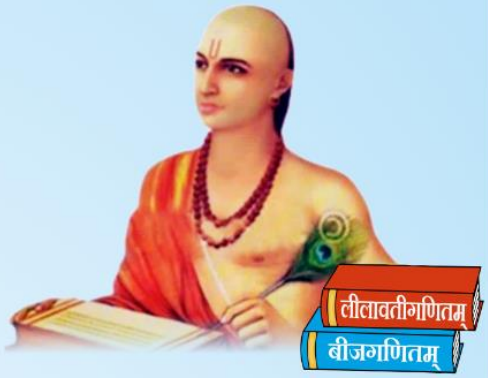
आज़ादी का अमृत महोत्सव







गणित पाठ्यपुस्तक

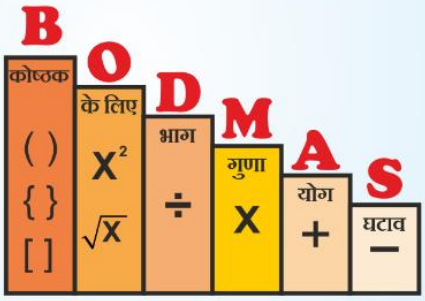
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

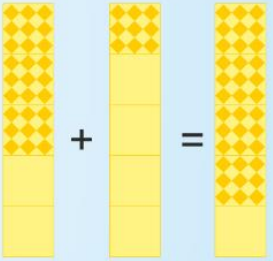
वेद-भूषण - II वर्ष / प्रथमा - II वर्ष / कक्षा सातवीं

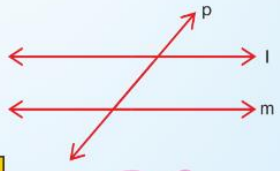
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा धनर्णयोरन्तरमेव योगः ।
शून्यर्णयोः खधनयोः खशून्ययोर्वा वधः शून्यम् ।
योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः।
अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।
मिथो हराभ्यामपवर्त्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियात्र गुण्यौ॥
छेदं लवं च परिवर्त्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च।
यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव ।
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात् त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा ॥
त्रैराशिकफलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा।
लब्धं प्रमाणभाजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात्॥
वर्गस्समचतुरस्रः फलञ्च सदृशद्वयस्य संवर्गः॥
यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं श्यानः।
वत्स कामदुघो विराजः स गुहा चक्रे तन्वः पराचैः॥
त्रिभुजस्य फलशरीरं समदलकोटीभुजार्धसंवर्गः ।
द्वादश प्रघश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मिन्त्साकं त्रिशता न शङ्कवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलासः।।
चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥





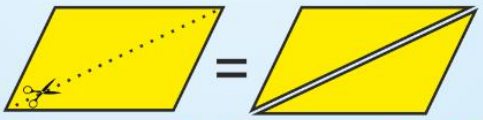












एकाधिकेन पूर्वेण | एकन्यूनेन पूर्वेण | विनुकलम् | विलोकनम्

पूरणापूरणाभ्याम् | सङ्कलन-व्यवकलनाभ्याम् | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

गणित पाठ्यपुस्तक

वेद-भूषण - II वर्ष / प्रथमा - II वर्ष / कक्षा सातवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

लेखकगण : .....

आवरण एवं सज्जा : .....

चित्राङ्कन : .....

तकनीकी सहयोग : .....

अक्षरविन्यास : .....

© महर्षिसान्दीपनिराष्ट्रियवेदविद्याप्रतिष्ठानम्, उज्जयिनी

ISBN : .....

मूल्य : .....

संस्करण : .....

प्रकाशित प्रति : .....

पेपर उपयोगः : आर.सी.टी.बी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रिय वेदविद्या प्रतिष्ठान

(शिक्षामन्त्रालय भारत सरकार की स्वायत्तशासी संस्था)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

email : msrvvpujn@gmail.com,

Web : msrvvp.ac.in

दूरभाष (0734) 2502255, 2502254

भूमिका

वैदिक काल के आरम्भ से ही गणित विद्या को सर्वोच्च स्थान दिया गया है। भारतवर्ष में गणित की समृद्ध परम्परा रही है । इतिहास के अत्यन्त प्राचीन काल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। भारतीय परम्परा में गणेश दैवज्ञ ने अपने ग्रन्थ बुद्धिविलासिनी में गणित की परिभाषा निम्नवत की है-

गण्यते संख्यायते तद्गणितम्। तत्प्रतिपादकत्वेन तत्संज्ञं शास्त्रम् उच्यते।

अर्थात् गणना के आधार को बताने वाला शास्त्र गणित शास्त्र कहलाता है। पाणिनीय धातुपाठ में गण-संख्याने धातु है, जिस धातु का अर्थ हैं- गणना करना । गण धातु में इतच् प्रत्यय करने से गणित शब्द निष्पन्न है, अत: भारतीय चिन्तन में गणित अत्यन्त प्राचीन काल से विद्या विशेष था।

पुरातन ज्ञान का उपयोग एवं प्राचीन उपलब्धियों के तारतम्य से आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के उद्देश्य से इस पाठ्यपुस्तक में वैदिक गणित के साथ संस्कृत ज्ञान प्रणाली में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं का समावेश किया गया है । वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है ।

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामञ्जस्य बनाकर पूरे भारतवर्ष के वैदिक विद्यार्थियों को गणित विषय में अधिगम स्तर की दक्षता प्रदान करने के लिए राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 में निहित - चर्चा, विश्लेषण, उदाहरण एवं अनुप्रयोग जैसे मुख्य सिद्धान्तों की दृष्टि को ध्यान में रखते हुए वैदिक विद्यार्थियों के अनुरूप पाठ्यक्रम एवं पाठ्य पुस्तकों का निर्माण किया गया है।

पाठ्यपुस्तक की भाषा बहुत ही सरल और सहज है जिससे विद्यार्थियों को समझने में सुगमता होगी। वेदभूषण द्वितीय (सातवी समकक्ष) वर्ष की इस पाठ्यपुस्तक में कुल 10 अध्याय हैं, जो प्राय: पूरे भारतवर्ष के कक्षा-7 गणित पाठ्यक्रम के समकक्ष है।पाठ्यपुस्तक में कई पाठ्य बिन्दुओं को संस्कृत ज्ञान प्रणाली के वैदिक प्रमाणों के साथ-साथ ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त, शुल्बसूत्र, आर्यभट्टीयम्, लीलावती एवं बीजगणितम् आदि ग्रन्थों के सन्दर्भों को भी सम्मिलित किया गया है जिससे वैदिक विद्यार्थी आधुनिक गणित के साथ प्राचीन गणितीय सङ्कल्पनाओं को भी समझने में सक्षम होंगे एवं अपनी भारतीय परम्परा की गरिमा का अनुभव कर सकेंगे। पूर्व कक्षा के अनुभव को दोहराते हुए, पाठ्यपुस्तक के अध्यायों की रचनाएँ वेद विद्यालय के वेद भूषण द्वितीय वर्ष पाठ्यक्रम के आवश्यकता के अनुसार की गई है। अध्याय 1 में पूर्णाङ्क संख्या के गुणधर्म एवं पूर्णाङ्क संख्याओं के साथ सङ्क्रिया को विस्तार से प्रस्तुत किया गया

है।अध्याय 2 में भिन्न एवं दशमलव संख्याओं के मध्य योग, अन्तर, गुणन एवं भाग की सङ्क्रिया को विस्तार से प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 3 में वैदिक गणित के सूत्रों के माध्यम से योग, अन्तर, गुणन एवं भाग की सङ्क्रिया का वर्णन प्रस्तुत है। अध्याय 4 में आंकड़ों का प्रबन्धन के अन्तर्गत आंकड़ों को व्यवस्थित करने के साथ आंकड़ों का समान्तर माध्य, माध्यिका ज्ञात करना बताया गया है। अध्याय 5 में सरल समीकरण को हल करना तथा वाक्यों को समीकरण के रूप में लिखना इत्यादि का वर्णन प्रस्तुत है। अध्याय 6 में रेखा एवं कोण के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार के कोणों के साथ तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोणों का विस्तार से वर्णन किया गया है। अध्याय 7 में राशियों की तुलना के अन्तर्गत अनुपात, समानुपात, प्रतिशत के साथ किसी वस्तु से सम्बन्धित क्रय एवं विक्रय मूल्य का वर्णन किया गया है। अध्याय 8 में परिमेय संख्याओं का वर्णन विस्तार से प्रस्तुत है। अध्याय 9 में परिमाप एवं क्षेत्रफल के अन्तर्गत वर्ग, आयात, समान्तर चतुर्भुज, त्रिभुज, वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों का विस्तार से वर्णन है। अध्याय 10 में सममिति के अन्तर्गत रेखिक समिति, परावर्तन सममिति, घूर्णन सममिति आदि को प्रस्तुत किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में वैदिक विद्यार्थियों की गणित की समझ को विकसित करने के साथ-साथ तथ्यों की पुनः खोज करने की दक्षता का विकास करने के लिए विभिन्न गतिविधियाँ दी गई हैं। जिन्हें **'करो और सीखो'** का नाम दिया गया है, साथ ही विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर को बढ़ाने के लिए प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण सङ्कल्पनाओं एवं परिणामों को **" हमने सीखा "** के रूप में स्थान दिया गया है ।

भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीय गणितज्ञों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति विद्यार्थियों की समझ बनाने के लिए पाठ्यपुस्तक के अन्त में **भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान** का भी उल्लेख किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं को समझकर वैदिक विद्यार्थी प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी में सक्षम होंगे। उक्त पुस्तक के अध्ययनोपरान्त विद्यार्थी कक्षा सातवीं की NCERT तथा विषय विशेष से सम्बन्धित पुस्तकों का अध्ययन करें।

लेखक पाठ्यपुस्तक के त्रुटि सुधार हेतु प्रेषित सकारात्मक सुझाव के लिए आपका कृतज्ञ होगा।

प्रस्तावना

(राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के आलोक में)

शिक्षा मन्त्रालय (उच्चतर शिक्षा विभाग), भारत सरकार ने माननीय शिक्षा मन्त्री जी (तत्कालीन मानव संसाधन विकास मन्त्री) की अध्यक्षता में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान की स्थापना दिल्ली में 20 जनवरी, 1987 को सोसायटी पञ्जीकरण अधिनियम, 1860 के तहत की थी। भारत सरकार ने वेदों की श्रुति परम्परा का संरक्षण, संवर्धन, प्रसार और विकास के लिए प्रतिष्ठान की स्थापना का संकल्प संख्या 6-3/85-SKT-IV दिनाङ्क 30-3-1987 को भारत के राजपत्र में अधिसूचित किया था। वेदों के अध्ययन की श्रुति परम्परा (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, वेदाङ्ग, वेद भाष्य आदि), वेदों का पाठ संरक्षण, वैदिक स्वर तथा वैज्ञानिक आधार पर वेदों की व्याख्या का दायित्व वेद विद्या प्रतिष्ठान को दिया गया था। वर्ष 1993 में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान के कार्यालय को उज्जैन में स्थानान्तरित करने के पश्चात् संगठन का नाम महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान कर दिया गया। वर्तमान में यह संगठन मध्यप्रदेश सरकार द्वारा प्रदत्त भूमि- परिसर, महाकाल नगरी, उज्जैन में स्थित है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति-1986 के संशोधित नीति-1992 और कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन)-1992 में भी वैदिक शिक्षा को बढ़ावा देने के लिए राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान को उत्तरदायित्व दिया गया था। भारत के प्राचीन ज्ञान कोष, मौखिक परम्परा और इस तरह की शिक्षा के लिए पारंपरिक गुरुओं को संयोजित करने के उद्देश्य को 1992 के कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन) में उल्लेखित किया गया था।

राष्ट्र की आकांक्षाओं के अनुरूप, राष्ट्रीय स्तर पर वेद और संस्कृत शिक्षा के लिए एक बोर्ड की स्थापना के पक्ष में राष्ट्रीय सहमति, जनादेश, नीति, विशिष्ट उद्देश्य और कार्यान्वयन रणनीतियों के अनुरूप, भारत सरकार के माननीय शिक्षा मन्त्रीजी की अध्यक्षता में महासभा और शासी परिषद् के समावेश में ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड'' की स्थापना 2019 में हुई है। MSRVVP का वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड भी वैदिक शिक्षा का एक भाग है और MSRVVP के उद्देश्यों की पूर्ति के लिए आवश्यक है जैसा कि MOA और नियमों में संकल्पना की गई है। महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड को शिक्षा मन्त्रालय,भारत सरकार तथा भारतीय

विश्वविद्यालय संघ, केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली से मान्यता प्राप्त है।

यहाँ यह भी उल्लेखनीय है कि भारत सरकार के शिक्षा मन्त्रालय द्वारा वर्ष 2015 में श्री एन. गोपालस्वामी (पूर्व चुनाव आयुक्त) की अध्यक्षता में गठित समिति ''संस्कृत के विकास के लिए विजन और रोडमैप - दस वर्षीय परिप्रेक्ष्य योजना'' की रिपोर्ट में अनुशंसा की गई है कि माध्यमिक विद्यालय स्तर तक वेद संस्कृत शिक्षा के पाठ्यक्रम मानकीकरण, संबद्धता, परीक्षा मान्यता, प्रमाणीकरण के लिए राष्ट्रस्तर पर वेद संस्कृत परीक्षा बोर्ड की स्थापना की जाए। समिति की अनुशंसा थी कि प्राथमिक स्तर का वैदिक एवं संस्कृत अध्ययन अभिप्रेरक, सम्प्रेरक एवं आनन्ददायी होना चाहिए। आधुनिक शिक्षा के विषयों को वैदिक और संस्कृत पाठशालाओं में सन्तुलित रूप से सम्मिलित करना भी आवश्यक है। इन पाठशालाओं की पाठ्यक्रम सामग्री को समकालीन समाज की आवश्यकताओं के अनुरूप और प्राचीन ज्ञान का उपयोग करते हुए आधुनिक समस्याओं का समाधान खोजने के लिए प्रारूपित किया जाना चाहिए।

वेद पाठशालाओं के संबंध में समिति ने यह संस्तुति की है कि संस्कृत और आधुनिक विषयों की श्रेणीबद्ध सामग्री के परिचय के साथ-साथ वेद पाठ कौशल संवर्धन और वेद उच्चारण में मानकीकरण की आवश्यकता है ताकि वेद छात्र अन्ततः वेद भाष्य के अध्ययन तक पहुंच सकें और छात्रों को आगे की पढ़ाई के लिए मुख्यधारा में लाया जा सके। उचित स्तर पर वेदों के विकृति पाठ के अध्ययन पर बढ़ावा दिया जाना चाहिए। समिति के सदस्यों ने यह भी चिंता व्यक्त की है कि वैदिक सस्वर पाठ पूरे भारत में समान रूप से नहीं फैला है, इसलिए वैदिक सस्वर पाठ की शैलियों और शिक्षण पद्धति की क्षेत्रीय विविधताओं में हस्तक्षेप किए बिना स्थिति में सुधार के लिए उचित कदम उठाया जाना है।

यह भी अनुभव किया गया कि वेद और संस्कृत अविभाज्य हैं और एक दूसरे के पूरक हैं और देश भर में सभी वेद पाठशालाओं और संस्कृत पाठशालाओं के लिए परीक्षा मान्यता और सम्बद्धता की समस्याएँ समान है, इसलिए दोनों के लिए एक साथ वेद संस्कृत हेतु एक बोर्ड का गठन किया जा सकता है। समिति ने यह पाया कि बोर्ड द्वारा आयोजित परीक्षाओं को कानूनी रूप से वैध मान्यता प्राप्त होनी चाहिए, जो शिक्षा की आधुनिक बोर्ड प्रणाली के साथ समानता रखे। समिति ने पाया कि महर्षि सान्दीपनि

राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान उज्जैन को ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत विद्या परिषद्'' के नाम से परीक्षा बोर्ड का दर्जा दिया जाये, जिसका मुख्यालय उज्जैन में रहे। परीक्षा बोर्ड होने के अतिरिक्त अब तक जो सभी वेद कार्यक्रम और वेद पर गतिविधियाँ हैं, वे सभी प्रतिष्ठान में जारी रहेंगे।

वैदिक शिक्षा का प्रचार भारत की गौरवशाली ज्ञान परम्परा का एक व्यापक अध्ययन है और इसमें वैदिक अध्ययन (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, स्वर का सम्यक् प्रयोग ज्ञान आदि), सस्वर पाठ कौशल, मन्त्र उच्चारण और संस्कृत ज्ञान प्रणाली सामग्री की बहुस्तरीय श्रुति परम्परा सम्मिलित है। प्रतिष्ठान में NEP 2020 अनुरूप 3 + 4 (सात साल तक) के वेद अध्ययन की योजना में पारम्परिक छात्रों को मुख्य धारा में लाने की नीति के परिप्रेक्ष्य में अन्य विभिन्न आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि पाठ्यक्रम के अनुसार तथा वैदिक शिक्षा पर केन्द्रित नीति निर्धारक निकायों में राष्ट्रीय सहमति, समय की उपलब्धता के आधार पर सभी अध्ययन संयोजित हैं। अध्ययन की यह योजना NEP 2020 के परिप्रेक्ष्य में भारतीय ज्ञान प्रणाली पर ध्यान केन्द्रित करने वाले पाठ्यक्रम सामग्री में आधुनिक ज्ञान के साथ एवं भारतीय ग्रंथों से तैयार वैदिक ज्ञान के उपयुक्त सामग्री के साथ है।

प्रतिष्ठान बोर्ड की वेद पाठशालाओं, गुरु शिष्य ईकाइयों और गुरुकुलों में, पाठ्यक्रम मुख्य रूप से सम्पूर्ण सस्वर कण्ठस्थीकरण के साथ संपूर्ण वेद शाखा का अध्ययन होता है तथा संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि और SUPW जैसे अतिरिक्त सहायक विषयों के साथ वेद अध्ययन होता है।

यह सर्वविदित तथ्य है कि वेदों की 1131 शाखाएँ सस्वर पाठ के साथ थे, अर्थात् 21 ऋग्वेद में, 101 यजुर्वेद में, 1000 सामवेद में और 9 अथर्ववेद में। समय के साथ इन शाखाओं की एक बड़ी संख्या विलुप्त हो गई और वर्तमान में केवल 10 शाखाएँ, अर्थात् ऋग्वेद में एक, यजुर्वेद में 4, सामवेद में 3 और अथर्ववेद में 2 सस्वर पाठ के रूप में विद्यमान हैं, जिन पर भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित है, इन 10 शाखाओं के संबंध में भी बहुत कम प्रतिनिधि वेदपाठी पंडित है जो श्रुति परम्परा/पाठ/वेद ज्ञान परम्परा को उसके प्राचीन और पूर्ण रूप में संरक्षित किये हुए हैं। जब तक श्रुति परम्परा के अनुसार वैदिक शिक्षा पर मूलरूप से ध्यान नहीं दिया जाएगा, तब तक यह व्यवस्था सुदृढ़ नहीं हो पायेगी। वैदिक

श्रुति परम्परा की श्रुति अध्ययनों के पहलुओं को सामान्य/अध्ययन में स्कूल में न तो पढ़ाया जाता है और न ही किसी स्कूली शिक्षा के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया जाता है, और न ही स्कूलों/बोर्डों के पास उन्हें आधुनिक स्कूल पाठ्यक्रम में सम्मिलित करने और सञ्चालित करने की विशेषज्ञता है।

वैदिक छात्र जो श्रुति परम्परा / वेद का पाठ सीखते हैं, वे दूर-दराज के गाँवों, सीमावर्ती गाँवों आदि में वेद गुरुकुलों में, वेद पाठशालाओं में, वैदिक आश्रमों में हैं, और वेद अध्ययन के लिए उनका समर्पण लगभग 1900 - 2100 घंटे प्रतिवर्ष है। जो अन्य स्कूल बोर्ड की सीखने की प्रणाली के समय से दोगुना है और वैदिक छात्रों को ''गुरु-मुख-उच्चारण अनुच्चारण'' - वेद गुरु के सामने बैठकर शब्दशः उच्चारण सीखना होता है, संपूर्ण वेद, शब्दशः उच्चारण (उदात्त, अनुदात्त, स्वरित आदि) के साथ कण्ठस्थ करना होता है और स्मृति के बल पर बिना किसी पुस्तक/पोथी को देखे।

ज्ञात हो कि इस प्रकार के वैदिक अध्ययन, वेद मन्त्रपाठ की रीति, गुरु शिष्य की अखण्ड मौखिक परम्परा से प्रचलित क्रम के कारण वेदों के मौखिक प्रसारण को मानवता की अमूर्त सांस्कृतिक विरासत रूप में यूनेस्को-विश्व मौखिक विरासत सूची में मान्यता प्राप्त हुई है। इसलिए, सदियों पुरानी वैदिक शिक्षा (श्रुति परम्परा/सस्वर पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) की प्राचीनता और सम्पूर्ण अखण्डता को बनाए रखने के लिए सुयोग्य कार्यनीति की आवश्यकता है। इसलिए, प्रतिष्ठान और इस बोर्ड ने राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 द्वारा निर्धारित कौशल और व्यावसायिक विषयों के साथ-साथ आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि के साथ विशिष्ट प्रकार के वेद पाठ्यक्रम को अपनाया है।

कोई भी व्यक्ति तब सुखी होकर जी सकता है जब वह परा-विद्या और अपरा-विद्या दोनों का अध्ययन करता है। वेदों में से भौतिक ज्ञान, उनकी सहायक शाखाएँ और भौतिक रुचि के विषय अपरा-विद्या कहलाते थे। सर्वोच्च वास्तविकता का ज्ञान, उपनिषदों की अंतिम खोज, परा-विद्या कहलाती है। वेद और उसके सहायक के रूप में अध्ययन किए जाने वाले विषयों की कुल संख्या 14 है। विद्या की 14 शाखाएँ ये हैं - चार वेद, छह वेदांग, मीमांसा (पूर्व मीमांसा और उत्तर मीमांसा), न्याय, पुराण और धर्मशास्त्र। आयुर्वेद, धनुर्वेद, गन्धर्ववेद और अर्थशास्त्र सहित चौदह विद्याएं अठारह हो जाते हैं। सदियों

