छात्रों का भार किलोग्राम में निम्नलिखित है ?

17, 20, 32, 30, 25, 27, 28, 29, 18, 21, 23, 23, 24, 25, 25,

28, 18, 17, 30, 25 उपर्युक्त आंकड़े को सारणी बद्ध रूप में लिखिये ।

9. वेद पाठशाला में प्रवेश के पूर्व 10 विद्यार्थियों के 20 अङ्क के प्रश्नपत्र लिये गये जिसमें निम्न अङ्क प्राप्त हुए ।

15, 15, 15, 17, 17, 18, 18, 19, 17, 19

उपर्युक्त आंकड़ों को सारणी में प्रस्तुत कीजिए ।

10. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए दस-दस वर्ग के अन्तराल लेकर बारम्बारता सारणी का निर्माण कीजिए ।

13, 11, 8, 19, 0, 44, 27, 10, 8, 35, 13, 27, 31, 18, 42, 23,

19, 34, 19, 27, 43, 17, 7

सांख्यिकी आंकड़ों का चित्रीय निरूपण –

पिछली प्रश्नावली से हम सीख चुके हैं कि दिए गए आंकड़ों को सारणी बद्ध किस प्रकार किया जाता है, आंकड़ों को सचित्र प्रस्तुत कर हम इनके प्रस्तुतिकरण की ऐसी व्यवस्था करते हैं जो न सिर्फ देखने में अच्छी लगे वरन् अध्ययन में सुविधा भी प्रदान करे ।

आइये ,दण्ड रेखाचित्र के बारे अध्ययन करते हैं ।

1) **दण्ड रेखाचित्र** (Bar Graph) –

इसके द्वारा किसी एक निकाय से सम्बन्धित सांख्यिकी आंकड़ों को दण्ड रेखा चित्रों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ।

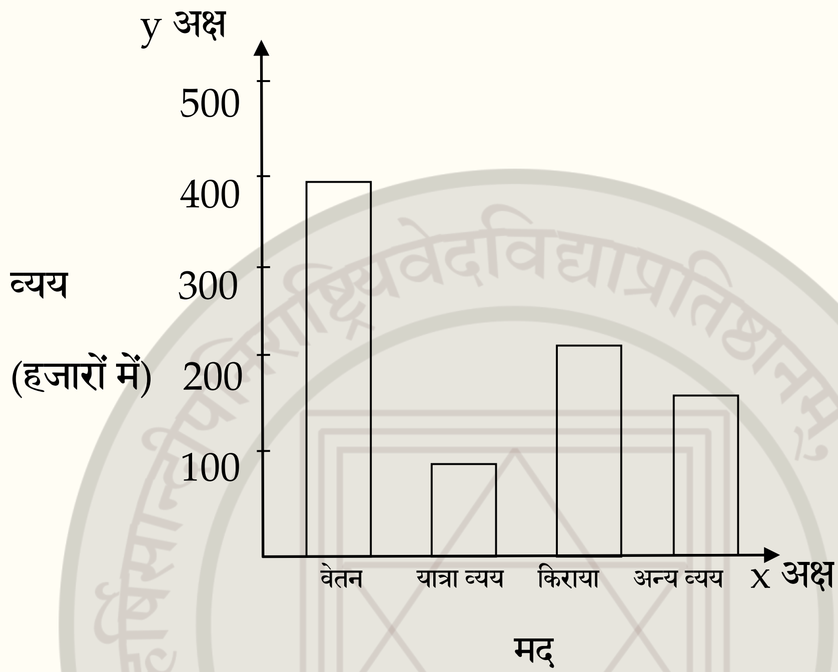
इस चित्रीय निरूपण में समान चौड़ाई के दण्ड 'x'अक्ष पर तथा ऊँचाई 'y'अक्ष के समान्तर दिए आंकड़ों के अनुसार खींचे जाते हैं ।

आइए , उदाहरण के माध्यम से दण्ड आलेख बनाना सीखते हैं ।

उदाहरण : एक व्यावसायिक प्रतिष्ठान में विभिन्न मदों में निम्नानुसार व्यय (खर्च) हुआ इसको दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइये ।

मद	व्यय (हजारो में)
वेतन	400
यात्रा व्यय	100
किराया	250
अन्य व्यय	200

हल : दण्ड रेखा चित्र (आलेख) में दण्ड की चौड़ाई तथा 'x' अक्ष पर दण्डों के बीच की दूरी से चित्र को स्पष्ट एवं समझने योग्य बनाते हैं ।