से भारत उपमहाद्वीप में सभी शिक्षा संस्कृत भाषा में ही थी, क्योंकि इस उपमहाद्वीप में लम्बे समय तक संस्कृत बोली जाने वाली भाषा रही। इसलिए वेद भी सुलभता से समझे जाते थे।

तक्षशिला के विद्यालयों के सम्बन्ध में अठारह शिल्प-या औद्योगिक और तकनीकी कला और शिल्प का उल्लेख किया गया है। छान्देग्य उपनिषद् तथा नीति ग्रन्थों में भी इन का विवरण है। निम्नलिखित 18 कौशल/व्यावसायिक विषय अध्ययन के विषय बताए गए हैं- (1) गायन सङ्गीत (2) वाद्य सङ्गीत (3) नृत्य (4) चित्रकला (5) गणित (6) लेखाशास्त्र (7) इञ्जीनियरिङ्ग (8) मूर्तिकला (9) प्रजनन (10) वाणिज्य (11) चिकित्सा (12) कृषि (13) परिवहन और कानून (14) प्रशासनिक प्रशिक्षण (15) तीरंदाजी, किला निर्माण और सैन्य कला (16) नये वस्तु या उपज का निर्माण । उपर्युक्त कला और शिल्प में तकनीकी शिक्षा के लिए प्राचीन भारत में एक प्रशिक्षु प्रणाली विकसित की गई थी। विद्या और अविद्या मनुष्य को इस प्रपंच में सन्तुष्ट जीवन व्यतीत करने के लिए समर्थ और परलोक में मुक्ति योग्य सिद्ध करती है ।

दुनिया की सबसे पुरानी सभ्यताओं में सर्व प्रथम भारतीय सभ्यता में शास्त्रों, विज्ञान और प्रौद्योगिकी को सीखने की एक विशाल एवं सुदृढ परम्परा रही है। भारत प्राचीन काल से ही ऋषियों, ज्ञानियों और संतों की भूमि के साथ-साथ विद्वानों और वैज्ञानिकों की भूमि भी रही है। शोध से पता चला है कि भारत सीखने सिखाने (विद्या-आध्यात्मिक ज्ञान और अविद्या- भौतिक ज्ञान) के क्षेत्र में विश्व गुरु तो था ही, सक्रिय रूप से भी सम्पूर्ण प्रपञ्च में योगदान दे रहा था और भारत में आधुनिक विश्वविद्यालयों जैसे सीखने के विशाल केन्द्र स्थापित किए गए थे, जहाँ हजारों शिक्षार्थी आते थे। प्राचीन ऋषियों द्वारा खोजी गई कई विज्ञान और प्रौद्योगिकी तकनीकी, सीखने की पद्धतियाँ, सिद्धान्तों और तकनीकों ने कई पहलुओं पर हमारे विश्व के ज्ञान के मूल सिद्धान्तों को बनाया और प्रबल किया है, खगोल विज्ञान, भौतिकी, रसायन विज्ञान, गणित, चिकित्सा, प्रौद्योगिकी, ध्वन्यात्मकता, व्याकरण आदि पर दुनिया में भारत का योगदान समझा जाता है। प्रत्येक भारतीय बालक, बालिका द्वारा इस महान् देश का गौरवान्वित नागरिक होने के कारण इन विषयों का ज्ञान प्राप्त कर लेना चाहिये। भारत की संसद् के प्रवेश द्वार पर उद्धृत ''वसुधैव कुटुम्बकम्'' जैसे भारत के विचार और विभिन्न अवसरों पर संवैधानिक प्राधिकरणों द्वारा उद्धृत कई वेद मंत्र के अर्थ वेदों के अध्ययन से ही ज्ञात होते हैं और उन पर मनन करके

ही वास्तविक प्रेरणा प्राप्त की जा सकती है। वेदों और सम्पूर्ण वैदिक साहित्य में "सत, चित, आनंद" के रूप में सभी प्राणियों की अन्तर्निहित समानता पर जोर दिया गया है।

यह भी उल्लेख किया गया है कि वेद वैज्ञानिक ज्ञान के स्रोत हैं और हमें आधुनिक समस्याओं के समाधान के लिए वेदों और भारतीय शास्त्रों के स्रोतों की ओर पुनः निष्ठा से देखना होगा। जब तक छात्रों को वेदों का पाठ, शुद्ध वैदिक ज्ञान सामग्री और वैदिक दर्शन को आध्यात्मिक ज्ञान और वैज्ञानिक ज्ञान के रूप में नहीं पढ़ाया जाता है, तब तक आधुनिक भारत की आकांक्षा को पूरा करने के लिए वेदों के सन्देश का प्रसार पूर्ण रूप से सम्भव नहीं है।

वेद की शिक्षा (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परंपरा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) केवल धार्मिक शिक्षा नहीं है। यह कहना अनुचित होगा कि वेदों का अध्ययन केवल धार्मिक निर्देश है। वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं और इनमें केवल धार्मिक सिद्धान्त ही नहीं हैं, बल्कि वेद शुद्ध ज्ञान के कोष है, मानव जीवन की कुञ्जी वेदों में है इसलिए, वेदों में निर्देश या शिक्षा को केवल "धार्मिक शिक्षा/धार्मिक निर्देश" के रूप में नहीं माना जा सकता है।

2004 की सिविल अपील संख्या 6736 में माननीय सर्वोच्च न्यायालय (AIR 2013: 15 SCC 677); (निर्णय की दिनाङ्क- 3 जुलाई 2013), जैसा कि माननीय सर्वोच्च न्यायालय के निर्णय में यह स्पष्ट है कि वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं। वेदों में गणित, खगोल विज्ञान, मौसम विज्ञान, रसायन विज्ञान, हाइड्रोलिक्स, भौतिक विज्ञान और प्रौद्योगिकी, कृषि, दर्शन, योग, शिक्षा, काव्यशास्त्र, व्याकरण, भाषा विज्ञान आदि के विषय सम्मिलित हैं, जिन्हें माननीय भारतीय सर्वोच्च न्यायालय द्वारा प्रकाशित किया गया है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के अनुपालन में प्रतिष्ठान एवं बोर्ड के माध्यम से वैदिक शिक्षा -

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 में भारतीय ज्ञान प्रणाली 'संस्कृत ज्ञान प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है, उनके महत्त्व और पाठ्यक्रम में उनका समावेश और विविध विषयों के संयोजन में लचीले दृष्टिकोण को मजबूती से प्रदर्शित किया गया है। कला एवं मानविकी के छात्र भी विज्ञान सीखेंगे, प्रयास करना होगा कि सभी व्यावसायिक विषय और व्यावहारिक कौशलों (सॉफ्ट स्किल्स) को प्राप्त करें। कला, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में भारत की गौरवशाली परम्परा इस तरह की शिक्षा की ओर बढ़ने में

सहायक होगी। भारत की समृद्ध, विविध प्राचीन और आधुनिक संस्कृति और ज्ञान प्रणालियों और परम्पराओं को संयोजित करने और उससे प्रेरणा पाने हेतु यह नीति बनायी गयी है। भारत की शास्त्रीय भाषाओं और साहित्य के महत्त्व, प्रासङ्गिकता और सुन्दरता की उपेक्षा नहीं की जा सकती है। संस्कृत, संविधान की आठवीं अनुसूची में वर्णित एक महत्त्वपूर्ण आधुनिक भाषा है यदि सम्पूर्ण लैटिन और ग्रीक साहित्य को मिलाकर भी इसकी तुलना की जाए तो भी वह संस्कृत शास्त्रीय साहित्य की बराबरी नहीं कर सकता। संस्कृत साहित्य में गणित, दर्शन, व्याकरण, सङ्गीत, राजनीति, चिकित्सा, वास्तुकला, धातुविज्ञान, नाटक, कविता, कहानी, और बहुत कुछ (जिन्हें "संस्कृत ज्ञान प्रणालियों" के रूप में जाना जाता है) के विशाल भण्डार हैं । विश्व विरासत के लिए इन समृद्ध संस्कृत ज्ञान प्रणाली विरासतों को न केवल पोषण और भविष्य के लिए संरक्षित किया जाना चाहिए बल्कि हमारी शिक्षा प्रणाली के माध्यम से शोध कराकर इन्हें बढ़ाते हुए नए उपयोगों में भी रखा जाना चाहिए। इन सबको हजारों वर्षों में जीवन के सभी क्षेत्रों के लोगों द्वारा, सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि के एक विस्तृत जीवन्त दर्शन के साथ लिखा गया है । संस्कृत को रूचिकर और अनुभावात्मक होने के साथ-साथ समकालीन रूप से प्रासङ्गिक विधियों से पढ़ाया जाएगा । संस्कृत ज्ञान प्रणाली का उपयोग विशेष रूप से ध्वनि और उच्चारण के माध्यम से है। फाउंडेशन और माध्यमिक स्कूल स्तर पर संस्कृत की पाठ्यपुस्तकों को संस्कृत के माध्यम से संस्कृत पढ़ाने (एस.टी.एस.) और इसके अध्ययन को आनन्ददायी बनाने के लिए सरल मानक संस्कृत (एस.एस.एस.) में लिखा जाना है। ध्वन्यात्मकता और उच्चारण वेदों की मौखिक परम्परा पर लागू होता है। वैदिक शिक्षा ध्वन्यात्मकता और उच्चारण पर आधारित है।

कला और विज्ञान के बीच, पाठ्यक्रम और पाठ्येतर गतिविधियों के बीच, व्यावसायिक और शैक्षणिक धाराओं, आदि के बीच कोई स्पष्ट विभेद नहीं किया गया है। सभी ज्ञान की एकता और अखण्डता को सुनिश्चित करने के लिए, एक बहु-विषयक दुनिया के लिए विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कला, मानविकी और खेल के बीच एक बहु-विषयक (Multi-Disciplinary) एवं समग्र शिक्षा के विकास पर बल दिया गया है। नैतिकता, मानवीय और संवैधानिक मूल्य जैसे, सहानुभूति, दूसरों के लिए सम्मान, स्वच्छता, शिष्टाचार, लोकतान्त्रिक भावना, सेवा की भावना, सार्वजनिक सम्पत्ति के

लिए सम्मान, वैज्ञानिक चिन्तन, स्वतन्त्रता, उत्तरदायित्व, बहुलतावाद, समानता और न्याय पर जोर दिया गया है ।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.23 में अनिवार्य विषयों, कौशलों और क्षमताओं का शिक्षाक्रमीय एकीकरण के विषय में निर्देश है। विद्यार्थियों को अपने व्यक्तिगत पाठ्यक्रम को चुनने में बड़ी मात्रा में लचीले विकल्प मिलेगें, लेकिन आज की तेजी से बदलती दुनिया में सभी विद्यार्थियों को एक अच्छे, सफल, अनुभवी, अनुकूलनीय और उत्पादक व्यक्ति बनने के लिए कुछ विषयों, कौशलों और क्षमताओं को सीखना भी आवश्यक है। वैज्ञानिक स्वभाव और साक्ष्य आधारित सोच, रचनात्मकता और नवीनता, सौंदर्यशास्त्र और कला की भावना, मौखिक और लिखित अभिव्यक्ति और संवाद, स्वास्थ्य और पोषण, शारीरिक शिक्षा, शारीरिक दक्षता, स्वास्थ्य और खेल, सहयोग और टीम वर्क, समस्या को हल करने और तार्किक चिन्तन, व्यावसायिक एक्सपोजर और कौशल, डिजिटल साक्षरता, कोडिंग और कम्प्यूटेशनल चिन्तन, नैतिकता और नैतिक तर्क, मानव और संवैधानिक मूल्यों का ज्ञान और अभ्यास, लिङ्ग संवेदनशीलता, मौलिक कर्तव्य, नागरिकता कौशल और मूल्य, भारत का ज्ञान, पर्यावरण सम्बन्धी जागरूकता, जिसमें पानी और संसाधन संरक्षण, स्वच्छता और साफ-सफाई, समसामयिक घटना और स्थानीय समुदायों, राज्यों, देश और दुनिया द्वारा जिन महत्त्वपूर्ण मुद्दों का सामना किया जा रहा है उनका ज्ञान, भाषाओं में प्रवीणता के अलावा, इन कौशलों में सम्मिलित है। बच्चों के भाषा कौशल संवर्धन के लिए और इन समृद्ध भाषाओं और उनके कलात्मक निधि के संरक्षण के लिए, सार्वजनिक या निजी सभी विद्यालयों में सभी छात्रों को भारत की एक शास्त्रीय भाषा और उससे सम्बन्धित साहित्य सीखने का कम से कम दो साल का विकल्प मिलेगा।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.27 में "भारत का ज्ञान" के विषय में महत्त्वपूर्ण निर्देश है। "भारत का ज्ञान" में आधुनिक भारत और उसकी सफलताओं और चुनौतियों के प्रति प्राचीन भारत का ज्ञान और उसका योगदान - भारतीय ज्ञान प्रणाली जैसे गणित, खगोल विज्ञान, दर्शन, योग, वास्तुकला, चिकित्सा, कृषि, इंजीनियरिंग, भाषा विज्ञान, साहित्य, खेल के साथ –साथ शासन, राजव्यवस्था, संरक्षण आदि जहाँ भी प्रासङ्गिक हो, विषयों में सम्मिलित किया जाएगा। इसमें औषधीय

प्रथाओं, वन प्रबन्धन, पारम्परिक (जैविक) फसल की खेती, प्राकृतिक खेती, स्वदेशी खेलों, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में प्राचीन और आधुनिक भारत के प्रेरणादायक व्यक्तित्वों पर ज्ञानदायी विषय हो सकेंगे।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 11.1 में समग्र और बहु-विषयक शिक्षा की ओर प्रवृत्त करने के निर्देश हैं। भारत में समग्र एवं बहु-विषयक विधि से सीखने की एक प्राचीन परम्परा पर बल दिया गया है, तक्षशिला और नालन्दा जैसे विश्वविद्यालयों के उल्लेख सहित 64 कलाओं के ज्ञान के रूप में गायन और चित्रकला, वैज्ञानिक क्षेत्र जैसे रसायनशास्त्र और गणित, व्यावसायिक क्षेत्र जैसे बढ़ई का काम और कपड़े सिलने का कार्य, व्यावसायिक कार्य जैसे औषधि तथा अभियान्त्रिकी और साथ ही साथ सम्प्रेषण, चर्चा और वाद-संवाद करने के व्यावहारिक कौशल (सॉफ्ट स्किल्स) भी सम्मिलित है । यह विचार है कि गणित, विज्ञान, व्यावसायिक विषयों और सॉफ्ट स्किल सहित रचनात्मक मानव प्रयास की सभी शाखाओं को 'कला' माना जाना चाहिए, जिसका मूल भारत है। 'कई कलाओं के ज्ञान' या जिसे आधुनिक समय में प्राय: 'उदार कला' कहा जाता है (अर्थात्, कलाओं की एक उदार धारणा) की इस धारणा को भारतीय शिक्षा में वापस लाया जाना चाहिए, क्योंकि यह ठीक उसी तरह की शिक्षा है जो 21वीं सदी के लिए आवश्यक है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.1 में भारतीय भाषाओं, कला और संस्कृति का संवर्धन हेतु निर्देश हैं। भारत संस्कृति का समृद्ध भण्डार है – जो हजारों वर्षों में विकसित हुआ है, और यहाँ की कला, साहित्यिक कृतियों, प्रथाओं, परम्पराओं, भाषायी अभिव्यक्तियों, कलाकृतियों, ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक धरोहरों के स्थलों इत्यादि में परिलक्षित होता हुआ दिखता है। भारत में भ्रमण, भारतीय अतिथि सत्कार का अनुभव होना, भारत के आकर्षक हस्तशिल्प एवं हाथ से बने कपड़ों को खरीदना, भारत के प्राचीन साहित्य को पढ़ना, योग एवं ध्यान का अभ्यास करना, भारतीय दर्शनशास्त्र से प्रेरित होना, भारत के अनुपम त्यौहारों में भाग लेना, भारत के वैविध्यपूर्ण सङ्गीत एवं कला की सराहना करना और भारतीय फिल्मों को देखना आदि ऐसे कुछ आयाम हैं जिनके माध्यम से दुनिया भर के करोड़ो लोग प्रतिदिन इस सांस्कृतिक विरासत में सम्मिलित होते हैं, इसका आनन्द उठाते हैं और लाभ प्राप्त करते हैं।

यही सांस्कृतिक एवं प्राकृतिक सम्पदा है भारत की इस सांस्कृतिक सम्पदा का संरक्षण, संवर्धन एवं प्रसार, देश की उच्चतर प्राथमिकता होनी चाहिए क्योंकि इस देश की पहचान के साथ-साथ इसकी अर्थव्यवस्था के लिए भी बहुत महत्त्वपूर्ण है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.2 में कलाओं के विषय में निर्देश हैं। भारतीय कला एवं संस्कृति का संवर्धन राष्ट्र एवं राष्ट्र के नागरिकों के लिए महत्त्वपूर्ण है । बच्चों में अपनी पहचान और अपनेपन के भाव तथा अन्य संस्कृतियों और पहचानों की सराहना का भाव पैदा करने के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति जैसी प्रमुख क्षमताओं को बच्चों में विकसित करना जरूरी है। बच्चों में अपने सांस्कृतिक इतिहास, कला, भाषा एवं परम्परा की भावना और ज्ञान के विकास द्वारा ही एकता, सकारात्मक सांस्कृतिक पहचान और आत्म-सम्मान निर्मित किया जा सकता है । अत: व्यक्तिगत एवं सामाजिक कल्याण के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति का योगदान महत्त्वपूर्ण है ।

प्रतिष्ठान की मुख्य वैदिक शिक्षा (वेदों की श्रुति या मौखिक परम्परा/वेद पाठ/वैदिक ज्ञान परम्परा) सहित अन्य आवश्यक आधुनिक विषय- संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि, भारतीय कला, SUPW आदि महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड की पाठ्य पुस्तकों की नींव/स्रोत भारतीय ज्ञान परम्परा (IKS) विषयों की अनुप्रविष्टि (इनपुट) पर आधारित हैं। ये सभी निर्देश राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के दिशानिर्देशों के अनुरूप है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 एवं महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के शैक्षिक चिन्तकों, प्राधिकरणों के परामर्श एवं नीति को ध्यान में रखते हुए प्रारूप पुस्तकें पीडीएफ फॉर्मेट में उपलब्ध करायी गयी हैं। इन पुस्तकों को भविष्य में NCF के अनुरूप अद्यतन किया जाएगा और अन्त में प्रिन्ट रूप में उपलब्ध कराया जाएगा।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के राष्ट्रीय आदर्श वेदविद्यालय के अध्यापक महानुभावों ने, वेद अध्यापन (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परम्परा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) में समर्पित आचार्यों ने, सम्बद्ध वेद पाठशालओं के संस्कृत एवं आधुनिक विषयों के अध्यापकों ने, आधुनिक विषय पाठ्यपुस्तकों को इस रूप में प्रस्तुत करने में पिछले दो वर्षों में अथक परिश्रम किया है। उन सभी को हृदय की गहराई से धन्यवाद समर्पण करता हूँ। राष्ट्र स्तर के विविध विशेषज्ञों ने

समय-समय पर पधार कर पाठ्यपुस्तकों में गुणवत्ता लाने में विशेष सहायता प्रदान की है। उन सभी विशेषज्ञों एवं विद्यालयों के अध्यापक महानुभावों को भी धन्यवाद अर्पित करता हूँ। अक्षर योजना हेतु, चित्राङ्कन हेतु, पेज सेटिंग हेतु मेरे सहयोगी कर्मचारियों ने कार्य किया है, उन सभी को हृदय की गहराई से कृतज्ञता समर्पण करता हूँ।

पाठ्य पुस्तकों की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए रचनात्मक आलोचना सहित सभी सुझावों का स्वागत है।

आपरितोषात् विदुषां न साधु मन्ये प्रयोगविज्ञानम्।
बलवदपि शिक्षितानाम् आत्मन्यप्रत्ययं चेतः॥

(अभिज्ञानशाकुन्तलम् १.०२)

(जब तक विद्वानों को पूर्ण सन्तुष्टि न हो जाए तब तक विशिष्ट प्रयोग को सब तरह से सफल नहीं मानता क्योंकि प्रयोग में विशेष योग्यता प्राप्त विद्वान भी पहले प्रयोग के सफलता में आश्वस्त नहीं रहता है।)

प्रो. विरूपाक्ष वि जड्डीपाल्
सचिव
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

11 से 20 तक पहाड़े

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

विषयानुक्रमणिका

क्र. सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	पूर्णाङ्क	1 - 24
2	भिन्न एवं दशमलव	25 - 52
3	वैदिक गणित	53 - 79
4	आंकड़ो का प्रबन्धन	80 - 99
5	सरल समीकरण	100 - 113
6	रेखा एवं कोण	114 - 128
7	राशियों की तुलना	129 - 150
8	परिमेय संख्या	151 - 160
9	परिमाप और क्षेत्रफल	161 - 186
10	सममिति	187 - 195

- ❖ भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान 196 – 198
- ❖ परिशिष्ट 199

अध्याय 1

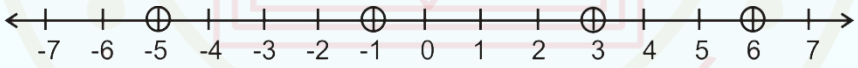
पूर्णाङ्क

प्रिय बटुकों! हम पूर्व की कक्षा में पूर्ण संख्या एवं पूर्णाङ्क संख्याओं का अध्ययन कर चुके हैं और हम जानते हैं कि पूर्णाङ्क संख्या, पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3, ...) एवं ऋणात्मक संख्या (– 1, – 2, – 3, – 4, ...) सम्मिलित होती हैं। आपने पूर्णाङ्क संख्या के गणितीय सङ्क्रियाओं में योग एवं व्यवकलन (अन्तर) करना सीखा था। इस अध्याय में हम पूर्णाङ्क के गुणन एवं विभाजन (गुणन एवं भाग) सङ्क्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

आइये, पूर्व कक्षा में पूर्णाङ्क के बारे में किए गए अध्ययन को दोहराते हैं।

पुनरावलोकन –

नीचे संख्या रेखा पर पूर्णाङ्कों को प्रदर्शित किया गया है।



उपर्युक्त दी गई संख्या रेखा पर कुछ अङ्कित पूर्णाङ्क –5, –1, 3 एवं 6 है। अङ्कित पूर्णाङ्कों को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें। हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर दायीं ओर जाने पर संख्या बढ़ती है।

अतः, $-4 < -2 < 1 < 5$

साथ ही पूर्व कक्षा में यह भी पढ़ा है कि जब हम पूर्णाङ्क संख्याओं को जोड़ते हैं तब-

1. यदि दो धनात्मक पूर्णाङ्कों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है। **उदाहरण :** $(+2) + (+4) = +6$

2. जब दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों को जोड़ा जाता है तो हमें ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है। **उदाहरण :** $(-2) + (-4) = -6$

3. जब एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णाङ्क को जोड़ा जाता है तब बड़े पूर्णाङ्क में से छोटा पूर्णाङ्क घटाया जाता है, साथ ही बड़ी पूर्णाङ्क संख्या का चिह्न लगाया जाता है। **उदाहरण :** $(+4) + (-2) = +2$

4. एक ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक प्राप्त होता है।

   उदाहरण : $-(-4) = +4$

पूर्णाङ्क संख्या के गुणधर्म

- **योग के लिये**

1) योग एवं व्यवकलन के अन्तर्गत संवरक गुण:

जब दो या अधिक पूर्णाङ्क को योग (जोड़) एवं व्यवकलन किया जाता है तो परिणाम (हल) पुनः एक पूर्णाङ्क संख्या प्राप्त होती है अतः हम कह सकते हैं। कि पूर्णाङ्क संख्या योग एवं व्यवकलन के सापेक्ष संवरक नियम का पालन करती है ।

जैसे: योग : $17 + 13 = 30$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

$(-17) + 3 = (-14)$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

व्यवकलन: $7 - 9 = (-2)$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

$7 - (-3) = 10$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a एवं b के लिए हम कह सकते हैं $(a + b)$ तथा $(a - b)$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

2) क्रमविनिमेय गुण:

किन्हीं दो पूर्णाङ्क संख्याओं के योग में क्रम बदल देने पर उसका परिणाम (हल) समान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि पूर्णाङ्क संख्या योग के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुण का पालन करती है ।

जैसे: $8 + (-9) = (-1) = (-9) + 8$

$(-13) + 10 = (-3) = 10 + (-13)$

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a एवं b के लिए हम कह सकते हैं कि-

$$a + b = b + a$$

3) साहचर्य गुण :

पूर्णाङ्क संख्याओं के योग में समूह बदल देने पर परिणाम (हल) समान प्राप्त होता है अतः हम कह सकते हैं कि पूर्णाङ्क संख्या योग के सापेक्ष साहचर्य गुण का पालन करती है।

जैसे: $(-5) + [(-4) + (-3)] = [(-5) + (-4)] + (-3)$

$(-5) + (-7) = (-9) + (-3)$

$(-12) = (-12)$

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a , b एवं c के लिए हम कह सकते हैं कि-

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

3) योज्य तत्समक :

किसी पूर्णाङ्क संख्या में शून्य का योग (जोड़) करने पर वहीं पूर्णाङ्क संख्या प्राप्त होती है अतः हम कह सकते हैं सभी पूर्णाङ्क संख्याओं के लिये 0 योज्य

तत्समक है। **जैसे:** $7 + 0 = 7$

$(-7) + 0 = (-7)$

व्यापक रूप में किसी पूर्णाङ्क संख्या a के लिए-

$$a + 0 = a = 0 + a$$

- **गुणन के लिये**

1) संवरक गुण:

दो पूर्णाङ्क संख्याओं के गुणन करने पर उनका गुणनफल सदैव एक पूर्णाङ्क संख्या प्राप्त होती है। अतः हम कह सकते हैं पूर्णाङ्क संख्या गुणन के सापेक्ष संवरक नियम का पालन करती है ।**जैसे :** $(-20) \times (-10) = 200$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

$(-3) \times (2) = (-6)$ एक पूर्णाङ्क संख्या है।

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a एवं b के लिए हम कह सकते हैं $(a \times b)$ भी एक पूर्णाङ्क संख्या है।

2) साहचर्य गुण :

पूर्णाङ्क संख्याओं के गुणन में संख्याओं के समूह बदल देने पर परिणाम (हल) समान प्राप्त होता है अतः हम कह सकते हैं कि पूर्णाङ्क संख्याओं में गुणन के सापेक्ष साहचर्य गुण का पालन का पालन करती है।

जैसे: $(-3) \times [(-4) \times (-2)] = [(-3) \times (-4)] \times (-2)$

$(-3) \times (8) = (12) \times (-2)$

$(-24) = (-24)$

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a ,b एवं c के लिए हम कह सकते हैं कि-

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

3) क्रमविनिमेय गुण:

किन्हीं दो पूर्णाङ्क संख्याओं के गुणन में क्रम बदल देने पर उनका परिणाम (हल) समान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं पूर्णाङ्क संख्या गुणन के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुण का पालन करती है ।**जैसे:**

$$(-20) \times 3 = 3 \times (-20)$$

$$(-60) = (-60)$$

व्यापक रूप में किन्हीं दो पूर्णाङ्क a एवं b के लिए हम कह सकते हैं कि-

$$\mathbf{a \times b = b \times a}$$

4) शून्य से गुणन :

जब किसी पूर्णाङ्क संख्या में शून्य (0) से गुणा किया जाता है तो गुणनफल में शून्य (0)ही प्राप्त होता है। **जैसे :** $5 \times 0 = 0 = 0 \times 5$

$$(-4) \times 0 = 0 = 0 \times (-4)$$

व्यापक रूप में किसी पूर्णाङ्क संख्या a के लिए-

$$\mathbf{a \times 0 = 0 = 0 \times a}$$

5) गुणात्मक तत्समक :

किसी पूर्णाङ्क संख्या में एक(1) से गुणा करने पर गुणनफल में वहीं पूर्णाङ्क संख्या प्राप्त होती है ।अतः हम कह सकते हैं की एक (1) पूर्णाङ्क संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक है।**जैसे** : $5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$

$$(-4) \times 1 = (-4) = 1 \times (-4)$$

व्यापक रूप में किसी पूर्णाङ्क संख्या a के लिए-

$$\mathbf{a \times 1 = a = 1 \times a}$$

पूर्णाङ्कों के योग – बीजगणितम् में पूर्णाङ्क संख्याओं के योग एवं व्यवकलन करने के रीति बताई गयी है।

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा धनर्णयोरन्तरमेव योगः ।

(बीजगणितम्, धनर्णसङ्कलनम्, पृ. 5)

अर्थात् , ऋणात्मक संख्याओं का योग ऋणात्मक तथा धनात्मक संख्याओं का योग धनात्मक होता है। धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं का अन्तर ही योग होता है।**उदाहरणार्थ :**

1. $(+3) + (4) = +7$ 2. $(-4) + (-3) = -7$
3. $(+7) + (-2) = (+5)$ 4. $-2 + (+8) = (+6)$

पूर्णाङ्कों के व्यवकलन (अन्तर) -

संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च ॥

(बीजगणितम्, धनर्णव्यवकलनम्, पृ. 7)

अर्थात् ,यदि घटने वाली राशि (संशोध्यमान) धनात्मक हो तो ऋणात्मक तथा ऋणात्मक हो तो धनात्मक हो जाती है तथा बाद में **"योग युति..... स्यात"** के आधार पर हल प्राप्त करते हैं।

उदाहरणार्थ :

1. $(-3)-(-3) = -3+3 = 0$
2. $(+4)-(+5) = 4-5 = -1$
3. $(+10)-(+4) = 10-4 = 6$
4. $-12-(-4) = -12+4 = -8$

नीचे दी गई सारणी को पूरा करें -

पूर्णाङ्कों के योग				पूर्णाङ्कों के घटाव		
3	4			3	– 5	
–3	12			4	4	
5	6			4	– 5	
4	–1			–5	1	
–3	4			3	6	

पूर्णाङ्कों की तुलना -

आपको स्मरण होगा कि तुलना चिह्न (< , > एवं =)का प्रयोग कर हम दो पूर्णाङ्क संख्याओं की तुलना करते हैं ।

1.	– 14	<	14		4.	13	>	– 15
2.	13	>	10		5.	20	<	10
3.	– 13	<	10		6.	30	>	– 15

प्रश्नावली 1.1

1) अमरनाथ का तापमान अलग-अलग समय में अङ्कित कर डिग्री सेंटीग्रेड (c^o) में संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया गया है -



1. संख्या रेखा को देखकर निम्न दिनाङ्कों में अमरनाथ का तापमान बताइये ?

   (अ) 26 जनवरी ..... (ब) 25 दिसम्बर .....

   (स) 25 फरवरी ..... (द) 25 मार्च .....

2. क्या 26 जनवरी का तापमान 25 मार्च के तापमान से अधिक है ?
3. सबसे गर्म तापमान किस माह में था ?

2) प्रशान्त बैंक में 500 रुपये जमा करता है। एक महीने बाद 100 रुपये निकाल लेता है। यदि निकाली गई राशि को ऋणात्मक (–) संख्या के रूप में लिखते हैं तो जमा की गई राशि को किस रूप में निरूपित करेंगे ? निकाली गई राशि के बाद कितनी राशि खाते में शेष रहेगी ?

3) हल करें -

1. $(-4) + (+3)$
2. $15 - 8 + 2$
3. $400 + (-100) + 200$
4. $23 - 7 - 5$
5. $-27 + (-3) + 30$
3. $400 - 100 + 3$

4) निम्न में तुलना चिह्न (< , = एवं >) लगाइए -

1. $-4+3+2$ ☐ $1+3+4$
2. $30+(-4)+(-9)$ ☐ $4+(-9)+30$
3. $6+7-13$ ☐ $13-7-6$
4. $0+1-3$ ☐ $1-(-3)+0$
5. $18-12-1$ ☐ $20-10-5$

5) रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए -

1. $15 - 3 = 8 - .....$
2. $18 + ... = 18$
3. $8 - ..... = 0$
4. $12 + 4 = 13 + ...$
5. $15 + ... = 18 + 12$

➢ **सोचिए -**

1. फ्रीज में बर्फ को जमने के लिए कितने तापमान की जरूरत होती है ?
2. गर्म पानी को उबालने के लिए अधिक तापमान की आवश्यकता होती है।

पूर्णाङ्कों का गुणन -

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में पूर्णाङ्क संख्याओं के गुणनफल ज्ञात करने के लिए निम्न श्लोक बताया गया है।

ऋणमृणधनयोर्घातो धनमृणयोर्धनवधो धनं भवति।

शून्यर्णयो: खधनयो: खशून्ययोर्वा वध: शून्यम् ॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त:कुट्टकाध्याय,33)

उपर्युक्त श्लोक में बताया गया है कि ऋणात्मक और धनात्मक अङ्क का गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है।दो धनात्मक एवं ऋणात्मक अङ्कों का गुणनफल धनात्मक प्राप्त होता है, साथ ही शून्य का किसी धनात्मक या ऋणात्मक अङ्क का गुणनफल शून्य प्राप्त होता है। ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त के अतिरिक्त बीजगणित में भी पूर्णाङ्क संख्याओं की गुणन के बारे में बीजगणित गुणनम् पृ. 8 में उल्लेख मिलता है।

(i) धनात्मक पूर्णाङ्कों का ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणन -

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$3 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$

इसी प्रकार,

$$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

गुणन कीजिए :

$3 \times (-5) = 5 \times (-3)$

हल : $3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

या $5 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

❖ **करो और सीखो -**

1. $-5 \times 4 =$ ..... 2. $3 \times -4 =$ .....
3. $2 \times -4 =$ ..... 4. $2 \times -8 =$ .....
5. $-5 \times 6 =$ ..... 6. $3 \times -3 =$ .....
7. $3 \times -6 =$ ..... 8. $7 \times -3 =$ .....

इस विधि का उपयोग करते हुए हमने देखा कि "धनात्मक पूर्णाङ्क को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।"

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणन -

दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णाङ्क होता है। हम दो ऋणात्मक संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) धनात्मक का चिह्न लगाते हैं।**उदाहरण :**

(i) $(-10) \times (-7)$

हल: यहाँ (-10) एवं (-7) दोनों ऋणात्मक पूर्णाङ्क हैं।

तब, $(-10) \times (-7) = +70 = 10 \times 7$

(ii) $(-5) \times (-2)$

हल: = (+ 10) या 10

व्यापक रूप में दो धनात्मक पूर्णाङ्कों a तथा b के लिए-

$$a \times b = (-a) \times (-b) = (-a) \cdot (-b)$$

❖ **करो और सीखो -**

निम्न का गुणन ज्ञात कीजिए -

(i) $(-6) \times (-7)$ (ii) $(-25) \times (-4)$ (iii) $(-9) \times (-7)$

(iii) तीन या अधिक ऋणात्मक संख्या का गुणन -

हमें ज्ञात है कि दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल धनात्मक पूर्णाङ्क होता है। तीन या अधिक ऋणात्मक पूर्णाङ्क का गुणनफल क्या हो सकता है ?

गुणन की क्रमविनिमेयता -

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है । क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णाङ्कों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है ।

निम्नलिखित सारणी को देखिए और पूरा कीजिए -

क्र.	कथन - 1	कथन - 2	निष्कर्ष
1	$7 \times 5 = 35$	$5 \times 7 = 35$	$7 \times 5 = 5 \times 7$
2	$(-1) \times 3 = -3$	$3 \times (-1) =$	
3	$4 \times (-5) = -20$	$(-5) \times 4 = -20$	
4	$6 \times 11 =$	11 × ..... = ...	
6	$10 \times -12 =$	$-12 \times$ ..... = ...	

$$a \times b = b \times a$$

रोचक तथ्य -

निम्नलिखित कथनों एवं परिणामी गुणनफलों पर विचार कीजिए :-

$+1 = (-1) \times (-1)$

$-1 = (-1) \times (-1) \times (-1)$

$+1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$-1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$+1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

उपर्युक्त गुणनफल के परिणामों से अर्थ हुआ, कि यदि पूर्णाङ्क (–1) को सम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल परिणाम (+1) है और यदि पूर्णाङ्क (–1) को विषम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल परिणाम (–1) है ।

आइए , निम्न उदाहरणों के हल देखते हैं -

(i) $(-3) \times (-4)$

हल: $(-3) \times (-4) = 12$

(ii) $(-3) \times (-2) \times (-2)$

हल: $[(-3) \times (-2)] \times (-2)$

$= (6) \times (-2)$

$= -12$

(iii) $(-3) \times (-3) \times (-2) \times (-1)$

हल: $[(-3) \times (-3)] \times [(-2) \times (-1)]$

$= 9 \times 2$

$= 18$

(iv) $(-1) \times (-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$

हल: $[(-1) \times (-1)] \times [(-2) \times (-3)] \times (-4)$

$= 1 \times 6 \times (-4)$

$= [1 \times 6] \times (-4)$

$= 6 \times (-4) \quad = -24$

उपर्युक्त उदाहरणों को देखकर हम कह सकते हैं, कि

(i) दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल धनात्मक पूर्णाङ्क होता है।

(ii) तीन ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

(iii) चार ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल धनात्मक होता है।

(iv) पाँच ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

अतः हम दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि "यदि गुणन के लिए ऋणात्मक पूर्णाङ्कों की संख्या सम हो, तो उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक पूर्णाङ्कों की संख्या विषम होने पर उनके गुणनफल का परिणाम ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।"

❖ **करो और सीखो -**

निम्न को हल करें -

(1) $(-3) \times (-2) \times (-1) =$ (2) $(-2) \times (-3) \times (-1) =$

(3) $(-4) \times (-5) =$ (4) $(-2) \times (-9) =$

पूर्णाङ्कों का शून्य से गुणन -

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में पूर्णाङ्क संख्याओं के साथ शून्य से गुणनफल के सम्बन्ध में निम्न श्लोक मिलता है।

शून्यर्णयो: खधनयो: खशून्ययोर्वा वध: शून्यम् ॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त:कुट्टकाध्याय,33 ब)

उपर्युक्त श्लोक में बताया गया है कि किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णाङ्क को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है। शून्य का शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है।इसके अतिरिक्त शून्य से गुणन की रीति बीजगणितम् (खगुणादिषु करण सूत्रं पृ.5) में भी बताई गयी है जिसे व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णाङ्क a के लिए- $a \times 0 = 0 = 0 \times -a$

$$2 \times 0 = 0 = 0 \times (-2)$$

उदाहरण : गुणन करें: $(-3) \times (-2) \times (-1) \times 0$

हल : $(-3) \times (-2) \times (-1) \times 0$

$= [-3 \times -2] \times [(-1) \times 0]$

$= 6 \times 0$

$= 0$

पूर्णाङ्कों का विभाजन (भाग) –

बीजगणितम् में पूर्णाङ्क संख्याओं के भागफल के सम्बन्ध में निम्न श्लोक मिलता है।

भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम् ।

(बीजगणितम्, भजनम्, पृ. 11)

उपर्युक्त श्लोक से हम समझ सकते हैं कि पूर्णाङ्क संख्याओं के गुणन करने में जो **चिह्नों के गुणन नियम** प्रयोग किये जाते हैं वहीं नियम पूर्णाङ्क संख्याओं के भागफल में भी प्रयोग किये जाते है।

आइये हम उदाहरण समझते हैं, कि विभाजन (भाग) गुणन की विपरीत प्रक्रिया है।

निम्न उदाहरण को देखिए : $4 \times 5 = 20$

$20 \div 4 = 5$ या $20 \div 5 = 4$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि प्रत्येक गुणन कथन $(4 \times 5 = 20)$ के लिए दो विभाजन (भाग) कथन $(20 \div 4 = 5, 20 \div 5 = 4)$ लिख सकते हैं।

क्र.	गुणन कथन	संगत दो भाग कथन
1.	$3 \times -5 = -15$	$(-15) \div 3 = -5, (-15) \div (-5) = 3$
2.	$-2 \times -7 = 14$	$14 \div (-2) = -7, 14 \div (-7) = (-2)$
3.	$3 \times -2 = -6$	....., ...
4.	$(+6) \times (+2) =$	....., ...

नोट : पूर्णाङ्कों का भाग भी पूर्ण संख्याओं की तरह ही करते हैं केवल हमें यह ध्यान रखना होता है कि परिणाम धनात्मक या ऋणात्मक होगा।

व्यापक रूप , $a \div (-b) = (-a) \div b$

जहाँ b या – b शून्य नहीं है।

उदाहरण : 6 को 3 से भाग देकर भागफल ज्ञात कीजिए।

हल : $6 \div 3$

$= \frac{6}{3} = 2$

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में पूर्णाङ्क संख्याओं के विभाजन कर भागफल ज्ञात करने के लिये निम्न श्लोक मिलता है।

धनभक्तं धनमृणहृतमृणं धनं भवति खं खभक्तं खम् ।

भक्तमृणेन धनमृणं धनेन हृतमृणमृणं भवति ॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्तः,कुट्टकाध्यायः 34)

उपर्युक्त श्लोक में पूर्णाङ्क संख्या के विभाजन के बारे में बताया गया है कि धनात्मक को धनात्मक या ऋणात्मक को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से भाग देने पर भागफल धनात्मक संख्या प्राप्त होता है साथ ही धनात्मक को ऋणात्मक अथवा ऋणात्मक को धनात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल ऋणात्मक संख्या प्राप्त होती है।

1) **ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क**

उदाहरण : $(-10) \div 2$

हल : $(-10) \div 2$

$= \frac{(-10)}{2} = (-5)$

2) **धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क**

उदाहरण : $20 \div (-2)$

हल : $20 \div (-2)$

$= \frac{20}{(-2)} = (-10)$

3) **धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क**

उदाहरण : $60 \div 2$

हल : $60 \div 2$

$= \frac{60}{2} = 30$

4) ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क

उदाहरण : $(-100) \div (-50)$

हल : $(-100) \div (-50)$

$= \frac{(-100)}{(-50)} = 2$

❖ **करो और सीखो -**

(i) $\frac{-25}{5}$ (ii) $-25 \div -5$ (iii) $40 \div -20$

BODMAS (कोकाभागुयोघ)

का करके पुनि भाग कर, फिर गुण लेह सुजान ।

ता पीछे धन ऋण कर, भिन्न रीति यह जान ॥

BODMAS (कोकाभागुयोघ) नियम विभिन्न गणितीय समस्याओं जैसे सरलीकरण को हल करने की युक्ति में से एक है।

BODMAS (कोकाभागुयोघ)

को = कोष्ठक : ( ) , { }, [ ]

का = के लिए * : $( )^2$ या $\sqrt{\ }$

* = घाताङ्क

भा = भाग : ÷

गु = गुणा : ×

यो = योग : +

घ = घटाव : –

निम्न को सरल करें -

उदाहरण 1: $3 \times (-2) + 1$

हल : $[3 \times (-2)] + 1$

$= -6 + 1$

$= -5$

उदाहरण 2: $(-4) \div 2 + 3 - 1$

हल : $-2 + 3 - 1$

$= -3 + 3$

$= 0$

उदाहरण 3: $15 \div 3 \times 4 + 3 - 1$

हल : सर्वप्रथम क्रमशः $(\div, \times, +, -)$

$15 \div 3 \times 4 + 3 - 1$

तब, $= 5 \times 4 + 3 - 1$

$= 20 + 3 - 1$

$= 23 - 1$

$= 22$

उदाहरण 4: $2 - 3 \times 4 + 18 \div 3$

हल : सर्वप्रथम क्रमशः (÷, ×, +, –)