करो और सीखो – पाँच वेदपाठी विद्यार्थियों के द्वारा अप्रैल 2020 माह में कण्ठस्थ किये मन्त्रों की संख्या निम्नानुसार है । दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइये ।

वेदपाठी विद्यार्थी	कण्ठस्थ किये गये मन्त्रों की संख्या
दिवाकर	200
अविनाश	150
आशीष	250
गौतम	300
साकेत	100

आयत चित्र (Histograph)–

आयत चित्र वर्गीकृत एवं सतत् बारम्बारता (आवृत्ति) आंकड़ों का आयतीय निरूपण है। जिसमें वर्ग अन्तराल होते हैं तथा आयतों की ऊँचाई उन वर्गों की बारम्बारता (आवृत्ति) के अनुसार होती है ।

इसमें वर्ग अन्तराल को उचित पैमाना लेकर 'x' अक्ष पर तथा आवृत्ति को उचित पैमाना लेकर 'y' अक्ष पर अंकित किया जाता है ।

आइए , उदाहरण के द्वारा आयत चित्र बनाना सीखते हैं ।

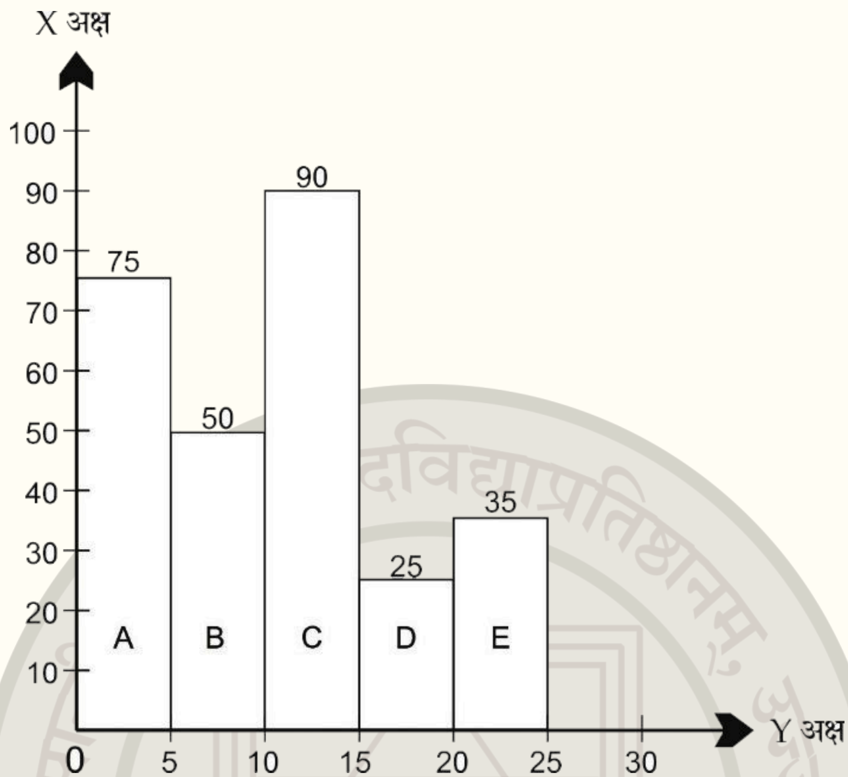
उदाहरण :एक पाठशाला में भिन्न-भिन्न के आयु के विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है ।

आवृत्ति सारणी का आयत चित्र बनाईये ?

वर्ष (आयु वर्षों में)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 - 25
विद्यार्थियों की संख्या	75	50	90	25	35

यहाँ आवृत्ति सारणी वर्गीकृत एवं सतत् है तथा वर्ग अन्तराल भी समान है अत:'x' अक्ष पर वर्ग अन्तराल अर्थात् आयु वर्षों में अंकित करेंगे ।

हल : अब चूँकि (0 – 5) वर्ग अन्तराल में विद्यार्थियों की संख्या 75 है अत: आवृत्ति सारणी के सामने 'x' अक्ष के समान्तर रेखा खींचकर वर्ग अन्तराल 0 – 5 पर आयत A की रचना करेंगे । इसी प्रक्रिया में आयत B, C, D,E का निर्माण करेंगे ।

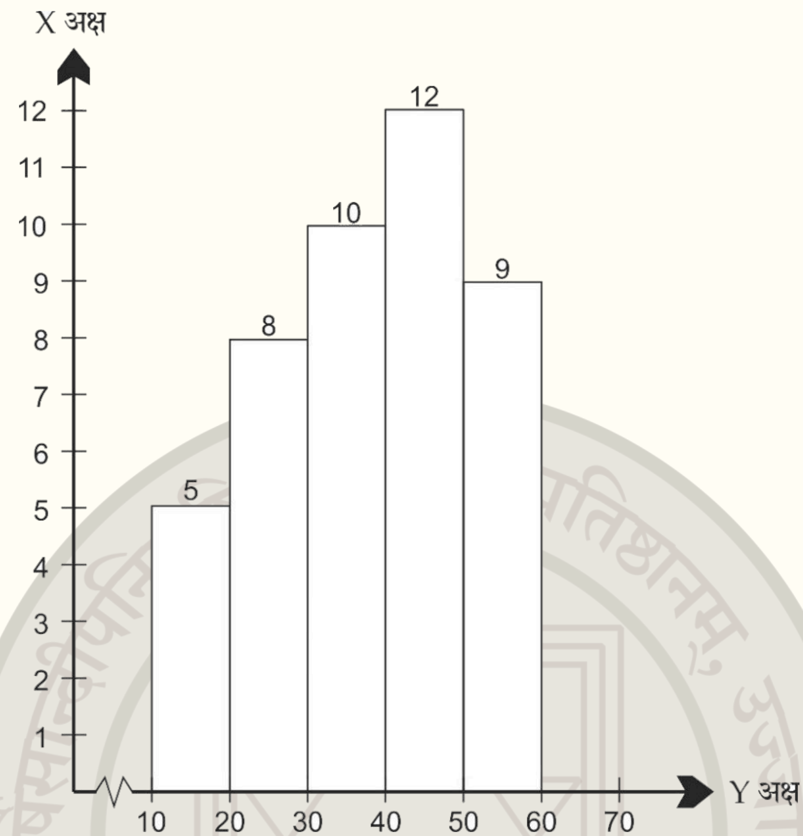


अत: यह स्पष्ट है इन सभी आयतों में 1 से.मी. और ऊँचाई बारम्बारता (आवृत्ति) के बराबर है इसलिए आयतों क्षेत्रफल बारम्बारता (आवृत्ति) के समानुपात होगा।

उदाहरण : आयत चित्र की सहायता से निम्न को दर्शाइये ।

वर्ग	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
संख्या	5	8	10	12	9

हल : यहाँ वर्गीकरण को ‘x’अक्ष पर पैमाना 10 इकाई = 1से.मी. तथा ‘y’ अक्ष पर पैमाना 1 इकाई = 0.5 से.मी. लेकर चित्र में दर्शाये अनुसार आयत बनाए जा सकते हैं ।



ध्यान रखें :- किंक का चिह्न तब प्रयोग किया जाता है,जब वर्ग अन्तराल शून्य से प्रारम्भ न हो ।

प्रश्नावली 10.2

प्र.1 एक परिवार ने जिसकी आय 20,000 रुपये है विभिन्न मदों के अन्तर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थी ।

मद	खर्च
किराना सामान	8
किराया	4
शिक्षा	5
दवाईयाँ	2
मनोरंजन	3

ऊपर दिए गये आंकड़ों का एक दण्ड आलेख बनाइए ।

प्र.2 एक पाठशाला में चारों वेदों के कुल 40 बटुक (प्रत्येक वेद के 10 विद्यार्थियों) अध्ययन करते है वेद परीक्षा में प्रावीण्य सूची में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है ।

वेद	प्रावीण्य सूची में आने वाले बटुक
ऋग्वेद	9
यजुर्वेद	8
सामवेद	9
अथर्ववेद	8

उपर्युक्त आंकड़ों का दण्ड आलेख बनाइए ।

प्र.3 एक राजधानी एक्सप्रेस रेलगाड़ी विभिन्न राज्यों में निम्न संख्या में स्टेशनों पर रूकती है ।

राज्य	रेलगाड़ी के रुकने की संख्या
म.प्र.	5
गुजरात	3
उत्तरप्रदेश	7
उत्तराखण्ड	2

उपर्युक्त आंकड़ों का दण्ड आलेख बनाइये ।

प्र.4 निम्न आवृत्ति सारणी का आयत चित्र बनाइए ।

वर्ग	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
आवृत्ति	5	10	20	15

प्र.5 निम्नलिखित आंकड़ों का आयत चित्र बनाइये ।

प्राप्तांक	0 - 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
छात्र संख्या	5	4	8	10