$= \quad 2 - 3 \times 4 + 6$

$= \quad 2 - 12 + 6 \quad = \quad 2 - 6 \quad = \quad -4$

प्रश्नावली 1.2

1. **निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात करें -**

(i) $4 \times (-3)$ (ii) $12 \times (-1)$

(iii) 30×10 (iv) $4 \times (-3) \times (-2)$

(v) $(-5) \times (-3) \times (-2)$ (vi) $(-5) \times 0 \times (-1)$

(vii) $(-124) \times 0$ (viii) $(-1) \times (-1)$

(ix) $(-1) \times (-1) \times (-1)$ (x) $(-1) \times (-5) \times (-1)$

2. **पूर्णांक संख्याओं का गुणन कर निम्न सारणी को पूर्ण करें -**

×	4	–2	–1	3
1				
–3				
4				
–2			+2	– 6

3. **निम्न सवालों को हल कर भागफल ज्ञात करें -**

(i) $(-25) \div 5$ (ii) $(-35) \div (-35)$

(iii) $15 \div (-3)$ (iv) $(-28) \div (7)$

(v) $[-6 \div 2] \div [3 \div 1]$ (vi) $[30 \div 5] \div [6 \div (-3)]$

4. **पूर्णाङ्क संख्याओं का भागफल ज्ञात कर सारणी को पूर्ण करें -**

÷	–20	100	–60
–1			
–4			
2			
5			

5. **निम्न को BODMAS का प्रयोग हल करें -**

(1) $2 \times (-4) + 3$ (2) $(-8) \div 2 + 3$

(3) $4 \times (-2) + 3 \times (-1)$ (4) $5 \times (-4) - 20 + 10$

(5) $2 \times 4 \div (-2) + 2$ (6) $12 \div 2 \times 4 + 5 - 3$

(7) $20 \div 5 \times 3 + 4 - 8$ (8) $20 \div 5 \times 2 - 8$

➢ **हमने सीखा -**

1. पूर्णाङ्क संख्याओं के संग्रह में पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3, ...) और उनके ऋणात्मक पूर्णाङ्क (–1, –2, –3, ...) सम्मिलित है।
2. दो धनात्मक पूर्णाङ्क को जोड़ने पर धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णाङ्क को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।
3. एक धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णाङ्क को जोड़ने पर बड़े पूर्णाङ्क में से छोटे पूर्णाङ्क को घटाते हैं। साथ ही बड़े पूर्णाङ्क का चिह्न प्राप्त परिणाम में लगाते हैं।
4. एक ऋणात्मक पूर्णाङ्क का ऋणात्मक एक धनात्मक प्राप्त होता है।

उदाहरण : $-(-9) = 9$ या $+9$

5. पूर्णाङ्कों के गुणन में हमने यह भी सीखा है कि -

1. एक धनात्मक पूर्णाङ्क का ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।

$3 \times (-2) = -6$ या $(-3) \times 2 = -6$

2. ऋणात्मक पूर्णाङ्क को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणा करने पर गुणाफल धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।

$(-2) \times (-3) = 6$ या $+6$

6. पूर्णाङ्क के भाग (विभाजन) की प्रक्रिया में हम देखते हैं कि यदि -

1. धनात्मक पूर्णाङ्क को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से भाग दिया जाए या ऋणात्मक पूर्णाङ्क को धनात्मक पूर्णाङ्क से भाग दिया जाए तो भागफल का परिणाम ऋणात्मक प्राप्त होता है।

$$\frac{-15}{3} = -5$$

2. एक ऋणात्मक पूर्णाङ्क को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से भाग देने पर भागफल धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है ।

$$\frac{(-15)}{(-5)} = 3$$

3. किसी पूर्णाङ्क a के लिए हमनें सीखा कि -

(i) $a \div 0 = \frac{a}{0}$ (परिभाषित नहीं है।)

(ii) $a \div 1 = a$ है।

(iii) $0 \div a = \frac{0}{a}$ है। (यदि $a \neq 0$)

7. BODMAS (कोकाभागुयोघ) का नियम - BODMAS के नियमों में सर्वप्रथम क्रमशः कोष्ठक,का (घाताङ्क), भाग, गुणा, योग एवं घटाव को हल करते हैं।

अध्याय 2

भिन्न एवं दशमलव

वैदिक बटुकों ! आपने पूर्व कक्षा में भिन्न एवं दशमलव के बारे में अध्ययन किया है। भिन्नों के अध्ययन में उचित भिन्न, अनुचित (विषम)भिन्न, मिश्र भिन्न, तुल्य भिन्न तथा समान हर वाले भिन्नों के योग एवं व्यवकलन (अन्तर) के बारे में भी अध्ययन किया है वहीं दशमलव के अध्याय में हमनें दशमलव संख्या की तुलना, योग एवं व्यवकलन का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम पूर्व अध्ययन को पुनरावृत्ति करते हुए भिन्न एवं दशमलव संख्याओं के गुणन एवं भागफल के बारे में अध्ययन करेंगे।

त्र्यविश्च मे त्र्यवी च मे दित्यवाट् च मे दित्यौही च मे

पञ्चाविश्च मे पञ्चावी च मे त्रिवत्सश्च मे त्रिवत्सा

च मे तुर्यवाट् च मे तुर्यौही च मे यज्ञेन कल्पन्ताम् ॥

(यजुर्वेद : 18/26)

अर्थात् , काल की परिभाषा में अवि शब्द का अर्थ आधा वर्ण होता है । यजुर्वेद के उपर्युक्त वेद मन्त्र से भिन्न एवं दशमलव संख्या बनती है । यजुर्वेद मन्त्र में त्र्यवि और पञ्चावि शब्द से डेढ़ एवं ढाई का बोध होता है।जिन्हें भिन्न में 1 $\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ एवं 2 $\frac{1}{2}$ या $\frac{5}{2}$ के रूप में तथा दशमलव में 1.5 एवं 2.5 आदि के रूप में लिखा जाता है।

आइये, पिछली कक्षा के अध्ययन को दोहराते हैं। निम्न में से उचित एवं अनुचित (विषम) भिन्न को पृथक करें।

$$\frac{8}{9}\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ \frac{19}{6}\ ,\ \frac{25}{3}\ ,\ \frac{11}{6}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{9}\ ,\ \frac{7}{3}\ ,\ \frac{19}{16}\ ,\ \frac{9}{3}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ \frac{19}{17}$$

उपर्युक्त भिन्न संख्याओं में से विषम भिन्नों को मिश्रित भिन्न में बदलिए।

उदाहरण : भिन्न $\frac{3}{5}$ की तीन तुल्य भिन्न लिखिए।

हल : $\frac{3}{5}$ की तुल्य तीन भिन्न

(i) $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$

(ii) $\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$

(iii) $\frac{3}{5} = \frac{3\times4}{5\times4} = \frac{12}{20}$

अतः, तुल्य भिन्न $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$, $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

समान भिन्न संख्या के योग एवं व्यवकलन(अन्तर)

लीलावती गणित में भिन्न संख्याओं के योग एवं अन्तर ज्ञात करने की विधि निम्न श्लोक में बताई है।

योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः।

(लीलावती,भिन्न सङ्कलितव्यवकलिते : 3)

अर्थात् , समान हर वाली भिन्न संख्याओं में अंश के मध्य योग एवं अन्तर किया जाता है तथा हर (समान हर)पूर्ववत् रहता है। हर न होने पर, हर के स्थान पर 1 की कल्पना करना चाहिये। जैसे : $\frac{3}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{1}$

उदाहरण : शुभम ने अपने घर की दीवार के $\frac{3}{5}$ भाग का रंगकर्म (पेंट) किया तथा उसकी बहन बुलबुल ने दीवार का $\frac{1}{5}$ भाग पर रंगकर्म (पेंट) किया। उन दोनों ने मिलकर कुल कितना रंगकर्म (पेंट) किया।

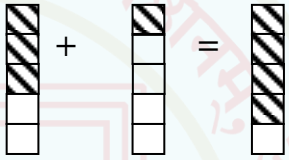
हल : शुभम द्वारा किया गया रंगकर्म (पेंट) $= \frac{3}{5}$

बुलबुल द्वारा किया गया रंगकर्म (पेंट) $= \frac{1}{5}$

तब प्रश्नानुसार, दोनों द्वारा किया गया दीवार का रंगकर्म (पेंट)

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

$= \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$

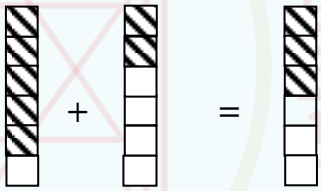


अर्थात्, दोनों ने मिलकर $\frac{4}{5}$ भाग दीवार का रंगकर्म (पेंट) किया।

उदाहरण : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{2}{6}$ को घटाइये ।

हल : $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$

$= \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$ या $\frac{1}{2}$



उपर्युक्त उदाहरणों से आप समान भिन्नों को योग एवं व्यवकलन करना सीख चुके हैं। आइये,अब हम भिन्नों के हर समान नहीं होने की स्थिति में योग और व्यवकलन (अन्तर) करना सीखते हैं। सर्वप्रथम प्राप्त भिन्नों को समान हर में बदलना चाहिए और फिर आगे बढ़ना चाहिए।

भिन्नों का योग एवं व्यवकलन (अन्तर) -

लीलावती गणित में भिन्न संख्याओं के समान हर बनाकर योग एवं व्यवकलन (अन्तर) ज्ञात करने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्यो: समच्छेदविधानमेवम् ।

मिथो हराभ्यामपवर्त्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियाऽत्र गुण्यौ॥

(लीलावती,भिन्नपरिकर्माष्टकम् 1 ,पृ.35)

अर्थात् ,भिन्नों के समान हर बनाने के लिए प्रथम राशि के हर को दूसरी राशि के अंश एवं हर तथा दूसरी राशि के हर को प्रथम राशि के अंश एवं हर से गुणा करके तुल्य हर (समान हर) बनाया जाता है। तुल्य हर होने के बाद यदि भिन्नों को योग करना हो ,तो अंशो का योग कर नीचे में तुल्य हर को रखने से योग होता है और यदि अन्तर करना हो तो अंशों के मध्य अन्तर कर नीचे में तुल्य हर को रखने पर भिन्नों का अन्तर ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{4}$ का योगफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

(हर 5 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य = 20)

अतः, $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

$= \frac{2\times4}{5\times4} + \frac{1\times5}{4\times5}$

$= \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$

उदाहरण : $1\frac{2}{3}$ और $2\frac{1}{5}$ का योग कीजिए ।

हल : $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{5}$

$= \frac{5}{3} + \frac{11}{5}$

मिश्र भिन्न को सरल करने पर

$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

(हर3 व 5 का लघुत्तम समापवर्त्य=15)

अतः, $\frac{5\times5}{3\times5} + \frac{11\times3}{5\times3}$

$= \frac{25}{15} + \frac{33}{15} = \frac{25+33}{15} = \frac{58}{15}$

उदाहरण : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाइये ।

हल : यहाँ दी गई भिन्न $\frac{5}{6}$ एवं $\frac{1}{5}$ के हर समान नहीं होने के कारण सर्वप्रथम तुल्य भिन्न बनाने की आवश्यकता है।

$\frac{5}{6} - \frac{1}{5}$

(हर 6 व 5 का लघुत्तम समापवर्त्य = 30 है।)

अतः, $\frac{5\times5}{6\times5} - \frac{1\times6}{5\times6}$

$= \frac{25}{30} - \frac{6}{30}$

$= \frac{25-6}{30}$

$= \frac{19}{30}$

उदाहरण : $1\frac{1}{6} - 2\frac{1}{4}$ ज्ञात कीजिए ।

हल : $1\frac{1}{6} - 2\frac{1}{4}$

या $\frac{7}{6} - \frac{9}{4}$

(हर 6 व 4 का लघुत्तम समापवर्त्य = 12 है।)

$$= \frac{7\times2}{6\times2} - \frac{9\times3}{4\times3}$$

$$= \frac{14}{12} - \frac{27}{12}$$

$$= \frac{14-27}{12}$$

$$= \frac{-13}{12}$$

भिन्न का भिन्न से गुणन -

दो भिन्नों का गुणन करने के लिये उनके अंशों एवं हरों को अलग-अलग गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को निम्न रूप में लिखा जाता है -

$$\textbf{भिन्नों का गुणनफल} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

हम जानते हैं कि गुणा का अर्थ है बार-बार जोड़ना ।

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा

उदाहरण: यदि हम 2 का $\frac{1}{5}$ में गुणा करना है अर्थात् $\frac{1}{5}$ को दो बार जोड़ना है।

हल: $2 \times \frac{1}{5}$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$$

नोट : भिन्न में 'का' (×) गुणन को निरूपित करता है।

उदाहरण : 20 का $\frac{1}{2}$ कितना होगा।

हल : 20 का $\frac{1}{2}$

$= \quad 20 \times \frac{1}{2}$

$= \quad \frac{20}{2}$

$= \quad 10$

उदाहरण : 20 का $3\frac{1}{2}$ कितना होगा।

हल : 20 का $3\frac{1}{2}$

$= \quad 20 \times \frac{7}{2}$

$= \quad \frac{20\times7}{2}$

$= \quad \frac{140}{2} \quad = \quad 70$

एक भिन्न का दूसरे भिन्न में गुणन –

भिन्न संख्याओं के गुणनफल ज्ञात करने के लिए लीलावती में निम्न श्लोक मिलता है।

अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात्।

(लीलावती,भिन्न गुणनम् : 4 अ)

अर्थात् भिन्न संख्याओं के गुणन में अंशों के गुणनफल को, हरों के गुणनफल से भाग देने पर भिन्न संख्याओं का गुणनफल प्राप्त होता है।

आपने देखा है कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है। **उदाहरणार्थ -**

$3 \times 4 = 12$ और $12 > 4$, $12 > 3$

उपर्युक्त उदाहरण को समझकर दो भिन्नों को गुणन कीजिए एवं प्राप्त गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए ?

आइये ,निम्न सारणी को पूर्णकर हम दो उचित भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{2}{3} < \frac{8}{15}$, $\frac{4}{5} < \frac{8}{15}$	**गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है ।**
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{\ldots}{\ldots}$	... ... , ...	
$\frac{3}{5} \times \frac{\ldots}{8} = \frac{21}{40}$	... ... , ...	
$\frac{2}{\ldots} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	... ... , ...	

आप देखते हैं कि जब दो उचित भिन्नों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल दोनों भिन्नों से कम होता है । अर्थात् दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों में से प्रत्येक से छोटा होता है । पाँच और उदाहरणों को बनाइए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए ।आइये, हम एक उचित और एक विषम भिन्न को गुणा करते हैं ।**उदाहरणार्थ** $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{5}$ भिन्न का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हम देखते हैं कि : $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

यहाँ , $\frac{14}{15} < \frac{7}{5}$ और $\frac{14}{15} > \frac{2}{3}$

प्राप्त गुणनफल($\frac{14}{15}$), गुणन में उपयोग किए गए विषम भिन्न $\frac{7}{5}$ से कम है और उचित भिन्न $\frac{2}{3}$ से अधिक है ।

❖ **करो और सीखो:**

गुणन कर गुणनफल की जाँच कीजिए ।

(क) $\frac{6}{5} \times \frac{2}{7}$ (ख) $\frac{8}{3} \times \frac{4}{5}$

प्रयास कीजिए :-

निम्नलिखित रिक्त-स्थानों को पूर्ण कीजिए।

(अ) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1\times1}{2\times7} = \frac{....}{....}$ (ब) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

(स) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$ (द) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{....}{....} = \frac{....}{....}$

उदाहरण : राम एक घण्टे में किसी पुस्तक का $\frac{1}{3}$ भाग पढ़ता है । वह $2\frac{1}{2}$ घण्टों में पुस्तक का कितना भाग पढ़ लेगा ?

हल : राम द्वारा 1 घण्टे में पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग = $\frac{1}{3}$

इसलिए , $2\frac{1}{2}$ घण्टे में उसके द्वारा पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग = $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

आइए , हम $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$ गुणनफल ज्ञात करते हैं । हम जानते हैं कि $\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 5$

इसलिए, $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$

अत:, राम $2\frac{1}{2}$ घण्टों में पुस्तक का $\frac{5}{6}$ भाग पढ़ेगा।

1. **उचित भिन्नों के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए -**

(i) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$

(ii) $\frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{5 \times 2}{6 \times 5} = \frac{10}{30}$ या $\frac{1}{3}$

2. **अनुचित(विषम) भिन्नों के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए -**

(i) $\frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$

(ii) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{11 \times 3}{2 \times 4} = \frac{33}{8}$

3. **मिश्र भिन्न के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए -**

(i) $1\frac{2}{3} \times 3\frac{2}{2}$

$= \frac{5}{3} \times \frac{8}{2} = \frac{5 \times 8}{3 \times 2} = \frac{40}{6}$ या $\frac{20}{3}$

(ii) $3\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4}$

$= \frac{7}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{7 \times 7}{2 \times 4} = \frac{49}{8}$

लीलावती गणित में दिया गया उदाहरण प्रश्न:

सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं ससप्तमांशद्वितयं भवेत् किम्।

अर्धं त्रिभागेन हतं च विद्धि दक्षोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत्।।

(लीलावती गणित भिन्नगुणने करणसूत्रं, अत्रोद्देशक: 42)

हे मित्र ! यदि आप भिन्न संख्या के गुणन में समर्थ हो तो तृतीयांश से युत दो ($2+\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$) सप्तमांश सहित दो ($2+\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$) से एवं अर्ध ($\frac{1}{2}$) को त्रिभाग ($\frac{1}{3}$) से गुणा कर गुणनफल बताओ।

हल: उपर्युक्त प्रश्न को विद्यार्थी स्वयं हल करें।

उदाहरण : एक आश्रम में कुल 25 विद्यार्थियों में से विद्यार्थियों का $\frac{1}{5}$ भाग सामवेद तथा कुल विद्यार्थियों का $\frac{3}{5}$ भाग अथर्ववेद का अध्ययन करते हैं। तब बताइये:

(i) कितने विद्यार्थी सामवेद का अध्ययन करते हैं ?

(ii) कितने विद्यार्थी अथर्ववेद का अध्ययन करते हैं ?

हल : आश्रम में अध्ययन करने वाले कुल विद्यार्थियों की संख्या = 25 हैं।

(i) कितने विद्यार्थी सामवेद का अध्ययन करते हैं ?

सामवेद में कुल विद्यार्थियों का $\frac{1}{5}$ भाग अध्ययन करता है। तब,

$$= 25 \text{ का } \frac{1}{5}$$

$$= 25 \times \frac{1}{5}$$

$$= 5$$

अतः, सामवेद का अध्ययन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 5 हैं।

(ii) कितने विद्यार्थी अथर्ववेद का अध्ययन करते हैं ?

अथर्ववेद में कुल विद्यार्थियों का $\frac{3}{5}$ भाग अध्ययन करता है। तब,

$$= 25 \text{ का } \frac{3}{5}$$

$$= 25 \times \frac{3}{5}$$

$$= 15$$

अत:,अथर्ववेद का अध्ययन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 15 हैं।

भिन्नों का व्युत्क्रम (प्रतिलोम) -

ऐसी शून्येतर ($\neq 0$) संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है। वे संख्याएँ एक-दूसरे के **व्युत्क्रम** भिन्न कहलाती हैं। भिन्न $\frac{2}{5}$ के अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर $\frac{5}{2}$ प्राप्त होता है। अतः, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$ यहाँ $\frac{2}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है।

इसी प्रकार, 7 का व्युत्क्रम $\frac{1}{7}$ होगा।

➢ **सोचिए :** $\frac{1}{3}$ का व्युत्क्रम क्या होगा ?