प्र.6 निम्नलिखित आवृत्ति सारणी के आयत चित्र बनाइए ।

वर्ग	0 - 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
आवृत्ति	15	10	5	20	25

हमने सीखा –

1) आंकड़े मुख्यत: दो प्रकार के होते हैं।

अ) प्राथमिक आंकड़े ब) द्वितीयक आंकड़े

2) प्राथमिक आंकड़ों का सङ्कलन (एकत्रित) करने की निम्न विधि है ।

अ) प्रत्यय व्यक्तिगत अन्वेषण ब) परोक्ष रूप से

3) परोक्ष आंकड़ों के सङ्कलन निम्न विधियाँ है ।

अ) अनुसूचियाँ एवं प्रश्नवाली के माध्यम से

द) संवादाताओं द्वारा सूचना प्राप्त से

4) आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण दो भागों में विभाजित किया जाता है ।

अ) अवर्गीकृत आंकड़े (जैसे : 8, 7, 5, 10, 2, 3,……)

ब) वर्गीकृत आंकड़े (जैसे : 0-10, 10-20 ,………….)

5) **परिसर** – प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों के अन्तर को **परिसर** कहा जाता है।

परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान

6) किसी वर्ग (**जैसे:** 0 – 10, 10 – 20, 20 – 30) के निम्नतम एवं उच्चतम मान उस वर्ग की क्रमश: निम्न एवं ऊपरी सीमाएँ कहलाती है ।

7) **आवृत्ति** – आंकड़ों की जितनी बार पुनरावृत्ति होती है उसे आंकड़ों की **आवृत्ति** कहते हैं। इसे 'f ' से दर्शाते हैं।

8) विभिन्न प्रकार के आंकड़ों को आलेखों एवं आयत चित्र द्वारा आलेखीय रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है ।

अध्याय 11

प्रायिकता

मेरे स्नेही बटुकों ! अभी तक हमने ऐसे प्रश्नों को हल किया हैं। जिनका कोई निश्चित उत्तर होता है ।

जैसे : 1) $2 + 2 = 4$

2) 100 का 3% $= 100 \times \frac{3}{100} = 3$

3) $15 \div 3 = 5$

त्रिज्या होने पर वृत्त की परिधि ($2\pi r$) तथा क्षेत्रफल (πr^2) ज्ञात करना आदि ।

कुछ प्रश्न ऐसे भी होते हैं, जिनका निश्चित उत्तर नहीं होता है ।

1) शायद आज वर्षा (बारिश) हो ।

2) शायद डीजल, पेट्रोल के भाव बढ़ेंगे ।

3) शायद वे रास्ते में होंगे ।

किसी पाठशाला के बटुकों के-

4) वेद मन्त्रों की अन्त्याक्षरी में जीतने का पूरा भरोसा है ।

5) उसकी सफलता की पूरी सम्भावनाएँ हैं ।

6) आज के मैच में भारत के टॉस जीतने का संयोग 50 – 50 है ।

यहाँ उपर्युक्त सभी कथनों से निश्चित उत्तर की अपेक्षा नहीं कर पाते हैं सभी कथनों के उत्तर में संदेह ,'संभावना'(Probability), संयोग की भावना बनी रहती है।

उदाहरण के लिए –

1) ''सम्भवत: आज बारिश होगी''का अर्थ यह होगा कि वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है ।

इस प्रकार उपर्युक्त कथनों के उत्तर 'हाँ' में भी हो सकते हैं और 'नहीं' में भी 'प्रायिकता' की सहायता से हम 'सम्भवत:' एवं संदेह वाले प्रश्नों कि अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप से मापन कर सकते हैं। **प्रायिकता द्वारा किसी घटना के घटित होने के सम्भावनाओं का परिणाम बोधक या संख्यात्मक निरूपण करते हैं ।** दूसरे शब्दों से अनिश्चितता की गणना को **प्रायिकता** कहते हैं यह किसी घटना के होने सम्भावना का माप है ।

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने का संख्यात्मक मान है । मान लीजिये E कोई घटना है जिसके घटित होने की सम्भावना को हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ।

$$P\ (E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$$

$$P\ (E) = \frac{n\ (E)}{n\ (S)}$$

गतिविधि:

1) प्रायिकता समझने के लिये हम निम्न गतिविधि कर सकते हैं । एक सिक्का लेकर उसे 10 बार उछालने पर चित्त (Head) एवं पट (Tail) की संख्या की गिनती करें तथा उसे निम्न सारणी में लिखें ।