एक भिन्न का दूसरी भिन्न से भाग

लीलावती गणित में भिन्न संख्याओं के भागफल ज्ञात करने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

छेदं लवं च परिवर्त्त्य हरस्य शेष: कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च।

(लीलावती,भिन्नभागहारा:, 4 अ)

अर्थात् , भिन्न संख्या के भाग के लिए प्रथम भिन्न संख्या को दूसरी भिन्न संख्या के व्युत्क्रम (अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर) से गुणन कर भागफल प्राप्त होता है।

(i) **पूर्ण संख्या का भिन्न से भाग -**

किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।

उदाहरण : $4 \div \frac{3}{5}$

हम जानते हैं, कि $\frac{3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{3}$ होता है।

हल : $4 \times \frac{5}{3}$

$= \frac{20}{3}$

(ii) **पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग -**

उदाहरण : $\frac{3}{2} \div 4$

हम जानते हैं,कि 4 का व्युत्क्रम $\frac{1}{4}$ होता है।

हल : $\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{8}$

(iii) एक भिन्न से दूसरे भिन्न का भाग -

उदाहरण : $\frac{1}{3} \div \frac{5}{4}$

हल : हम जानते हैं ,कि $\frac{5}{4}$ का व्युत्क्रम $\frac{4}{5}$ होता है।

$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{1 \times 4}{3 \times 5}$

$= \frac{4}{15}$

(iv) मिश्र भिन्नों के मध्य भाग -

$3\frac{1}{2} \div 2\frac{5}{3}$

मिश्र-भिन्नों को सरल करने पर-

$= \frac{7}{2} \div \frac{11}{3}$

हम जानते हैं, कि $\frac{11}{3}$ का व्युत्क्रम $\frac{3}{11}$ होता है।

$= \frac{7}{2} \times \frac{3}{11}$

$= \frac{7 \times 3}{2 \times 11}$

$= \frac{21}{22}$

लीलावती गणित में दिया गया उदाहरण प्रश्न:

सत्र्यंशरूपद्वितयेन पञ्च त्र्यंशेन षष्ठं वद मे विभज्य।

दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिश्चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था।।

(लीलावती गणित भिन्नगुणने करणसूत्रं, अत्रोद्देशक: 43)

हे मित्र! यदि आपकी बुद्धि, भिन्न के भाग में कुशाग्र की तरह तीक्ष्ण हो तो 5 को $(2+\frac{1}{3})$ एवं $\frac{1}{6}$ को $\frac{1}{3}$ भाग देकर भागफल (लब्धि) बताओ।

हल: उपर्युक्त प्रश्न को विद्यार्थी स्वयं हल करें।

प्रश्नावली 2.1

1. **हल कीजिए (योगफल ज्ञात करें) -**

(i) $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$

(iii) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{4}{5}+\frac{3}{2}$

(v) $\frac{9}{2}+\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{2}{4}+\frac{3}{5}$

(vii) $3\frac{1}{2}+2\frac{1}{7}$ (viii) $5\frac{2}{1}+3\frac{5}{2}$

(x) मिश्रित भिन्न $2\frac{4}{5}$ और $3\frac{5}{6}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

2. **सरल कीजिए (व्यवकलन (अन्तर)) -**

(i) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{6}{5}-\frac{5}{6}$ (iv) $\frac{5}{6}-\frac{8}{3}$

(v) $\frac{11}{3}-\frac{5}{6}$ (vi) $\frac{7}{5}-\frac{9}{2}$

(vii) $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{4}$ को घटाइये। (viii) $4\frac{2}{5}-1\frac{2}{5}$ हल करें।

3. **गुणन कर सरलतम रूप में लिखिए -**

(i) $8\times\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}\times 4$ (iii) $\frac{5}{3}\times 6$

(iv) $\frac{5}{7}\times 3$ (v) $\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}$ (vi) $15\times\frac{5}{15}$

(vii) $20\times\frac{3}{4}$ (viii) $\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}$ (ix) $\frac{12}{5}\times 3$

(x) $\frac{18}{2}\times\frac{9}{4}$ (xi) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ (xii) $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}$

4. **निम्नलिखित को हल कीजिए -**

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{5}{7}$ (ii) 27 का $\frac{1}{3}$

(iii) 50 का $\frac{1}{5}$ (iv) 24 का $\frac{3}{4}$

5. **निम्नलिखित के प्रतिलोम (व्युत्क्रम) ज्ञात कीजिए -**

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 3 (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{6}$

6. **निम्नलिखित को भाग कर सरलतम रूप में लिखिए -**

(i) $18 \div \frac{3}{2}$ (ii) $5 \div 3\frac{4}{5}$

(iii) $4 \div 1\frac{1}{4}$ (iv) $4 \div \frac{3}{8}$

7. **निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए -**

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $5\frac{3}{4} \div 4$ (iii) $\frac{6}{15} \div 5$

(iv) $\frac{7}{3} \div 5$ (v) $\frac{2}{7} \div 7$ (vi) $1\frac{1}{2} \div 3$

8. **हल कीजिए -**

(i) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \div \frac{3}{7}$ (iii) $\frac{2}{8} \div \frac{3}{5}$

(iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$ (v) $4\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2}$

9. गीता के 700 श्लोकों में प्रद्युम्न ने $\frac{2}{7}$ तथा वृन्दावन ने $\frac{3}{7}$ भाग कण्ठस्थ किया। तो बताइये कि -

(1) प्रद्युम्न ने कितने श्लोकों को कण्ठस्थ किया ?

(2) वृन्दावन ने कितने श्लोकों को कण्ठस्थ किया ?

दशमलव संख्याओं का पुनरावलोकन

आपने पिछली कक्षा में दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है।

आइए ,पूर्व अध्ययन को दोहराते हैं। निम्न संख्या पढ़िए।

25.2 = पच्चीस दशमलव दो

3.34 = तीन दशमलव तीन चार

13.25 =

3.425 =

निम्न सारणी को देखिए और रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए -

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	सहस्त्रांश	संख्या
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
4	2	5	3	2	1	425.321
6	.....	8	4	.....	8	628.428
.....	1	.....	3	2	.....	514.321
.....	2	.....	.....	2	4	128.324

इन संख्याओं का विस्तारित रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$421.321 = 4\times100 + 2\times10 + 5\times1 + 3\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 1\times\frac{1}{1000}$

इस प्रकार से उपर्युक्त सारणी की संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए ।

दशमलव संख्या की तुलना

छात्रावास से मन्दिर की दूरी 12.37 मीटर तथा विद्यालय की दूरी 12.48 मीटर है तो बताइये छात्रावास से मन्दिर और विद्यालय में से किसकी दूरी अधिक है ?

यदि हम उपर्युक्त स्थिति पर विचार करें तब देखते हैं कि-

1. दशमलव के बायीं ओर की संख्या समान है। अतः हम दशमलव के दायीं ओर के अङ्कों की तुलना करते हैं।

2. दशांश के स्थान से शुरु करते हुए दशमलव बिन्दु के दायीं तरफ के अङ्कों की तुलना करने पर हम यह देखते हैं, कि $3 < 4$

अतः, $12.37 < 12.48$

अतः छात्रावास से विद्यालय की दूरी अधिक है।

❖ **करो और सीखो -**

निम्न में से कौन-सी दशमलव संख्या छोटी है -

1. 356.12 और 356.02
2. 786.237 और 786.257

मुद्रा, लम्बाई और भार की छोटी इकाई को बड़ी इकाई में परिवर्तित करने के लिए हम दशमलव का प्रयोग करते हैं।

13 ग्राम = $\frac{13}{1000}$ कि.ग्रा. = 0.013 कि.ग्रा.

138 पैसे = $\frac{138}{100}$ रुपये = 1.38 रुपये

341 मीटर = $\frac{341}{1000}$ कि.मी = ... कि.मी.

याद रखें -

1 कि.मी = 1000 मीटर

1 कि.ग्रा. = 1000 ग्रा.

1 रुपये = 100 पैसे

1 मीटर = 100 से.मी.

❖ **प्रयास करें -**

1. 53 ग्राम = ... कि.ग्रा. 2. 188 पैसे = ... रुपये

दशमलव संख्या योग एवं व्यवकलन (अन्तर)

उदाहरण: संख्या 21.37 एवं 13.12 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: 21.37

\+ 13.12

34.49

उदाहरण : संख्या 3.4 और 12.460 को जोड़िए -

हल : 3.400

\+ 12.460

15.860

उदाहरण : 5.34 में से 2.78 घटाइये ।

हल :

	इकाई		**दशांश**	**शतांश**
	5	.	3	4
–	2	.	7	8
	2	.	5	6

उदाहरण : 3 में से 0.34 घटाइये।

हल:

	इकाई		**दशांश**	**शतांश**
	3	.	0	0
–	0	.	3	4
	2	.	6	6

पूर्ण संख्या में से संख्या को जोड़ने व घटाने के लिए पूर्ण संख्या के बाद दशमलव लगाकर उतने ही शून्य लगाए जाते हैं, जिसमें दूसरी संख्या में दशमलव के बाद अङ्क हो।

ध्यान रखें - दशमलव के बाद कितने भी शून्य लगाने पर संख्या के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उदाहरण : कृष्णा और प्रशान्त कुर्ते बनवाने के लिए 5 मीटर 75 से.मी. कपड़ा खरीदा। यदि कृष्णा को कुर्ता बनाने में 2 मीटर 50 से.मी. कपड़े की जरूरत होती है तो बताएँ कि प्रशान्त के कुर्ता सिलवाने के लिए कितना कपड़ा शेष बचा ?

हल : कुर्ते के लिए कुल खरीदा गया कपड़ा = 5 मीटर 75 से.मी.

कृष्णा के कुर्ते में काम आया कपड़ा = 2 मीटर 50 से.मी.

तब, प्रशान्त के लिए शेष बचा कपड़ा = 5.75 मीटर

− 2.50 मीटर

3.25 मीटर

अतः कुर्ता सिलवाने के बाद शेष बचा कपड़ा 3 मीटर 25 से.मी. है।

दशमलव संख्या के गुणन

जब किन्हीं दो दशमलव संख्याओं का गुणन किया जाता है तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं की तरह गुणन करते हैं। इसके बाद गुणन होने वाली संख्याओं के दशमलव के दाहिनी ओर से अङ्कों को गिनकर प्राप्त गुणनफल संख्या के दाहिनी ओर से कुल उतने ही अङ्कों के बाद दशमलव लगा देते हैं।

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : 1.1×1.2

सर्वप्रथम हम पूर्ण संख्याओं कि तरह गुणा करते हैं।

$11 \times 12 = 132$

अब दशमलव के बाद के अङ्क गिनकर गुणनफल में दशमलव लगाते हैं।

$1.1 \times 1.2 = 1.32$

उदाहरण : एक घर में प्रतिदिन 1.5 लीटर दूध लिया जाता है तो बताइये 15 दिनों में घर में कुल कितना दूध लिया गया ?

हल : 1 दिन में लिया दूध - 1.5 लीटर

प्रश्नानुसार,

15 दिनों में लिया गया दूध = 15×1.5 या 1.5×15

$= 1.5 \times 15$

$=$ 22.5 लीटर

दशमलव के बाद के अङ्क गिनकर दशमलव लगाने पर = 22.5 लीटर

अतः 15 दिनों में 22 लीटर 500 मि.ली. दूध लिया गया।

❖ **करो और सीखो -**

निम्न के गुणनफल ज्ञात करें -

(1) 3.2×2.3 (2) 1.2×1.5

इन्हें भी समझो -

(1) 1.25×10

पहले सामान्य गुणा करते हैं = 1250

दशमलव के बाद अङ्क गिनकर दशमलव लगाने पर = 12.50

(2) 1.25×100

पहले सामान्य गुणा करते हैं = 12500

दशमलव के बाद अङ्क गिनकर दशमलव लगाने पर = 125.00

(3) 1.25×1000

पहले सामान्य गुणा करते हैं = 125000

दशमलव के बाद अङ्क गिनकर दशमलव लगाने पर = 1250.00

दशमलव संख्याओं के विभाजन (÷) -

दो दशमलव संख्या के भाजन के लिए दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद अङ्कों की संख्या समान कर दशमलव को हटा सकते हैं। उसके बाद सामान्य रीति से भाग देते हैं।

उदाहरण : 2.4 को 2 से भाग दीजिए।

हल : हम जानते हैं,कि 2.4 को $\frac{2.4}{10}$ के रूप में लिखा जा सकता है,क्योंकि 2.4 को विस्तारित रूप में $\left(2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10}\right)$ में लिखा जाता है।

अतः , $2.4 \div 2$

$= \frac{24}{10} \div 2$

(भिन्नों के भाग में हमने सीखा कि भाग के लिए 2 के व्युत्क्रम $\frac{1}{2}$ से गुणा करना होगा।)

$= \frac{24}{10} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{24 \times 1}{10 \times 2} = \frac{24}{20} = 1.2$

इन्हें भी समझे -

उदाहरण : $42.31 \div 10$

हल : $\frac{42.31}{100} \div \frac{10}{1}$

$= \frac{4231}{100} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{4231}{1000} = 4.231$

हम जानते हैं।

(1) दशमलव संख्या को भिन्न बनाना -

$4.2 = \frac{4.2}{10}$

(2) भिन्न संख्या को दशमलव में लिखें -

$\frac{32}{100} = 0.32$

उदाहरण: $42.31 \div 100$

हल : $\frac{42.31}{100} \div \frac{100}{1}$

$= \frac{4231}{100} \times \frac{1}{100}$

$= \frac{4231}{10000}$

$= 0.4231$

उदाहरण: $42.31 \div 1000$

हल : $\frac{42.31}{100} \div 1000$

$= \frac{4231}{100} \times \frac{1}{1000}$

$= \frac{4231}{100000}$

$= 0.04231$

- **किसी पूर्ण संख्या में दशमलव संख्या से भाग -**

उदाहरण: $32 \div 0.8$

हल : $32 \div \frac{8}{10}$

$= 32 \times \frac{10}{8}$

$= \frac{32 \times 10}{8}$

$= \frac{320}{8} = 40$

- **किसी दशमलव संख्या में दशमलव संख्या से भाग -**

उदाहरण: $3.15 \div 0.5$

हल : $3.15 \div 0.5$

$= \frac{3.15}{100} \div \frac{0.5}{10}$

$= \frac{315}{100} \times \frac{10}{5}$

$= \frac{315 \times 10}{100 \times 5}$

$= \frac{3150}{500} = 6.3$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न संख्याओं का योगफल ज्ञात करें -

   1) 3.5 + 4.12 = ☐

   2) 3.123 + 31.21 = ☐

   3) 3.45 + 5.26 = ☐

2. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिये -

   1) 3.4 × 2.7 = ☐

   2) 4.57 × 4.31 = ☐

   3) 13.45 – 12.20 = ☐

3. हर्षिल सब्जी मण्डी से 3 कि.ग्रा. 250 ग्रा. मिर्ची, 12 कि.ग्रा. 750 ग्राम आलू और टमाटर 500 ग्राम खरीदा तो बताइये, हर्षिल ने कुल कितने कि.ग्रा. सब्जी खरीदी ?

4. 48 कि.मी. से 40.7 कि.मी. कितना कम है ?

5. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें -

   1) 7×3.4 2) 81.2×2

   3) 0.08×3 4) 3×0.21

   5) 3.73×0.10 6) 0.37×10

7) 1.42×100 8) 3.42×100

9) 14.3×1000 10) 1.42×1000

6. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई 3.4 से.मी. एवं चौड़ाई 1.2 से.मी. है।

7. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें -

1) 3.4×4.2 2) 6.25×2.5 3) 2.4×0.2

4) 12.3×1.2 5) 0.08×3.4 6) 13.4×0.8

8. निम्न संख्याओं का भागफल ज्ञात कीजिए।

1) $0.8 \div 2$ 2) $0.42 \div 6$ 3) $4.2 \div 10$

4) $98.6 \div 10$ 5) $86 \div 100$ 6) $8.05 \div 100$

7) $1.3 \div 1000$ 8) $4.32 \div 1000$

9. निम्न संख्याओं का भागफल ज्ञात कीजिए।

1) $1.2 \div 0.4$ 2) $3.6 \div 0.6$

3) $1.25 \div 0.5$ 4) $0.48 \div 0.4$

❖ **हमने सीखा -**

1. इस अध्याय में हमने भिन्न एवं दशमलव संख्या (योग एवं अन्तर) गुणा एवं भाग की सङ्क्रिया का अध्ययन किया है। जब भिन्न संख्या के हर समान न हो, तब भिन्न संख्याओं के योग एवं व्यवकलन (अन्तर) करने के पूर्व हमे

प्राप्त भिन्नों को समान हर में बदलना चाहिए और फिर आगे हल करना चाहिए।

2. दो भिन्न संख्याओं के मध्य गुणनफल -

$$\text{भिन्नों का गुणनफल} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

3. एक भिन्न संख्या के अंश और हर को आपस में बदलने देने से **व्युत्क्रम भिन्न** प्राप्त होती है।

जैसे : $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम प्रतिलोम भिन्न $\frac{7}{2}$ प्राप्त होता है।

4. भिन्नों के भागफल में हमने सीखा -

1) एक पूर्ण संख्या को भिन्न से भाजन करने के लिए पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करना।

जैसे : $3 \div \frac{12}{1} = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$

2) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाजन का तात्पर्य है कि भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

जैसे : $12 \div 3 = 12 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$

3) एक भिन्न का दूसरे भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को दूसरे भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

जैसे : $\frac{8}{12} \div \frac{4}{3} = \frac{8}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{8\times3}{12\times4} = \frac{24}{48}$

5. किन्हीं दो दशमलव संख्याओं को जोड़ने व घटाने के पूर्व हम इनके दशमलव के बाद शून्य लगा देते हैं जितने कि दूसरी संख्या के बाद अङ्क हों और बाद में हल करते हैं।

(दशमलव के बाद शून्य लगाने से संख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता है।)

6. दो दशमलव संख्याओं का गुणा हम पूर्ण संख्या की तरह गुणनफल ज्ञात करते हैं। इसके बाद में दशमलव बिन्दु बढ़ाया जाता है।

जैसे : $3.2 \times 10 = 32.0$

$3.2 \times 100 = 320.0$

$1.32 \times 1000 = 1320.00$

7. दो दशमलव संख्याओं के भाजन करने के लिए दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद अङ्कों की संख्या समान कर दशमलव को हटा सकते हैं तथा उसके बाद सामान्य रीति से भाग देते हैं।

8. दशमलव संख्या के 10, 100, 1000 से भाजन के लिए दशमलव बिन्दु से जितने शून्य होते हैं उतनी बार दशमलव बायीं और बढ़ते हैं।

अध्याय 3

वैदिक गणित

प्रिय वैदिक बटुकों ! आपने पूर्व कक्षा में एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण (19 → 18), विनकुलम् संख्या और अन्तयोर्दशकेऽपि सूत्र द्वारा गुणन करना सीखा था। इस अध्याय में हम पूर्व अध्ययन को दोहराते हुए, अन्य सूत्रों के माध्यम से योग, व्यवकलन, गुणन एवं भाग सङ्क्रिया करना सीखेंगे , जिससे आपकी गणना सरल एवं अतिशीघ्र हो जाती है।

आइये, पूर्व किए गए अध्ययन को दोहराते हैं।

1. संख्या 18 का एकाधिकेन ..... है ।
2. संख्या 135 में 3 का एकाधिकेन पूर्वेण करने पर बनने वाली नवीन संख्या 235 होगी।
3. संख्या 105 का एकन्यूनेन 104 होता है।
4. संख्या 1345 में संख्या 4 का एकन्यूनेन पूर्वेण करने पर बनने वाली नवीन संख्या 1245 होगी।
5. विचलन –

(आधार : 10)	(आधार : 100)
13 का विचलन = + 3	102 का विचलन = + 02
95 का विचलन = – 5	103 का विचलन = + 03

6. विनकुलम् संख्या –

- **सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलना -**

1. 7 का विनकुलम् संख्या = $10 - 3 = 1\bar{3}$
2. 28 का विनकुलम् संख्या = $30 - 2 = 3\bar{2}$

- **विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलना -**

1. $2\bar{4}3$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या = 163
2. $3\bar{4}5\bar{3}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या = 2647
3. $5\bar{3}\bar{4}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या = $47\bar{4}$

पुनः बदलने पर

= 466

अतः, $5\bar{3}\bar{4}$ का विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या : 466 है ।

7. गुणन करें -

विलोकनम् सूत्र

34 × 11

= 0 [3 4] 0

0 + 3 / 3 + 4 / 4 + 0

3 / 7 / 4

3 7 4

अन्त्ययोर्दशकेऽपि सूत्र

35 × 35 = 1225

37 × 33 = 1221

❖ **करो और सीखो -**

1. 345 में 4 का एकन्यूनेन पूर्वेण ..... होगा ।
2. 345 में 4 का एकाधिकेन पूर्वेण ..... होगा ।
3. 1005 का विचलन ..... है ।
4. यदि 45 × 11 ..... है ।
5. यदि 47 × 43 ..... है ।

- **सङ्कलन (योग)**

पिछली कक्षा में आपने वैदिक गणित के सूत्र एकाधिकेन से योग करना सीखा था ।

जैसे :

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 5 \\ & \dot{1} & 8 & 3 \\ + & 3 & \dot{5} & 7 \\ \hline 0 & 8 & 8 & 5 \end{array}$$

[$\dot{5}$ का एकाधिकेन = 6]

आइये , अब हम ओर दो सूत्रों से योगफल ज्ञात करना सीखें ।

1. **पूरणापूरणाभ्याम् सूत्र -**

संख्याओं के ऐसे युग्म बनाये, जिससे संख्याएँ 10 के गुणज में बन जाए ।

(10 के गुणज : 10, 20, 30, 40, 50 .....)