सिक्कों के उछालने की संख्या	चित्त (हेड) ऊपर आने की संख्या	पट (टेल) ऊपर आने की संख्या
10		

नीचे दिए गए भिन्नों के मान लिखिए।

$$P(E_1) = \frac{\text{चित (हेड) ऊपर आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की संख्या}}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{पट (टेल) ऊपर आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की संख्या}}$$

उपर्युक्त प्रयोग में दो ही सम्भावना (चित्त होगा या पट) थी । जहाँ $P(E_1)$ व $P(E_2)$ क्रमश: चित्त व पट आने की **प्रायिकता** कहते हैं। यहाँ, $P(E_1)$ व $P(E_2)$ के मानों का योग 1 होता है। अर्थात्

$$P(E_1) + P(E_2) = 1$$

ध्यान रहे :- किसी प्रयोग में प्राप्त कुल घटनाओं की प्रायिकता का योग हमेशा 1 होता है।

प्रयोग (यादृच्छिक प्रयोग) –

एक क्रिया के अनेक सम्भव परिणामों वाला प्रयोग जिसमें में एक ओर केवल एक परिणाम का आना निश्चित हो । लेकिन परिणाम का सही पुर्वानुमान न हो तो **प्रयोग** कहलाता है।

परिणाम : किसी प्रयोग के एक बार होने पर प्राप्त निष्कर्ष को **परिणाम** कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में दो संभावित परिणाम होते हैं चित्त या पट

घटना : किसी भी प्रयोग के एक या एक से अधिक परिणामों को **घटना** की संज्ञा दी जाती है । **जैसे** : एक पासा फेंकने पर समसंख्या की प्राप्ति ।

प्रतिदर्श बिन्दु : किसी प्रयोग के सभी सम्भावित परिणामों के समूह को उस प्रयोग का **प्रतिदर्श बिन्दु** कहते हैं ।

नीचे सारणी में प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि व प्रतिदर्श बिन्दुओं के बारे में बताया गया है ।

यादृच्छिक प्रयोग	प्रतिदर्श समष्टि	प्रतिदर्श बिन्दु
एक सिक्के को उछालना	S (H,T)	H, T
एक पासे को उछालना	S (1,2,3,4,5,6)	1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6
दो सिक्कों को एक साथ उछालना	S (H,H) (T,T) (H, T) (T, H)	(H,H),(T,T), (H,T), (T,H)

प्रायकिता के कुछ महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष

1) सभी सम्भावित परिणाम की प्रायिकताओं का योग 1 होता है ।

2) P (घटना का होना) + P (घटना का नहीं होना) = 1

या $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

3) किसी घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होता है ।

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

4) असम्भव घटना की प्रायिकता 0 और निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है ।

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने का संख्यात्मक मान है । इसे निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ।

$$P\ (E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$$

$$P\ (E) = \frac{n\ (E)}{n\ (S)}$$

उदाहरण : एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित्त ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि S = (H, T)

परिणामों की कुल संख्या $n\ (S) = 2$

चित्त आने की घटना (A) = H

चित्त ऊपर आने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या n (A) = 1

प्रायिकता $P\ (A) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या } n(A)}{\text{कुल परिणामों की संख्या } n(S)}$

$= \frac{1}{2}$

उदाहरण : एक साधारण पासे को फेंकने पर 3 से छोटे अङ्क प्राप्त होने की प्रायकिता ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रतिदर्श समष्टि S = (1,2,3,4,5,6)

परिणामों की कुल संख्या $n(s) = 6$

3 से छोटे अङ्क प्राप्त होने की घटना E = (1,2)

इसलिए, घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 2$

अब,

$$\textbf{प्रायिकता } \boldsymbol{P(E)} = \frac{\boldsymbol{n(E)}}{\boldsymbol{n(S)}}$$

$$= \frac{2}{6} \text{ या } \frac{1}{3}$$

अत: 3 से छोटे अङ्क की प्रायकिता $\frac{1}{3}$ है।

उदाहरण : एक घनाकार पासे को फेंकने पर शीर्ष पर विषम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रतिदर्श समष्टि (S) = (1,2,3,4,5,6)

परिणामों की कुल संख्या n(s) = 6

विषम अङ्क आने की घटना(E) = (1,3,5)

इसलिए, घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या n(E) = 3

विषम अङ्क आने की **प्रायिकता $\boldsymbol{P(E)}$** = $\frac{\boldsymbol{n(E)}}{\boldsymbol{n(S)}}$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

अत: पासे के शीर्ष पर विषम अङ्क आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है ।