उदाहरण : 26 + 14 + 58 + 13 + 22 + 17 का योग कीजिए।

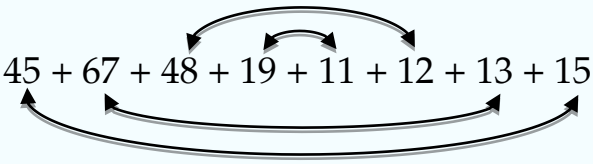
हल : 26 + 14 + 58 + 13 + 22 + 17

= (26 + 14) + (58 + 22) + (13 + 17)

= 40 + 80 + 30 = 150 (अब हम आसानी से योग कर सकते है।)

उदाहरण :योगफल ज्ञात करें: 45 + 67 + 48 + 19 + 11 + 12 + 13 + 15

हल : $45 + 67 + 48 + 19 + 11 + 12 + 13 + 15$



$= (45 + 15) + (67 + 13) + (48 + 12) + (19 + 11)$

$= 60 + 80 + 60 + 30 = 230$

उदाहरण : हम पूरणापूरणाभ्याम् में इस विधि से हल कर सकते हैं।

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 4 \\ & 4 & 3 & 6 \\ & 4 & 3 & 4 \\ + & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

मौखिक रूप से जोड़कर लिखें।

$300 + 400 + 400 + 100 = 1200$

$20 + 30 + 30 + 20 = 100$

$4 + 6 + 4 + 3 = 17$

$= 1200 + 100 + 17 = 1317$

4. निम्न का योगफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 4 & 2 & 1 \\ & 2 & 4 & 5 & 1 \\ & 3 & 1 & 1 & 5 \\ + & 3 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$= 11000 + 1000 + 100 + 8$

$= 12000 + 100 + 8$

$= 12108$

नोट :- उपर्युक्त पद्धति से योग करने की विधि किसी वैदिक गणित की पुस्तक से नहीं दी गई है।

2. सङ्कलन-व्यवकलनाभ्याम् सूत्र द्वारा योग करना –

इस सूत्र में संस्कृत के दो शब्द सम्मिलित है - सङ्कलन (जोड़) और व्यवकलन (अन्तर) यह सूत्र वहाँ प्रयोग किया जाता है। जहाँ संख्याओं के युग्म

आधार (10 के गुणज) नहीं बनाते इस विधि में हम पूर्ण संख्याओं तक पहुँचते हैं।

• **उदाहरण :** योगफल ज्ञात करें : 26 + 17 + 8 + 37 + 11

हल : संख्याओं को पूर्ण बनाने के लिए जोड़ते एवं घटाते हैं ।

= (20 + 6) + (20 – 3) + (10 – 2) + (40 – 3) + (10 + 1)

= (20 + 20 + 10 + 40 + 10) + (6 – 3 – 2 – 3 +1)

= 100 + (–1)

= 100 – 1

= 99

उदाहरण योगफल ज्ञात करें : 103 + 299 + 303 + 597 + 13

हल : (100 + 3) + (300 – 1) + (300 + 3) + (600 – 3) + (10 + 3)

= (100 + 300 + 300 + 600 + 10) + [3 – 1 + 3 – 3 + 3]

= 1310 + 5 (सरल करने पर)

= 1315

- **व्यवकलन (अन्तर) -**

वैदिक गणित के सूत्र **निखिलं नवतः चरमं दशतः** का अर्थ है । 'सभी नौ और अन्तिम दस से' आइये उक्त सूत्र के प्रयोग से हम व्यवकलन करना सीखते हैं ।

यदि हमें 7000 में से 689 घटाना चाहें तो आपको पारम्परिक विधि से कई हासिल के चरणों से गुजरना पड़ता है। जिसमें समय अधिक लगेगा साथ ही गलती होने का भी संशय होगा । आइये, वैदिक गणित विधि से हल करना सीखते हैं । इसमें दाहिने से बायीं ओर गणना करते हैं। बायीं ओर के प्रत्येक शून्य के बदले

में 9 लिखें ओर अन्तिम शून्य के स्थान पर 10 लिखें। शून्य के पहले एक दम बायीं ओर का अङ्क 1 कम हो जाता है।

उदाहरण : 1000 में से 689 को घटाइये।

हल:

	1	0	0	0		0	9	9	10
–	6	8	9		इसे बदलने पर	–	6	8	9
						0	3	1	1

उदाहरण : 7000 और 689 का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल:

	7	0	0	0	0	0		6	9	9	9	9	10
–	1	8	3	5	7		⇔	–	1	8	3	5	7
								6	8	1	7	4	3

उदाहरण : संख्या 856 में से 387 घटाइये ।

हल : 856 – 387

चरण 1: यहाँ, 6 < 7

इसलिए अन्तर 7 – 6 = 1 का पूरक लेते हैं । पूरक (परममित्र) 10 से लिया जाएगा । अतः 1 का पूरक 9 है, जो इकाई स्थान पर लिखा जाएगा ।

			(10)
	8	5	6
–	3	8	7
			9

चरण 2: पुनः 5 जो 8 से छोटा है।

अर्थात्, 5 < 8

अन्तर 8 – 5 = 3 का पूरक लेते हैं

पूरक 9 से 3 को घटाने पर (9 – 3 = 6) पर 6 आएगा।

$$\begin{array}{rccc} & & (9) & (10) \\ & 8 & 5 & 6 \\ - & 3 & 8 & 7 \\ \hline & & 6 & 9 \end{array}$$

चरण 3 8 में से एक कम = 8 – 1 = 7 में से 3 घटाने पर शेष 4 आएगा,

जिसे सैकड़े के स्थान पर लिखेंगे ।

$$\begin{array}{rccc} & 8 & 5 & 6 \\ & 3 & 8 & 7 \\ \hline - & 4 & 6 & 9 \\ & & 6 & 9 \end{array}$$

विलोकनम् - सूत्र द्वारा गुणा - (मनोरंजक गुणन विधियाँ)

1. **किसी संख्या का 5 से गुणा -**

नियम - संख्या के दाहिनी तरफ एक शून्य लगाएँ और उसे 2 से भाग दे या उसका आधा कर दो ।

उदाहरण : हल करें- 42×5

हल : 42 से आगे 1 शून्य लगायें इसे 420 लिखें ।

इसे 2 से भाग दे $= \frac{420}{2} = 210$

या 420 का आधा $= 210$

अतः , $42 \times 5 = 210$

उदाहरण : संख्या 84 को 5 से गुणा करें।

हल : 84 के आगे एक शून्य लगाकर 840 लिखें।

इसे 2 से भाग से $\frac{840}{2} = 420$

अतः , $84 \times 5 = 420$

❖ **करो और सीखो -**

(1) 38×5 (2) 48×5

2. **किसी संख्या का 10 से गुणा -**

$6 \times 10 = 60$

$10 \times 10 = 100$

$78 \times 10 = 780$

3. **किसी संख्या को 100 से गुणा करें -**

$6 \times 100 = 600$

$10 \times 100 = 1000$

$78 \times 100 = 7800$

हम देखते हैं कि मूल संख्या (6, 10, 78) में कोई बदलाव नहीं है।

☞ **10 से गुणा** करने पर इकाई के स्थान पर शून्य आ जाता है एवं मूल संख्या दहाई व दहाई से आगे बड़ जाती है।

☞ **100 से गुणा** करने पर इकाई व दहाई के स्थान पर शून्य आ जाता है एवं मूल संख्या दायीं ओर आगे बड़ जाती है।

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से गुणा -

इस वैदिक सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण का अर्थ **"पूर्व से एक कम द्वारा"** है । दो संख्याओं को गुणा करने की अद्भुत विधि है। लेकिन इसका प्रयोग सीमित है। यह सूत्र निम्नलिखित तीन परिस्थितियों में ही काम करता है।

- जब गुणक में गुण्य के अकों के बराबर 9 हो । आपको गुणक एवं गुण्य का

- जब गुणक में 9 के अङ्क गुण्य से ज्यादा हो ।
- जब गुणक में 9 के अङ्क गुण्य से कम हो ।

स्मरण होगा -

	1 2	गुण्य
×	4	गुणक
	4 8	गुणनफल

आइये, हम उपर्युक्त तीनों स्थिति के सवालों को हल करना सीखते हैं ।

स्थिति 1 - जब गुणक में गुण्य के अङ्कों के बराबर 9 अङ्क हो।

नियम : 1. गुण्य से 1 घटाएँ और परिणाम बायीं ओर लिखें । (बायाँ पक्ष)

2. बायीं ओर के प्राप्त परिणाम को गुणक से घटायें। (दायाँ पक्ष)

उदाहरण : 645 × 999 से गुणा करें।

हल : बायाँ भाग = गुण्य – 1 = 645 – 1 = 644

दायाँ भाग = गुणक – (प्राप्त भागफल)

= 999 – 644 = 355

अतः, 645 × 999

बायाँ भाग / दायाँ भाग

644 / 355

= 644355

उदाहरण 2 : गुणनफल ज्ञात करें : 4563 × 9999

हल : बायाँ भाग 4563 – 1 = 4562

दायाँ भाग 9999 – 4562 = 5437

अतः, 4563 × 9999 = 45625437

स्थिति 2- जब गुणक में 9 अङ्क की संख्या गुण्य से ज्यादा हो ।

नियम - **स्थिति 2 में स्थिति 1** जैसी प्रक्रिया अपनाई जाएगी ।

उदाहरण : 458 × 9999 से गुणा करें।

हल : बायाँ भाग = 458 – 1 = 457

दायाँ भाग = 9999 – 457 = 9542

अतः, 458 × 9999 = 4579542

उदाहरण : 122 × 99999

हल : बायाँ भाग = 122 – 1 = 121

दायाँ भाग = 99999 – 121 = 99878

अतः, 122 × 99999 = 12199878

स्थिति 3 - जब गुणक में गुण्य की अपेक्षा 9 के अङ्कों की संख्या कम हो ।

नियम – (1) गुणक में जितने 9 के अङ्क हो उतने शून्य गुण्य के बाद लिखें।

(2) **नियम** 1 में प्राप्त संख्या को मूल गुणक से घटा दें।

उदाहरण : 1584 × 99 का गुणनफल ज्ञात करें।

हल : गुण्य 1584 में 4 अङ्क है, जबकि गुणक में दो 9 हैं ।

(1) यहाँ गुणक 99 में सिर्फ दो 9 है । अतः 1584 के अन्त में दो शून्य मिलाकर इसे 158400 बना दें ।

(2) 158400 से मूल गुण्य 1584 घटा दें ।

				(9)	(9)	(10)
	1	5	8	4	0	0
–			1	5	8	4
	1	5	6	9	1	6
	1	5	6	8	1	6

अतः , 1584 × 99 = 156816

उदाहरण : 45678 को 999 से गुणन करें।

हल : (1) चूंकि तीन 9 है तो तीन शून्य लगाकर लिखें।

4 5 6 7 8 0 0 0

(2) 45678000 में से 45678 को घटा दें

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 0\ 0\ 0 \\ -\quad\quad 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ \hline 4\ 5\ 6\ 3\ 2\ 3\ 2\ 2 \end{array}$$

❖ **करो और सीखो -**

(1) 234 × 999 (2) 234 × 9999 (3) 234 × 99

किसी संख्या में 11 से गुणा -

नियम -

(1) 11 से गुणा की जाने वाली संख्या के दोनों तरफ 0 लगा दें ।

(2) दो-दो संख्याओं को जोड़ते हुए ,दाहिने से बायीं ओर आगे बढ़ते हुए,जोड़ना शुरू करें।हासिल होने पर आगे, अगले अङ्क के योग में जोड़ दें ।

उदाहरण : 134 × 11 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: उपर्युक्त नियमानुसार :

0 [1 3 4] 0

0 + 1 / 1 + 3 / 3 + 4 / 4 + 0

1 / 4 / 7 / 4

अतः , $134 \times 11 = 1474$

❖ **करो और सीखो -**

(1) 234×11 (2) 131×11

प्रश्नावली 3.1

1. पूरणापूरणाभ्याम् तथा सङ्कलन-व्यवकलन सूत्र का उपयोग करते हुए, योगफल ज्ञात कीजिए।

   (1) 82 + 18 + 96 + 24 + 17 + 13

   (2) 324 + 126 + 249 + 311

   (3) 145 + 25 + 248 + 122

2. निखिलं नवतः चरमं दशतः सूत्र से व्यवकलन(अन्तर) ज्ञात करें -

   (1) 70000 − 1346

   (2) 5434 − 2176

   (3) 9000 − 1345

   (4) 4931 − 1274

3. विलोकनम् सूत्र से गुणन करें -

   (1) 78 × 10 (2) 35 × 100 (3) 432 × 100

4. एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से गुणा कीजिए -

   (1) 81 × 99 (2) 78 × 99 (3) 23 × 999

   (4) 34 × 9999 (5) 134 × 9 (6) 345 × 99

5. गुणनफल ज्ञात करें –

(1) 345×11 (2) 341×11 (3) 345×11

भिन्न -

बटुकों ! भिन्नों से आप परिचित हैं हम भिन्नों को वैदिक गणित के कुछ तरीकों से आसान बनाते हैं। निम्न भिन्नों को ध्यान से देखिए –

- **जब हर समान हो**

उदाहरण : अनुगामी भिन्नों $\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{7}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : इनके हर समान हैं एवं अंश अलग-अलग हैं ।इन भिन्नों को हम बढ़ते क्रम में लिख सकते हैं । $\frac{1}{7} < \frac{3}{7} < \frac{5}{7} < \frac{7}{7}$

अर्थात् ,**समान हर वाली भिन्न संख्याओं में जिस भिन्न का अंश बड़ा होगा ,वह भिन्न बड़ी भिन्न होगी** ।

- **जब अंश समान हो**

उदाहरण : भिन्न $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : दी गई भिन्न संख्याओं के अंश समान है एवं हर अलग –अलग है। यहाँ हर 5 सबसे बड़ी संख्या है अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{5}$ होगी, एवं सबसे बड़ी भिन्न $\frac{1}{2}$ होगी। आरोही क्रम में लिखने पर -

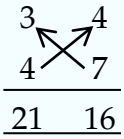
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$$

अर्थात् , **भिन्नों संख्याओं के अंश परस्पर समान होने पर, जिस भिन्न का हर**

बड़ा होगा, वह छोटी भिन्न होगी।

उदाहरण : $\frac{3}{4}$ एवं $\frac{4}{7}$ में बड़ी भिन्न बताइए।

हल :



(1) बिना रेखा के भिन्नों के अंश एवं हर लिखिए।

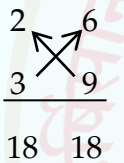
(2) तिर्यक् गुणनफल बने: $3 \times 7 = 21$ तथा $4 \times 4 = 16$

(3) जिस तरफ का गुणनफल बड़ा वह भिन्न बड़ी होगी।

(4) $21 > 16$ अतः, भिन्न $\frac{3}{4} > \frac{4}{7}$

उदाहरण : $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{6}{9}$ में भिन्न का क्रम बताइए।

हल :



(1) तिर्यक् गुणनफल बने $9 \times 2 = 18$ तथा $6 \times 3 = 18$

(2) गुणनफल परस्पर समान अतः, भिन्न बराबर हैं।

(3) अतः यह तुल्य भिन्न है।

(4) $18 = 18$ अतः यह भिन्न $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ है।

भिन्नों का योग

- **यदि भिन्नों का हर परस्पर समान है तो -**

उदाहरण : $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}$ भिन्नों का योग कीजिए।

हल : $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अतः, **भिन्नों का योग** = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

- **यदि दी गई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं है -**

उदाहरण : $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{4}{7}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$

$= \frac{2\times7+3\times4}{3\times7}$ {बनने वाले तिर्यक् गुणन 2×7 तथा 3×4 ; हरों का गुणनफल $3 \times 7 = 15$}

$= \frac{14+12}{21} = \frac{26}{21} = 1\frac{5}{21}$

उदाहरण : $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$= \frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$

यहाँ योग में बनने वाले तिर्यक् गुणन – $1 \times 3 \times 5$, $2 \times 2 \times 5$ तथा $4 \times 2 \times 3$ हैं। एवं हरों का गुणनफल $2 \times 3 \times 5 = 30$ हैं।

$= \frac{15+20+24}{30} = \frac{59}{30} = 1\frac{27}{30}$

- **जब दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों और उनमें उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो।**

उदाहरण : $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{1\times10+1\times4}{4\times10} = \frac{10+4}{40} = \frac{14}{40}$ (सरलतम रूप में बनाने के लिए अंश व हर को समान संख्या में भाग देना होगा।)

$= \frac{14\div2}{40\div2} = \frac{7}{20}$ (सरलतम रूप में लिखने पर)

- **मिश्र भिन्नों का योग (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक् गुणन से)**

मिश्र भिन्नों का योगफल विलोकनम् तथा तिर्यक् गुणन सूत्र के प्रयोग से बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

$= 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}$ (विलोकनम् सूत्र से मिश्र भिन्न के दो भाग करें।)

$1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

$= 1 + \frac{3}{4} + 2 + \frac{1}{3}$

$= \quad (1+2)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right.$ का तिर्यक् गुणन से योग।)

$= \quad 3+\frac{3\times3+1\times4}{4\times3} = 3+\frac{9+4}{12}$

$= \quad 3+\frac{13}{12} \quad = 3+1\frac{1}{12}$ (विलोकनम् का उपयोग)

$= \quad (3+1)+\frac{1}{12} = 4+\frac{1}{12}$ या $4\frac{1}{12}$

भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन सङ्क्रिया भिन्नों की योगफल सङ्क्रिया से मिलती-जुलती है। योग सङ्क्रिया में योग चिह्न (+) एवं व्यवकलन सङ्क्रिया में व्यवकलन चिह्न (–) का उपयोग करेंगे।

- **भिन्नों का व्यवकलन जब भिन्नों का हर परस्पर समान हो।**

उदाहरण : भिन्न $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल : $\frac{3}{7}-\frac{1}{7} = \frac{3-1}{7} = \frac{2}{7}$

- **जब भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनफल नहीं है तो व्यवकलन करना -**

उदाहरण : भिन्न $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल : $\frac{4\times3-5\times2}{5\times3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

उदाहरण : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{1\times3\times5+1\times2\times5-1\times2\times3}{2\times3\times5}$ (भिन्नों के योगफल की तरह हल)

$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{25-6}{30}$

या $= \frac{19}{30}$

- **मिश्र भिन्न का व्यवकलन -**

योगफल सङ्क्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक् गुणन के प्रयोग से मिश्र भिन्नों का व्यवकलन भी ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण : $4\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$ हल कीजिए।

हल : $\left(4+\frac{3}{4}\right) - \left(3+\frac{2}{5}\right)$

$= (4-3) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)$

$= 1 + \frac{3\times5-4\times2}{4\times5} = 1\frac{15-8}{20} = 1\frac{7}{20}$

भिन्न संख्याओं का गुणन

दो भिन्नों का गुणन सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। इनमें दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल को अंश के स्थान एवं हरों का गुणनफल को हर के स्थान पर लिखते हैं ।

उदाहरण : $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{3}{7}$ का गुणफल ज्ञात कीजिए -

हल : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{7} = \frac{1\times3}{2\times7} = \frac{3}{14}$

- **दो मिश्र भिन्नों का गुणन ('एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र से)**

दो मिश्र भिन्नों के चरम अङ्कों का योगफल यदि 1 हो एवं आधार तथा शेष निखिल अङ्क समान हों, तो सामान्य संख्याओं को सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा इनका गुणनफल दो भागों में लिखा जा सकता है।

उदाहरण : $7\frac{1}{4}\times7\frac{3}{4}$ को हल कीजिए।

हल : (1) चरम अङ्क $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ का योगफल $\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(2) शेष निखिल अङ्क परस्पर समान $= 7$ है।

(3) बायाँ भाग = शेष निखिल अङ्क × उसका एकाधिक

$7 \times (7+1)$

(4) दायाँ भाग = चरम अङ्कों का गुणा = $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

अर्थात् = $7 \times (7+1) \,/\, \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

= $7 \times (7+1) + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

= $7 \times 8 + \frac{3}{16}$

= $56 + \frac{3}{16}$ = $56\ \frac{3}{16}$

उदाहरण : भिन्न $15\frac{4}{7} \times 15\frac{3}{7}$ का गुणा कीजिए।

हल : $15\frac{4}{7} \times 15\frac{3}{7}$

= $15 \times (15+1) / \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$

= $15 \times 16 / \frac{12}{49}$

= $240\frac{12}{49}$

- **दो भिन्नों का गुणन ('विलोकनम्' सूत्र से)**

उदाहरण : भिन्न $5\frac{1}{2} \times 6$ का गुणन वैदिक विधि से कीजिए।

हल : $\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times 6$ (विलोकनम् सूत्र)

= $5 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6$ (कोष्ठक का हल)

= $30 + 3$ (6 का आधा = 3)

= 33

उत्तर की जाँच - $5\frac{1}{2} \times 6$

= $\frac{11}{2} \times 6$ $\left(5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}\right)$

$= \quad 11 \times \frac{6}{2}$

$= \quad 11 \times 3 \qquad (6 \text{ का आधा} = 3)$

$= \quad 33$

उदाहरण : मिश्र भिन्न $7\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(7+\frac{1}{2}\right) \times \left(8+\frac{1}{2}\right)$ (विलोकनम् सूत्र)

$= 7 \times 8 + 7 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= 56 + 3\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4}$

$= 56 + 3 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= 63\ \frac{6}{8}$ या $63\ \frac{3}{4}$ $\left(\frac{6\div2}{8\div2} = \frac{3}{4}\right)$

अन्य विधि से : $7 \times 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (7+8)\frac{1}{2}$

$= 56\frac{1}{4} + 15 \times \frac{1}{2}$

$= 56 + 7 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$= 63\frac{3}{4}$

भाग - `निखिलं नवतश्चरमं दशतः' सूत्र (जब भाजक आधार से कम हो)

कार्य प्रणाली -

1. भाजक का निकटतम आधार (10 की घात में) लीजिए और इसके पूरक को मूल भाजक के नीचे भाजक स्तम्भ में लिखिए। **पूरक = आधार – भाजक**। "निखिलं नवतश्चरमं दशतः" विधि की सहायता से पूरक आसानी से प्राप्त

किया जा सकता है, जैसा कि व्यवकलन(अन्तर)अध्याय में समझाया गया है। भाजक का पूरक इसके नीचे लिखिए ।

2. किसी भाज्य के सबसे दायें अङ्क या अङ्क समूह को भाजक के अङ्कों की संख्या के बराबर टुकड़ों में तिर्यक् रेखा खींचकर अलग कीजिए । यह समूह शेषफल समूह कहलाता है और बायें तरफ का समूह भागफल समूह कहलाता है।
3. शेषफल के स्तम्भ में रखी जाने वाली अङ्कों की यह संख्या आधार के शून्यों की संख्या के बराबर होगी।
4. भाजक के पहले अङ्क को दूसरे स्तम्भ में ले जाइए । इससे आपको भागफल का पहला अङ्क मिल जाएगा । भागफल के अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए, और इसे भाज्य के स्तम्भ में भाज्य के पहले अङ्क के आगे रखिए ।
5. भागफल का दूसरा अङ्क प्राप्त करने के लिए दूसरे स्तम्भ के अङ्कों का योग सामान्य रूप से लिखिए ।
6. यह प्रक्रिया तब तक करते रहें, जब तक कि आपको शेषफल स्तम्भ में संख्या न मिलें । अगर शेषफल विभाजक से बड़ा है, तो यही प्रक्रिया शेषफल समूह में करते रहें जब तक कि शेषफल स्तम्भ में अङ्क मूल भाजक से छोटा न हो जाए ।

उदाहरण : 22 को 8 से भाग दीजिए -

हल :

भाजक :	8	2	2
पूरक :	2	↓	4
		2	6

यहाँ ,भाजक आधार = 10 के अधिक निकट है । पूरक = 10 – 8 = 2

सङ्केत :

- चूंकि, आधार में एक शून्य है, इसलिए शेषफल स्तम्भ में तिर्यक् रेखा से एक अङ्क अलग किया जाएगा । उपर्युक्त उदाहरण में, सबसे दायाँ अङ्क 2 तिर्यक् रेखा से अलग किया गया है ।
- भाज्य का पहला अङ्क (2) नीचे ले जाइए । यही भागफल का पहला अङ्क है।
- भागफल के पहले अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए और इसे भाज्य स्तम्भ में, भाज्य के पहले अङ्क के दायीं ओर में रखिए ।
- शेषफल स्तम्भ के दोनों अङ्कों का योग लिखिए । चूंकि, शेषफल 6 भाजक से कम है, इसलिए हमारा विभाजन (भाग)पूर्ण हुआ।
- इस प्रकार, भागफल = 2 , शेषफल = 6