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन करें।

(अ) निश्चित घटना की प्रायिकता का मान क्या है-

(I) 0 (II) $\frac{1}{2}$ (III) 1 (IV) $\frac{3}{2}$

(ब) यदि किसी घटना की प्रायिकता P(E) से निरूपित होता है तो-

(I) $P(E) \leq 0$ (II) $P(E) \leq 1$ (III) $0 \leq P(E) \leq 1$ (IV) $-1 \leq P(E) \leq 1$

(स) निम्न में कौन-सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है -

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{-1}{2}$ (III) $\frac{1}{4}$ (IV) 1

(द) एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है तो एक चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता है -

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{1}{3}$ (III) $\frac{1}{4}$ (IV) $\frac{1}{6}$

(प) एक पासा को एक बार फेंका जाता है, तो सम संख्या आने की प्रायिकता है -

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{1}{3}$ (III) $\frac{1}{4}$ (IV) $\frac{1}{6}$

2. निम्नलिखित परिभाषा लिखिए -

अ) प्रायिकता ब) प्रतिदर्श बिन्दु

3. एक सिक्के के उछालने पर पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

4. एक पासे के फेंकने पर शीर्ष (ऊपर) 4 से अधिक अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

5. एक सिक्का 10 बार उछालने पर 7 बार चित्त (हेड) प्राप्त होता है, तो हेड आने की प्रायिकता बताइये ।

6. यदि एक पासे के फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

7. एक पासे को फेंकने पर 0 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

8. एक पासा को दो बार फेंका जाता है, तो विषम संख्या आने की प्रायिकता है -

9. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें ।

अ) असम्भव घटना की प्रायिकता............................होती है ।

ब) प्रायिकता का मान हमेशा.....................और.......................के बीच होता है ।

स) निश्चित घटना की प्रायिकता ....होती है ।

हमने सीखा –

1) एक प्रयोग की एक घटना प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है ।

2) एक घटना E की प्रयोग प्रायिकता $P(E)$ है ।

3) प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की सम्भावनाओं का परिणाम संख्यात्मक निरूपण है।

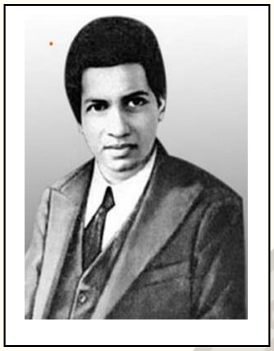
4) प्रायिकता $P\ (A) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या n(A)}}{\text{कुल परिणामों की संख्या n(S)}}$

5) सभी सम्भावित परिणाम की प्रायिकताओं का योग 1 होता है ।

6) किसी घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के मध्य होती है ।

भारतीय गणितज्ञ का परिचय एवं योगदान

❖ **श्री निवास रामानुजन (1887 – 1920)-**



महान् गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन का जन्म दिनाङ्क 22 दिसम्बर 1887 को तमिलनाडु प्रान्त के कुम्भकोणम के पास एक छोटे से गाँव 'इरोदा' में हुआ था। रामानुजन का जन्म एक गरीब ब्राह्मण परिवार में हुआ। **उनके पिता आजीविका के लिए मन्दिर में वेद-पाठ किया करते थे।** इसके साथ ही साथ वे एक दुकानदार का बही-खाता लिखने का भी कार्य करते थे। रामानुजन प्रारम्भ से ही जिज्ञासु प्रवृत्ति एवं कुशाग्र बुद्धि के थे।उनकी गणित में विशेष रुचि थी हाईस्कूल तक वह सदैव अपनी कक्षा में प्रथम आए।

हाईस्कूल परीक्षा उत्तीर्ण करने के पश्चात् रामानुजन ने कम्भकोणम कॉलेज में प्रवेश लिया, गणित विषय में उनकी विशेष रुचि थी ।गणित में अद्वितीय योग्यता के आधार पर उन्होंने कॉलेज के विद्यार्थियों को गणित पढ़ाने का कार्य किया एवं गणित में उनका शोध कार्य भी जारी रहा। उनकी पूरी निधि दो हस्तलिखित पुस्तिकाएँ थी।वे मित्रों से कहते थें कि यदि मेरी मृत्यु हो जाए तो यह पुस्तिकाएँ प्रोफेसर सिंगारवेलु अथवा प्रोफेसर एडवर्ड रॉस को दे दी जाएँ।

सन् 1913 में रामानुजन ने कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रोफेसर जी. एच. हार्डी को एक पत्र लिखा और पत्र के साथ उन्होंने लगभग 120 प्रमेय भी भेजे थे।हार्डी,

रामानुजन के कार्य से इतने प्रभावित हुए कि उन्होंने रामानुजन को सन् 1914 में अपने पास इंग्लैंड बुला लिया।

गणितज्ञ गॉडफ्रे हेरल्ड हार्डी के बुलावे पर 14 अप्रैल 1914 को लन्दन पहुँचे । इंग्लैण्ड आते ही रामानुजन ने अनुसन्धान कार्य में कठिन परिश्रम करना प्रारम्भ कर दिया। रामानुजन तथा हार्डी का अनुसन्धान कार्य जारी रहा। सन् 1915 में उनके सम्मिलित रूप से 9 शोध पत्र प्रकाशित हुए। इंग्लैण्ड के प्रवास में हार्डी के साथ रामानुजन के 21 शोध पत्र प्रकाशित हुए। 6 दिसम्बर 1917 को लन्दन मैथमैटिकल सोसाइटी के फेलो निर्वाचित हुए। अपनी अद्वितीय प्रतिभा के आधार पर रामानुजन को मई 1918 में रॉयल सोसाइटी के फैलो निर्वाचित किये गये।

उस वर्ष फैलोशिप के लिए 104 विद्वानों का नामांकन किया गया था। उनमें से केवल 15 व्यक्ति चयनित हुए , रामानुजन उनमें से एक थे। यह सम्मान पाने वाले वे प्रथम भारतीय थे। इतनी कम उम्र में ढेर सारी उपलब्धियाँ हासिल करने वाले यह भारत के पहले नागरिक बने और इन्होंने अपनी खोज का डंका भारत समेत अन्य देशों में भी बजा दिया ।

मद्रास विश्वविद्यालय द्वारा उन्हें प्राध्यापक पद पर नियुक्त किया गया।

27 मार्च 1919 को वह इंग्लैण्ड के प्रवास के पश्चात् भारत पहुँचे। भारत में उनका भव्य स्वागत किया गया। रामानुजन के महत्त्वपूर्ण कार्य निम्नलिखित हैं।

1) पूर्ण संख्या 2) अनंत श्रेणी 3) सतत भिन्न 4) अपसारी श्रेणी 5) संयुक्त संख्या आदि।

रामानुजन भारतीय सभ्यता के सच्चे पुजारी थे। इंग्लैंड जाते समय उन्होंने अपने पिता को

वचन दिया था कि "मैं इंग्लैण्ड में भी हिंदुस्तानी रहूँगा और कोई ऐसी बात नहीं करूँगा जिससे भारतीयता को चोट पहुँचे।" इस वचन का उन्होंने पूर्णत: पालन किया। विदेश में अत्यधिक बौद्धिक कार्य के साथ-साथ वे अपना सारा काम अपने हाथों से करते थे। घण्टों दूसरों से गणित की समस्या पर चर्चा भी करते थे ।उनकी अध्ययनशीलता अनुकरणीय है। वह अपने जीवन के अन्तिम क्षण तक अभावों की परवाह न करते हुए अध्ययन ,अनुसन्धान एवं लेखन में प्रवृत्त रहे । रामानुजन एक विलक्षण गणितज्ञ थे। वे रोग के दौरान भी अपनी शय्या पर लेटे-लेटे गणितीय परिकल्पनाएँ हल किया करते थे। एक बार जब वे अस्पताल में भर्ती थे तो प्रो. हार्डी उन्हें देखने आए। हार्डी जिस टैक्सी में आए थे उसका नं. था 1729 ($7 \times 13 \times 19$)। प्रो. हार्डी को यह संख्या अशुभ लगी। यह सुनकर रामानुजन बोले- यह वह सबसे छोटी संख्या है, जिसे हम दो घन संख्याओं के योग से दो प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं-

$$1729 = 12^3 + 1^3 \text{ एवं } 10^3 + 9^3$$

दिनाङ्क 26 अप्रैल वर्ष 1920 को मात्र 33 वर्षीय श्रीनिवास रामानुजन जी का स्वर्गवास टी.बी. की बीमारी के वजह से हो गया। भारत के इस महान गणितज्ञ को खोने का शोक पूरे भारतवर्ष समेत अन्य देशों को भी हुआ, जहाँ पर उनकी लोकप्रियता बन चुकी थी। गणित की संख्या 1729 को रामानुजन नम्बर के नाम से जाना जाता है। भारत के इस महान गणितज्ञ के जन्मदिन के शुभ अवसर पर सम्पूर्ण भारतवर्ष में **आईटी दिवस और नेशनल मैथमैटिक्स दिवस के रूप में मनाया जाता** है। **श्रीनिवास रामानुजन जी के सम्पूर्ण जीवन के ऊपर वर्ष 2015 में एक फिल्म आई है और उसका नाम "Man who knew infinity"** है।