उदाहरण : 10025 को 88 से भाग दीजिए -

हल : आधार = 100

पूरक = 100 – 88 = 12

	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3 (R)
भाजक :	88	100	25
पूरक :	12	12	– –
		1	2 –
			36
		113	81

इस प्रकार, भागफल = 113 एवं शेषफल = 81

सङ्केत:

1. यहाँ भाजक = 88

   निकटतम आधार (10 का गुणज) = 100

   पूरक = आधार – भाजक

   = 100 – 88 = 12

2. अङ्कों को स्तम्भों में ऊपर दिखाए अनुसार, भागफल और शेषफल को अलग करते हुए व्यवस्थित कीजिए। चूंकि, आधार में दो शून्य हैं, इसलिए शेषफल स्तम्भ में भाज्य के सबसे दायें ओर के दो अङ्क होंगे।

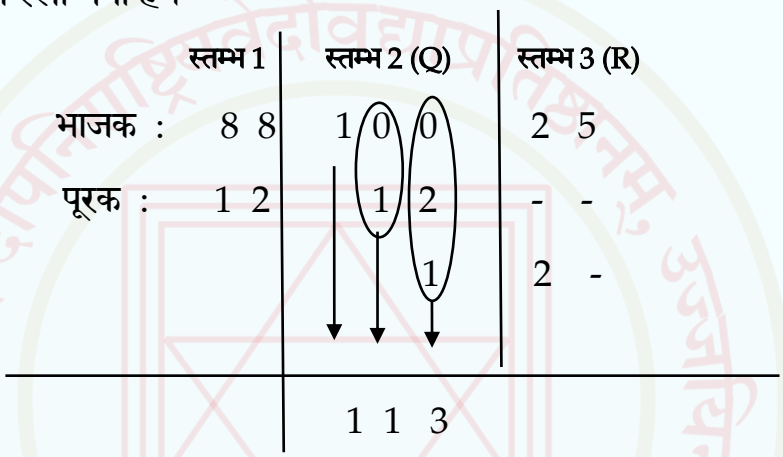
3. **स्तम्भ 2** में 1 को नीचे ले जाइए (भाज्य का पहला अङ्क)। यही भागफल का पहला अङ्क होगा।

4. भागफल के पहले अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए और इसे भाज्य स्तम्भ में, भाज्य के पहले अङ्क के दायीं ओर में रखिए: $12 \times 1 = 12$ को 0 के नीचे रखा गया है।

	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2 (Q)	स्तम्भ 3 (R)
भाजक :	8 8	1 0 0	2 5
पूरक :	1 2	1 2	- -
		1	2 -
			3 6
		1 1	

5. गोलाकार के अङ्कों के योग को नीचे ले जाइए । इससे आपको भागफल का दूसरा अङ्क मिल जाएगा, $0 + 1 = 1$

6. भागफल के दूसरे अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए और इसे भाज्य स्तम्भ में भाज्य के दूसरे अङ्क के दायीं ओर में रखिए । $12 \times 1 = 12$ को दूसरे शून्य के नीचे रखा गया है ।



7. गोलाकार के दूसरे अङ्क को नीचे ले जाइए; इससे आपको भागफल का तीसरा अङ्क मिलेगा । भागफल का तीसरा अङ्क $0 + 2 + 1 = 3$

8. पूरक 12 को तीसरे भागफल (3) से गुणा कीजिए और इसे शेषफल के चौथे अङ्क के दायीं ओर में लिखिए । $12 \times 3 = 36$ को **स्तम्भ 3** में 2 के नीचे रखा गया है ।

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2 (Q)	स्तम्भ 3 (R)
भाजक : 8 8	1 0 0	2 5
पूरक : 1 2	1 2	- -
	1	2 -
	↓ ↓ ↓	3 6
	1 1 3	8 1

9. शेषफल प्राप्त करने के लिए **स्तम्भ** 3 के अङ्कों को जोड़िए। उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराते रहें , जब तक कि इस तरह से शेषफल स्तम्भ में मिलने वाले अङ्क मूल भाजक से कम न हो जाएँ।

यहाँ **स्तम्भ** 3 के अङ्कों का योग = 81 और 81 < 88 (भाजक),

इस प्रकार , भागफल = 113 और शेषफल = 81

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न भिन्नों की तुलना कर चिह्न (> , = एवं <) लगाइए –

   (i) $\frac{3}{5} \square \frac{4}{9}$ (ii) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{5}$ (ii) $\frac{4}{7} \square \frac{5}{3}$

2. भिन्न को आरोही क्रम में लिखिए -

   (i) $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

3. भिन्न को अवरोही क्रम में लिखिए -

   (i) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}$

4. योगफल ज्ञात कीजिए (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक् गुणन से) -

   (i) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{15} + \frac{3}{15}$

   (iii) $\frac{4}{3} + \frac{2}{5}$ (iv) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

5. व्यवकलन (अन्तर) कीजिए (सूत्र - विलोकनम् एवं एक तिर्यक् गुणन से)

   (i) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}$ (iii) $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$

   (iv) $2\frac{3}{6} - 2\frac{1}{6}$ (v) $\frac{5}{9} - \frac{4}{9}$ (vi) $4\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4}$

6. एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र द्वारा गुणा कीजिए -

   (i) $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5}$ (ii) $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ (iii) $3\frac{2}{4} \times 3\frac{1}{4}$

   (iv) $8\frac{2}{5} \times 8\frac{1}{5}$ (v) $4\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{4}$ (vi) $2\frac{1}{5} \times 3$

7. भागफल ज्ञात करें -

   (i) $11011 \div 89$ (ii) $10025 \div 88$

(iii) 22 को 8 से भाग दीजिए। (iv) 110 ÷ 8

➢ **हमने सीखा -**

1. सूत्र पूरणापूरणाभ्याम् के द्वारा दो संख्याओं को पूर्ण के नजदीक बनाकर जोड़ एवं व्यवकलन करना सीखा ।
2. सूत्र सङ्कलन - व्यवकलनाभ्याम् के आधार पर 10 या 10 के गुणज से विचलन कर जोड़ एवं व्यवकलन सीखा ।
3. निखिलं नवतः चरमं दशतः सूत्र का उपयोग कर व्यवकलन करना ।
4. मनोरंजक गुणन विधियों में -
   विलोकनम् सूत्र - 10, 100, 1000 का एवं 5 से गुणा, गुणा के सरल तरीके से मौखिक हो सकते हैं।
5. एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग कर 9 से गुणन की विभिन्न 3 स्थितियों से गुणा करना।
6. भिन्न संख्याओं के योग एवं व्यवकलन (अन्तर) (विलोकनम् तथा एक तिर्यक् सूत्र से हल करना सीखा ।)
7. मिश्र भिन्नों के गुणा (एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र) से सीखा ।
8. निखिलं नवतः चरमं दशतः सूत्र से भाग की वैदिक विधि का अध्ययन किया।

अध्याय 4

आंकड़ों का प्रबन्धन

मेरे स्नेही बटुकों ! आपने अपने दैनिक जीवन में T.V. , रेडियो , समाचार पत्रों में 'आंकड़े' शब्द को सुना होगा या क्रिकेट खेल में रनों (आंकड़े) को बताने वाले ग्राफ को भी देखा होगा । इस अध्याय के माध्यम से समझते हैं कि आंकड़े क्या होते हैं ? उनका प्रबन्धन करना सीखेंगे और साथ ही आंकड़ों का माध्य एवं बहुलक को ज्ञात करना भी सीखेंगे।

आइये, उदाहरण के माध्यम से आंकड़ों को समझते हैं -

एक कक्षा में 15 विद्यार्थी हैं, जिनका 20 अङ्कों का गणित विषय की परीक्षा ली जाती है। परीक्षा में विद्यार्थियों को प्राप्त अङ्क निम्नाङ्कित हैं -

12, 10, 11, 12, 8, 9, 12, 8, 8, 7, 9, 7, 8, 10, 11

ये सभी आंकड़े हैं, जो विद्यार्थी को अङ्क प्राप्त हुए हैं। ये प्राप्त संख्याएँ हमें विद्यार्थियों के अङ्कों की जानकारी उपलब्ध करवाती हैं। आंकड़े संख्याओं के वे संग्रह हैं, जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किए जाते हैं।

❖ **करो और सीखो -**

आपकी कक्षा के मित्रों की उम्र को पता कर लिखिए -

क्या यह सभी आंकड़े हैं ?

आंकड़ों को व्यवस्थित करना -

विद्यालय में वार्षिकोत्सव पर विद्यार्थियों को उनके पसन्द की मिठाई, वितरित करनी है । इसलिए पसंदीदा मिठाई के बारे में जानकारी ली गई ।

लड्डू को L, काजूकतली को V और रसगुल्ले को R से दिखाया गया तो वह इस प्रकार है ।

R, R, L, V, R, R, V, L, R, L, R, V, L, R, V, V, V, V, V

उपर्युक्त आंकड़े को राधाकृष्ण ने निम्न प्रकार से बताया -

L - 4, V - 8, R - 7

अविनाश का प्रारूप इस प्रकार था -

मिठाई का नाम	पसन्द करने वालों की संख्या
रसगुल्ला R	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓
काजू कतली V	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓
लड्डू L	✓ ✓ ✓ ✓

विकास का प्रारूप निम्न प्रकार से है। -

मिठाई का नाम	मिलान चिह्न	पसन्द करने वालों की संख्या
रसगुल्ला R	𝍸 । ।	7
काजूकतली V	𝍸 । । ।	8
लड्डू L	। । । ।	4

यहाँ हमने तीन रूपों में आंकड़े को देखा जिसमें विकास के द्वारा तय किया

गया रूप ठीक है ,क्योंकि विकास ने गणना चिह्नों को पाँच के समूह के रूप में लिखा था, जो कि गिनने में भी आसान था ।

उदाहरण : अमन ने पासा लेकर 20 बार उछाला और नीचे दिखाए अनुसार आंकड़े लिखें –

1, 3, 4, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 3, 6, 4

अमन निम्नलिखित सूचना प्राप्त करना चाहता है ।

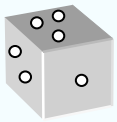
1. पासे की उछाल पर सबसे अधिक बार आने वाला अङ्क
2. पासे की उछाल पर सबसे कम बार आने वाला अङ्क
3. पासे की उछाल पर सम अङ्क कितनी बार आता है ।

अमन ने मिलान-चिह्न का प्रयोग करते हुए सारणी तैयार की -

पासे के अङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता (संख्या)
1	।।	2
2	।।	2
3						4
4					3
5						4
6	𝍸	5

अब पूछे गये प्रश्नों के उत्तर आसानी से दिये जा सकते हैं ।

(**पासा** (dice) - साँप सीढ़ी का खेल खेलते समय हम इसका प्रयोग करते हैं ।

पासा - 

प्रतिनिधि मान -

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य परिचित होंगे। आपने दैनिक जीवन में औसत शब्द निम्न कथनों में सुने या पढ़े होंगे । **जैसे:**

1. क्रिकेट मैच में प्रति ओवर औसत रन-रेट 4 का है ।
2. राहुल औसतन अपने वेद का अध्ययन 4 घण्टे करता है ।

इस प्रकार के कथन हो सकते हैं। आप क्या सोचते हैं ? राहुल हर दिन 4 घण्टे वेद का अध्ययन करता है ? स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है नहीं तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं ?

औसत से हम समझते हैं, कि राहुल प्रत्येक दिन प्रायः 4 घण्टे वेद का अध्ययन करता है। कुछ दिन वह इससे कम भी पढ़ता है और कुछ दिन वह इससे अधिक घण्टे भी पढ़ता है। इस प्रकार से हम अनुभव कर पाते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (Observation) या आंकड़ों के समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति (Central tendency) को दर्शाता है,क्योंकि औसत सबसे कम तथा सबसे ज्यादा के आंकड़ों के बीच में होता है। इसलिए हम कहते हैं,कि औसत आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। इनमें से **एक प्रतिनिधि मान या केन्द्रीय प्रवृत्ति मान को अङ्कगणित माध्य या समान्तर माध्य** (Arthmetic mean) कहते हैं।

अङ्क गणित माध्य या समान्तर माध्य -

आंकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाना वाला औसत,

अङ्कगणित माध्य है। जिसे हम संक्षेप में **माध्य** कहते हैं।

औसत या प्रतिनिधिमान या अङ्कगणित माध्य या समान्तर माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है -

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

उदाहरण: अङ्कित चार क्रमागत दिनों में क्रमशः 2 घण्टे, 5 घण्टे, 6 घण्टे और 3 घण्टे अध्ययन करता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है ?

हल : अङ्कित के पढ़ने का औसत समय होगा -

$$\text{माध्य या औसत} = \frac{\text{अध्ययन में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिसमें अध्ययन किया}}$$

$$= \frac{(2+5+6+3) \text{ घण्टे}}{4}$$

$$= \frac{16}{4} \text{ घण्टे}$$

$$= 4 \text{ घण्टे}$$

अतः , हम कह सकते हैं कि वह प्रतिदिन 4 घण्टे अध्ययन करता है ।

उदाहरण : संख्या 5 एवं 13 का माध्य ज्ञात करें ?

हल : हम जानते हैं,कि $\text{माध्य} = \frac{\text{कुल आंकड़े का योग}}{\text{कुल आंकड़ों की संख्या}}$

$$= \frac{5+13}{2}$$

$$= \frac{18}{2}$$

$$= 9$$

➢ **चर्चा कीजिए -**

1. क्या औसत या माध्य आंकड़ों में सबसे बड़ा है ?
2. क्या यह प्रत्येक आंकड़े से छोटा है ?

आप पाएंगे कि माध्य सबसे बड़े एवं छोटे आंकड़ों के बीच में स्थित होता है ।

आइये, एक अन्य उदाहरण से माध्य को समझते हैं ।

उदाहरण : 1 और 3 का समान्तर माध्य ज्ञात करें ?

हल : समान्तर माध्य $= \frac{\text{कुल आंकड़े का योग}}{\text{कुल आंकड़े की संख्या}}$

$$= \frac{1+3}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

अत: , 1 एवं 3 का समान्तर माध्य 2 होगा ।

❖ **करो और सीखो -**

1. प्रथम तीन विषम संख्या का औसत क्या होगा ?

प्रसार या परिसर -

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अन्तर से हमें प्रेक्षणों के प्रसार का अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़ें या प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है । हम परिणाम को आंकड़ों या प्रेक्षणों का प्रसार परिसर कहते हैं। **परिसर = बड़े प्रेक्षण – छोटे प्रेक्षण**

उदाहरण : एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए -

60, 43, 57, 15, 25, 40

1. खिलाड़ी ने सबसे अधिक रनों की पारी तथा सबसे कम रन की खेली गई पारी में कितने रन बनाए ।
2. खिलाड़ी के द्वारा खेली गई पारियों के रनों का परिसर क्या है ?

3. खिलाड़ी ने औसतन कितने रनों की पारी खेली या रनों का माध्य ज्ञात करें।

हल :1. रनों को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में व्यवस्थित करने पर, हमें ज्ञात होता है।

15, 25, 40, 43, 57, 60

हम उपर्युक्त आंकड़ों को देखकर आसानी से कह सकते हैं कि सबसे अधिक रनों की पारी में 60 रन एवं सबसे कम रनों में 15 रनों की पारी खिलाड़ी द्वारा खेली गई।

2. **रनों का परिसर = (सबसे अधिक रन) – (सबसे कम रन)**

$= 60 - 15 = 45$

3. खिलाड़ी द्वारा प्रत्येक पारियों में बनाए रनों का औसत -

$$\text{औसत} = \frac{\text{कुल पारियों में बनाये रनों का योग}}{\text{कुल खेली गयी पारियों की संख्या}}$$

$$= \frac{15+25+40+43+57+60}{6}$$

$$= \frac{240}{6}$$

$$= 40$$

➢ **प्रयास करें -** आपके द्वारा पूरे सप्ताह भर किये गये वेद अध्ययन के समय (घण्टे में) का औसत ज्ञात करेंगे।

प्रश्नावली 4.1

1. स्वच्छ भारत स्वस्थ भारत विषय पर हुई एक निबन्ध प्रतियोगिता में 20 विद्यार्थी शामिल हुए, जिन्होंने 10 में से निम्नाङ्कित अङ्क प्राप्त किए -

   5, 6, 7, 9, 10, 6, 8, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 5, 6, 8, 9, 9, 5, 6

   इन प्राप्त अङ्कों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके व्यवस्थित कर उत्तर दीजिए ।

   1) 7 एवं 6 अङ्क प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।

   2) 5 अङ्क प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या।

   3) 8 तथा 8 से अधिक अङ्क प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या

2. संख्या 1, 3 व 5 का माध्य (औसत) ज्ञात कीजिए ।
3. प्रथम पाँच सम प्राकृत संख्या 2, 4, 6, 8, 10 का समान्तर माध्य ज्ञात करें ।
4. फल बेचने वाले की एक सप्ताह की शुद्ध आमदनी क्रमशः 300 रुपये ,200 रुपये,350 रुपये, 450 रुपये, 500 रुपये, 400 रुपये तथा 600 रुपये है । फल बेचने वाले की आय का औसत (माध्य) ज्ञात कीजिए।
5. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का औसत एवं परिसर ज्ञात कीजिए ।
6. संख्याएँ 1, 6, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 9 तथा 1 का औसत एवं परिसर ज्ञात कीजिए ।
7. पुस्तकालय में 6 पुस्तकों का मूल्य 46, 40, 50, 58, 62 तथा 90 रुपये है। पुस्तकों के मूल्य का परिसर ज्ञात कीजिए ।
8. आश्रम के प्रांगण में लगाए पेड़ों की संख्या इस प्रकार है,इसके आधार पर

निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए -

आम	✯ ✯ ✯ ✯
नीम	✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯
केले	✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯
पीपल	✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯

1) आम के पेड़ों की संख्या बताइये ?

2) पीपल के पेड़ों की संख्या, केले के पेड़ों से कितनी अधिक है ?

3) नीम के पेड़ क्या 10 से अधिक हैं ?

➢ **महत्त्वपूर्ण बिन्दू**

1. दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है ।
2. माध्य सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्रेक्षणों (आंकड़ों) के बीच में स्थित होता है ।

बहुलक -

प्रतिनिधि मान का दूसरा प्रकार बहुलक है । आंकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। जिस पद की बारम्बारता (संख्या), सबसे अधिक होती है। वह पद **बहुलक** कहलाता है।

आइए, उदाहरण के द्वारा समझते हैं -

उदाहरण : निम्नाङ्कित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए -

4, 5, 5, 2, 4, 7, 4, 4, 4, 3,

हल : समान मान वाली संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर -

2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7

उपर्युक्त प्रक्षेणों के निरीक्षण से स्पष्ट है कि अङ्क 4 सबसे अधिक बार आया है । अतः बहुलक 4 होगा ।

❖ **करो और सीखो -**

निम्नाङ्कित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए -

1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8

उत्तर - बहुलक ..... होगा ।

बड़े व अवर्गीकृत आंकड़ों का प्रबन्धन -

यदि आंकड़ों (प्रेक्षणों) की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही क्रम में लिखकर फिर गिनना इतना आसान नहीं होता है। ऐसी स्थिति में हम आंकड़ों को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं ।

उदाहरण : वेद भूषण द्वितीय वर्ष के 30 वेद पाठियों के अपने-अपने परिवार के सदस्यों की संख्या को यहाँ एक साथ लिखा। यह संख्या निम्नाङ्कित है।

5, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 4, 4, 7, 6, 5, 4, 3, 4,

5, 4, 6, 7, 4, 4, 4, 6, 5, 3, 7, 4, 5, 3, 4

उपर्युक्त आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करें ।

हल : आंकड़ों को सारणी बद्ध करने पर-

परिवार में सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	वेद पाठियों की संख्या (बारम्बारता)
3	||||	4
4	𝍸 𝍸 ||	12
5	𝍸 ||	7
6	||||	4
7	|||	3
	योग	30

उपर्युक्त सारणी को देखकर हम आसानी से बता सकते हैं कि इन आंकड़ों का बहुलक 4 है,क्योंकि सबसे अधिक परिवार में सदस्यों की संख्या 4 है।(सबसे अधिक बारम्बारता 12 है जिसके पद का मान 4 है।)

➢ **चर्चा करें -**

क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं ?