❖ कृष्ण वेंकटेश्वर शर्मा (1919 -2005)

कृष्ण वेंकटेश्वर शर्मा जी ने त्रिवेन्द्रम से संस्कृत में एम. ए. किया था, और बाद में वी.राघवन के साथ मद्रास विश्वविद्यालय में न्यूकैटलॉग कैटलॉगोरम परियोजना में शामिल हो गए। शीघ्र ही वह केरल खगोल विज्ञान से सम्बन्धित कार्य पर लग गए। उन्होंने बहुत से महत्त्वपूर्ण पुस्तकों का सम्पादन किया। उदाहरण स्वरूप हरि दत्त की ग्रहकरणी बन्धन, नीलकण्ठ का सिद्धान्त दर्पण, माधव की गोला दीपिका इत्यादि। इस अवधि के दौरान, शर्मा ने प्रसिद्ध विद्वान टी.एस. कुप्पना शास्त्री के साथ वाक्याकरण (1961) के एक संस्करण के लिये काम किया। 1975-80 के दौरान शर्मा को होशियारपुर के विश्वेश्वर नन्द इंस्टीट्यूट में निदेशक के रूप में स्थानान्तरित कर दिया गया था। इस सेवा अवधि के दौरान, उन्होंने कई महत्त्वपूर्ण कार्यों सहित 50 से अधिक पुस्तकें प्रकाशित कीं जैसे केरल स्कूल के हिन्दू खगोल शास्त्र का इतिहास, भास्कराचार्य की लीलावती, शङ्कर का क्रिया क्रम कारी, नील कण्ठ का तन्त्र संग्रह, शङ्कर का युक्ति दीपक, नीलकण्ठ का ज्योर्तिमीमांसा इत्यादि।

1983 में शर्मा मद्रास लौट आए और 2005 में उनकी मृत्यु तक उनका कार्य सक्रिय रूप से जारी रहा। इस अवधि के दौरान उनके महत्त्वपूर्ण प्रकाशन हैं: बी.वी.सुब्बा रायप्पा के साथ 'भारतीय खगोल विज्ञान: एक स्रोत पुस्तक' (1985), वाराहमिहिर के पञ्च सैद्धान्तिक के आधार पर टी.ए .सकुप्पना शास्त्री(1993) के साथ एक पुस्तक; और उनका सब से बड़ा काम युक्तिभाषा का अनुवाद और संस्करण, जो 2008 में के. राम सुब्रमण्यम, एम.एस. श्री राम और एम.डी.श्रीनिवास के लेख के साथ छपी।

❖ **शकुन्तला देवी** Shakuntala Devi (1929-2013)

शकुन्तला देवी (4 नवम्बर 1929 - 21 अप्रैल 2013) जिन्हें हम "मानव कम्प्यूटर" के रूप में जानते हैं, बचपन से ही अद्भुत प्रतिभा की धनी थीं। उनकी प्रतिभा को देखते हुए उनका नाम 1982 में 'गिनीज़ बुक ऑफ वर्ल्ड रिकॉर्ड्स' में भी सम्मिलित किया गया।

शकुन्तला देवी का जन्म कर्नाटक की राज्यधानी बंगलौर नामक महानगर में एक रुढ़ीवादी कन्नड़ ब्राह्मण परिवार में हुआ था। शकुन्तला देवी के पिता सर्कस में करतब दिखाते थे। जब वे 3 वर्ष की उम्र में अपने पिता के साथ ताश खेल रही थीं तभी उनके पिता ने पाया कि उनकी बेटी में मानसिक योग्यता के सवालों को हल करने की क्षमता है।

शकुन्तला ने 6 वर्ष की उम्र में मैसूर विश्वविद्यालय में एक बड़े कार्यक्रम में अपनी गणना क्षमता का प्रदर्शन किया। वर्ष 1977 में शकुन्तला ने 201 अङ्कों की संख्या का 23वाँ वर्गमूल बिना पेन-पेपर के बता दिया था। उन्होंने 13 अङ्कों वाली 2 संख्याओं का गुणनफल 26 सेकण्ड बता दिया था।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in