माध्यक (माध्यिका) -

यदि आंकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान **माध्यक (माध्यिका)** कहलाता है।

उदाहरण : विषम पद होने पर निम्नलिखित आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए -

24, 12, 27, 38, 40, 13, 16

हल : आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है ।

12, 13, 16, 24, 27, 38, 40

यहाँ, n = 7 (विषम संख्या)

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ **वें पद का मान**

$= \frac{7+1}{2}$ वें पद का मान

= 4 (चौथे) पद का मान

उपर्युक्त आंकड़ों को व्यवस्थित कर 4 (चौथे) पद का 24 है,अत: माध्यका =24 है।

उदाहरण : दिये गये आंकड़े सम पद होने पर एक चर के मान 78, 56, 22, 34, 45, 52, 39, 68, 69, 84 हैं । इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : आरोही क्रम में लिखने पर 22, 34, 39, 45, 52, 56, 68,69, 78, 84

यहाँ आंकड़ों की संख्या n = 10 (सम संख्या)

$$\text{माध्यिका} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{10}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[5\text{वें पद का मान} + (5+1)\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[5\text{वें पद का मान} + 6\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[52+56]$$

$$= \frac{1}{2}[108] = 54$$

❖ **करो और सीखो**

एक क्रिकेट खिलाड़ी के 5 मैचों की पारियों में बनाये गये रनों का माध्यक ज्ञात करें। 16, 60, 45, 75, 40

दण्ड आलेख -

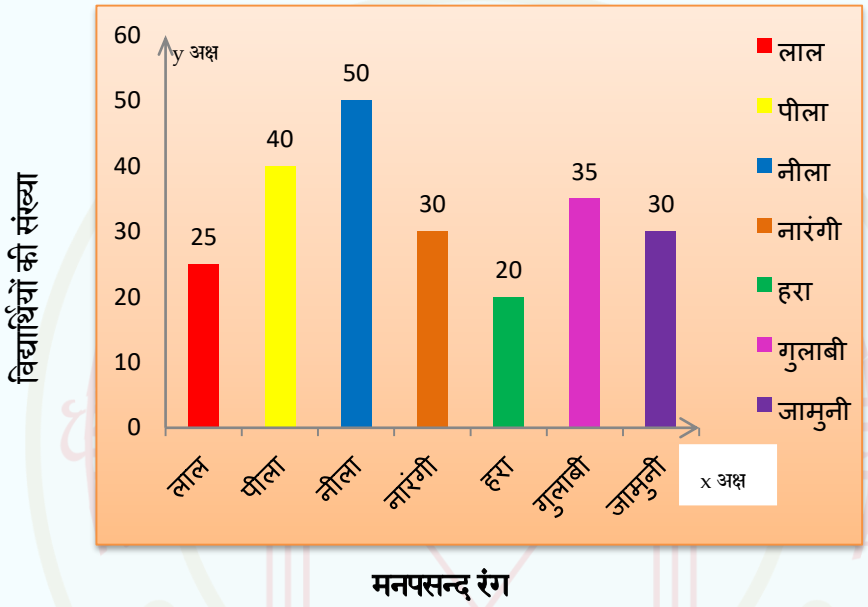
एकत्रित (संग्रहीत) की गई सूचनाओं को एक बारम्बारता बंटन सारणी (Frequence Distribution Table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके और फिर इन सूचनाओं को मिश्रित रूप में चित्रालेखों या दण्ड आलेख (Histographs) के रूप में निरूपित किया जाता है। इससे सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकते हैं।

अतः आंकड़ों को निरूपित करने की अन्य विधि है - दण्ड आलेख। दण्ड आलेख समान लम्बाई ,चौड़ाई दण्ड है। किन्हीं दो दण्डों के बीच की दूरी भी समान होती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दण्ड की लम्बाई दी गई संख्या को दिखाती है। ये दण्ड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर खींचे जा सकते हैं। आंकड़ों को प्रस्तुत करने का यह निरूपण **दण्ड आलेख या दण्ड आरेख** कहलाता है।

दण्ड आलेख पढ़ना -

एक वेद पाठशाला में 230 विद्यार्थियों से उनके मनपसन्द रंग का नाम बताने के लिए कहा गया की पाठशाला में कौन-सा रंग करवाया जाए ? इसके लिए 'x' अक्ष पर रंगों के नाम तथा 'y' अक्ष पर रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थी की संख्या दर्शाई गई है । साथ ही 1 इकाई बराबर 10 विद्यार्थी लेते हैं ।

मनपसन्द रंग	लाल	पिला	नीला	नारंगी	हरा	गुलाबी	जामुनी
विद्यार्थियों की संख्या	25	40	50	30	20	35	30



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

1. यह कौन-सा दण्ड आलेख है ? (क्षैतिज/ऊर्ध्वाधर)
2. वह कौन-सा रंग है ,जिसे सबसे कम पसन्द किया गया ?
3. वह कौन-सा रंग है, जिससे सबसे अधिक विद्यार्थियों ने पसन्द किया ?
   या प्राप्त आंकड़ों से बहुलक ज्ञात करने पर कौन-सा रंग प्राप्त होगा ?
4. सबसे अधिक रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
5. सबसे कम रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?

6. वह कौन-कौन से रंग हैं,जिन्हें समान विद्यार्थियों द्वारा पसन्द किया गया?

हल : 1. हम देख सकते हैं यह दण्ड आलेख ऊर्ध्वाधर दण्डालेख है।

2. इस दण्ड आलेख के अध्ययन करने पर सबसे कम पसन्द किया गया रंग हरा है।

3. विद्यार्थियों द्वारा सबसे अधिक पसन्द किया गया रंग नीला है।
या सबसे अधिक बारम्बारता (50) नीले रंग की है।
अतः बहुलक नीला रंग है।

4. सबसे अधिक रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 50 है।

5. सबसे कम रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 20 है।

6. जामुनी एवं नारंगी रंग ऐसे हैं,जिन्हें समान विद्यार्थियों द्वारा पसन्द किया गया है।

❖ **करो और सीखो -**

राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय, उज्जैन के प्रत्येक वेद के विद्यार्थियों की संख्या नीचे बताई गई। इसे दण्ड आलेख के रूप में दर्शाते हैं।

वेद	ऋग्वेद	यजुर्वेद	सामवेद	अथर्ववेद
विद्यार्थियों की संख्या	40	80	30	50

प्रश्नावली 4.2

1. गणित के 10 विद्यार्थियों द्वारा (20 में से) परीक्षा में प्राप्त अङ्क निम्नलिखित हैं।

   15, 16, 17, 17, 18, 17, 19, 17, 20, 17

   इन आंकड़ों का बहुलक एवं माध्यक (माध्यिका) ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक एवं माध्यक (माध्यिका) ज्ञात करें।

   (क) 10, 12, 13, 13, 12, 13, 13, 14, 15, 13

   (ख) 12, 13 , 24 , 25 , 25 , 3 , 7

3. निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करें।

   7, 6, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 3

4. निम्न आंकड़ों का माध्यक ज्ञात करें।

   (क) 5, 6, 1, 2, 3, 4, 7

   (ख) 2 , 4 , 11 , 12 , 3 , 15, 4 , 9

5. वेद भूषण प्रथम से पञ्चम वर्ष के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आंकड़ों का दण्ड आलेख द्वारा निरूपण कीजिए -

वेद	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	पञ्चम
विद्यार्थियों की संख्या	20	15	30	10	15

6. एक वेद पाठशाला में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आंकड़ों पर विचार कीजिए।

वेद	बास्केट बाल	तैरना	क्रिकेट	खो-खो
विद्यार्थियों की संख्या	30	25	40	20

1. एक उपर्युक्त स्केल (पैमाना) चुनकर, एक दण्ड आलेख खींचिए।
2. सबसे अधिक पसन्द किया जाने वाला खेल कौन-सा है।
3. सबसे कम पसन्द किए जाने वाले खेल के विद्यार्थियों की संख्या है।
4. कितने विद्यार्थियों को तैरना पसन्द हैं ?
5. प्राप्त आंकड़ों के बहुलक में कौन-सा खेल है ?

7. उज्जैन में कोरोना वायरस की जाँच के दौरान पॉजिटिव आए मरीजों की संख्या नीचे दी गई है।

जाँच वाले दिनाङ्क (मई 2020)	13.5.2020	14.5.2020	15.5.2020	16.5.2020	17.5.2020
मरीजों की संख्या	15	12	10	13	33

1. एक उपर्युक्त पैमाना चुनकर जाँच किए गए दिनाङ्क और पॉजिटिव आए मरीजों की संख्या के बीच दण्ड आलेख खींचिए।
2. सबसे कम मरीज किस दिनाङ्क को आए ?

➢ **हमने सीखा -**

1. आंकड़ों के संग्रहण एवं व्यवस्थित करने से हमें अनुभवों को संग्रहित करने तथा निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
2. इकट्ठे किए आंकड़ों को सारणीबद्ध (चित्रालेख) किया जाना आवश्यक है, ताकि इनको सरलता से समझा जा सके।
3. समान्तर माध्य (अङ्क गणितीय माध्य या औसत), बहुलक तथा माध्यक (माध्यिका) आंकड़ों के **प्रतिनिधि मान** हैं।
4. आंकड़ों को समूह (इकट्ठे) जोड़कर आंकड़ों की संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है।

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

5. आंकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। यह एक या एक से अधिक हो सकता है। दूसरे शब्दों में ऐसा पद जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक हो वह पद **बहुलक** कहलाता है।
6. यदि आंकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान **माध्यक (माध्यिका)** कहलाता है।
   - यदि n विषम है तो **माध्यिका** = $\frac{n+1}{2}$ वें पद का मान
   - यदि n सम है तो **माध्यिका** = $\frac{\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$
7. प्रसार या परिसर - आंकड़ों में सबसे बड़े आंकड़े में से सबसे छोटे आंकड़े को घटा कर ज्ञात किया जाता है। वह आंकड़ों का **परिसर या प्रसार** कहलाता है।

   प्रसार या परिसर = सबसे बड़े आंकड़े – सबसे छोटे आंकड़े

विविध प्रश्नावली उदाहरण :

उदाहरण : आंकड़ों का परिसर ज्ञात करें - 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 6, 7

हल : परिसर = सबसे बड़े आंकड़ा – सबसे छोटा आंकड़ा

$= 10 - 1$

$= 9$

अतः उपर्युक्त आंकड़े का परिसर 9 है।

उदाहरण : निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य, परिसर एवं बहुलक ज्ञात करें ।

3, 4, 5, 10, 3, 5

हल : 1. माध्य $= \frac{\text{सभी आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$

$= \frac{3+4+5+10+3+5}{6}$

$= \frac{30}{6} \quad = 5$

2. परिसर = सबसे बड़ा आंकड़ा – सबसे छोटा आंकड़ा

$= 10 - 3$

$= 7$

3. बहुलक ज्ञात करने के लिए -

सर्वप्रथम आंकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर -

3, 3, 4, 5, 5, 10

अतः हम देखकर बता सकते हैं कि बहुलक 3 एवं 5 होगा ,क्योंकि दोनों की बारम्बारता समान है।

उदाहरण : निम्न आंकड़ों का माध्यक (माध्यिका) ज्ञात करें -

आंकड़े 1, 3, 4, 5, 10, 3, 4

हल : **माध्यक के लिए** - आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

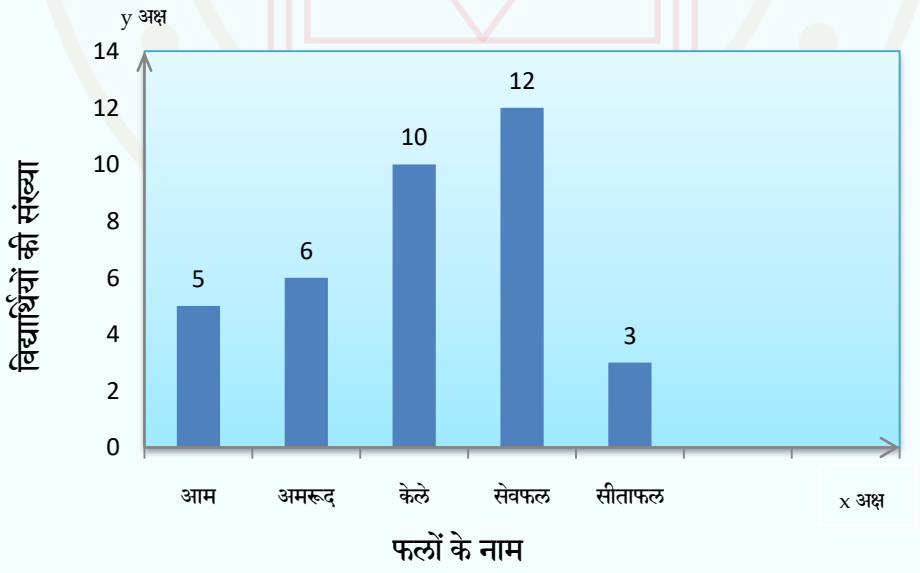
1, 3, 3, 4, 4, 5, 10

हम जानते हैं कि माध्यक सभी आंकड़ों के बीच का मान होता है ।

अतः माध्यक 4 है ।

4. कुछ फल की टोकरीयों में (आम, अमरूद, केले, सेंवफल, सीताफल) हैं, विद्यार्थियों को अपनी पसन्द का फल लेने के लिए कहा गया। जिसके आंकड़े नीचे दर्शाई गयी सारणी में है। दण्ड आलेख में दर्शायें।

फल	आम	अमरूद	केले	सेंवफल	सीताफल
विद्यार्थियों की संख्या	5	6	10	12	3



अध्याय 5

सरल समीकरण

वैदिक बटुकों ! गणित का नवीन अध्याय पढ़ना प्रारम्भ करते हैं, जिसका नाम सरल समीकरण है।

आइये , सरल समीकरण को बौद्धिक खेल (Mind game) के द्वारा समझते हैं। इस खेल के अन्तर्गत पूछे जाने वाले प्रश्नों के उत्तर आपको देने होंगे। आप सभी उत्साही हैं। चलिए खेल शुरू करते हैं।

वह कौन-सी संख्या है, जिसमें 2 को जोड़ देने पर संख्या 8 प्राप्त हो ?

➢ **सोचिए -**

1. वह कौन-सी संख्या होगी, जिसमें 2 को जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है।

   सही-विकल्प का चयन करें -

   आशीष - वह संख्या 6 है, जिसमें 2 को जोड़ने पर 8 मिलता है।

   गुरुजी - वह कैसे ?

   आशीष - अज्ञात संख्या + 2 = 8

   अतः, 6 + 2 = 8

   गुरुजी - बहुत खूब ! बिल्कुल सही उत्तर ।

2. **गुरुजी :** संख्या 10 में किसी संख्या का गुणा किया जाए कि 60 प्राप्त हो ?

   हेमलता - वह संख्या 6 होगी वो, इस निम्न तरह से -

अज्ञात संख्या × 10 = 60

6 × 10 = 60

गुरुजी - बिल्कुल सही उत्तर।

3. वह कौन-सी संख्या है जिसमें 10 से गुणा करके एवं 5 जोड़ने पर 65 प्राप्त होता है ?

सभी विद्यार्थी तार्किक रूप से सोचते हैं। आराध्य पिछले प्रश्न के आधार पर समझाता है।

आराध्य - वह संख्या 6 है।

अज्ञात संख्या × 10 + 5 = 65

6 × 10 + 5 = 65

60 + 5 = 65

गुरुजी - बहुत अच्छे ! आप ने सभी प्रश्नों के सही उत्तर दिए।

आइये, सरल समीकरण बनाना सीखते हैं। भास्कराचार्य द्वारा लिखित बीजगणितम् में सरल समीकरण के बारे में निम्न श्लोक मिलता है।

यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव ।

तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात् त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वाऽपि संगुण्य भक्त्वा ॥

(बीजगणितम्, एकवर्णसमीकरणम्, पृ. 263)

अर्थात् अव्यक्त राशि का मान यावत-तावत आदि समझकर दिये गये प्रश्नानुसार गणित ही सङ्क्रिया करके, तुल्य पक्षों का साधन(हल) करें।

चर राशि -

ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित होता रहता है। वह **चर राशि** (अज्ञात संख्या) कहलाती है।

यावत्तावत्कालको नीलकोऽन्यो वर्ण: पीतो लोहितश्चैतदाद्या:।

अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञा-स्तत्संख्यानं कर्तुमाचार्यवर्यै:।

(बीजगणितम् ,अथाव्यक्त-षड्विधं निरूपयति,7)

अर्थात् अव्यक्त (अज्ञातमान) या चर राशियों की गणना करने के लिए उन की यावत्-तावत्, कालक, नीलक, पीतक और लोहित इत्यादि संज्ञाएँ की है, जिससे सभी अव्यक्त राशियों का पृथक-पृथक परिज्ञान हो। अज्ञात राशि या अज्ञात संख्या या चर राशि को एक अक्षर x से व्यक्त करें । आप x के स्थान पर अन्य अक्षर जैसे $a, b, c, \ldots \ldots \ldots x, y, z$ इत्यादि में से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं ।

जैसे - ऐसी संख्या बतायें जिसमें 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।तब हम देखते हैं ।

अज्ञात राशि $+ 5 = 8$

हम अज्ञात राशि को किसी भी अक्षर $a, b, c, \ldots \ldots \ldots x, y, z$ से दर्शाया जा सकता है। यदि हम y से दर्शाना चाहे तब हम पायेंगे ।

$$y + 5 = 8$$

शुभम - मैंने तो अज्ञात राशि को P से दर्शाया है। क्या यह सही है ?

$P + 5 = 8$

शीतल - शुभम आपने ठीक लिखा है।अज्ञात राशि या चर राशि को किसी भी अक्षर से दर्शाया जा सकता है।

गुरुजी - चलिए अब बताइये, y (अज्ञात राशि) का मान क्या है ?

शुभम - y का मान $= 3$ है।

क्योंकि $3 + 5 = 8$ दोनों पक्ष बराबर होंगे।

गुरुजी - बहुत अच्छे ! बिल्कुल सही।

आपने बौद्धिक खेल के दौरान कई बार अज्ञात संख्या मानी है। जिसमें आपको हर बार अज्ञात राशि का मान अलग-अलग प्राप्त हुआ। अतः **चर राशि या अज्ञात राशि का मान बदलता रहता है।**

अचर राशि

ऐसी राशि, जिसका मान बदलता नहीं है। **अचर राशि** कहलाती है । अचर राशियों को संख्यात्मक मान $0, 1, 2$ ..... 9 से दर्शाया जाता है ।

उदाहरण : $2x$ में 2 एक अचर राशि है तथा x चर राशि है।

$2x$ को हम इस निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं । $= 2 \times x$

यहाँ, x का मान 1 रखने पर $= 2 \times 1 = 2$ प्राप्त होगा।

x का मान 2 रखने पर $= 2 \times 2 = 4$ प्राप्त होगा ।

x का मान 3 रखने पर $= 2 \times 3 = 6$ प्राप्त होगा ।

उपर्युक्त से हम कह सकते हैं कि x चर राशि है जिसका मान बदलता रहता है, जो भी मान x का बदलता हैं तो उसका गुणा हमेशा 2 के साथ किया जाता है।अतः यहाँ 2 अचर राशि है ।

नोट : जब चर एवं अचर राशियों के बीच कोई चिह्न (+ या –) नहीं होता है, तब उनके मध्य गुणा ($\times$) का चिह्न होता है।

❖ **करो और सीखो -**

निम्नाङ्कित में चर एवं अचर राशि को अलग कीजिए -

$x, 2, 3, y, P, Q, 1, 8, 4, 5, R, S, t, V, 1$

चर राशि = ...

अचर राशि = ...

आप चर एवं अचर राशि को समझ चुके हों। एक चर विभिन्न संख्यात्मक मान लें (ग्रहण कर) सकता है । अर्थात् इसका मान निश्चित नहीं होता है। प्रायः चरों अंग्रेजी वर्णमाला x, y, z ... इत्यादि से व्यक्त किया जाता है। चरों से हम व्यंजक (expressions) बनाते हैं। ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन(भाग)जैसी सङ्क्रियाएँ करके बनाए जाते हैं। x से हमने व्यंजक $(3x + 5)$ बनाया यहाँ पहले हमने x का 3 में गुणा किया और फिर गुणनफल में 5 को जोड़ा।

अतः $(3x + 5)$ व्यंजक है । एक व्यंजक का मान, चर के चुने गए मान पर निर्भर करता है । यदि x का मान 1 रखने पर-

$x = 1$ तब, $3x + 5 = 3 \times 1 + 5 = 3 + 5 = 8$

यदि x का मान 2 रखने पर-

$x = 2$ तब, $3x + 5 = 3 \times 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

चर x पर एक प्रतिबन्ध है ।यह बताती है, कि व्यंजक $(3x + 5)$ का मान 8 है। यह प्रतिबन्ध चर $x = 1$ रखने पर सन्तुष्ट होगा ।

जब $x = 2$ रखते हैं तब व्यंजक $(3x + 5)$ का मान $3x + 5 = 11$ है, जो 8 के बराबर नहीं है।

या समीकरण $3x + 5 = 11$ का हल 8 नहीं है ।

अतः, समीकरण $3x + 5 = 11$ में $x = 2$ होने पर समीकरण सन्तुष्ट होता है । $x = 2$ समीकरण का हल कहलाता है ।

समीकरण क्या है ?

समीकरण में, समता, या बराबर या समिका $(equality)$ का चिह्न सदैव होता है । बराबर $(=)$ के चिह्न समीकरण को दो पक्षों में बराबर बांटता है । बराबर $(=)$ के चिह्न के बायीं ओर के पक्ष को बायाँ पक्ष $(L.H.S.)$ तथा बराबर चिह्न के दायीं ओर के पक्ष को दायाँ पक्ष $(R.H.S.)$ होता है ।

उदाहरण :

$\underbrace{3x + 5}_{\text{बायाँ पक्ष } L.H.S.} = \underbrace{11}_{\text{दायाँ पक्ष } R.H.S.}$

$\downarrow$

समता या बराबर चिह्न

उदाहरण :

$\underbrace{8x + 2}_{\text{बायाँ पक्ष } L.H.S.} = \underbrace{4x + 5}_{\text{दायाँ पक्ष } R.H.S.}$

$\downarrow$

समता चिह्न

समता या बराबर चिह्न के बायीं ओर व्यंजक $8x + 2$ है तथा उसके दायीं ओर व्यंजक $4x + 5$ है ।

दूसरे शब्दों में - एक समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध होता है, जिसमें दोनों पक्षों के व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए।

ध्यान रखें :

सरल समीकरण के दोनों व्यंजकों में से कम से कम एक में चर होना चाहिए।

❖ **करो और सीखो -**

निम्नलिखित व्यंजक और समीकरण को चुनिए -

$3x + 2, 4x - 2 = 5, 4x = 1, 8 + 5x, 4x - 1 = 0, 5x + 4,$

$8x - 2 = 1, 4x + 2$

	व्यंजक		**समीकरण**
1.	$3x + 2$	1.	$4x - 2 = 5$
2.		2.	
3.		3.	

सोचिए - हम समीकरण और व्यंजक को कैसे पहचान सकते हैं ?



कथनों को समीकरण का रूप लिखना -

आइये, उदाहरण के द्वारा समझते हैं।

उदाहरण : किसी संख्या में 4 जोड़ने पर 20 प्राप्त होता है ?

हल : मान लीजिए वह अज्ञात संख्या x है। x और 4 को जोड़ने पर $x + 4$ है ।

प्रश्नानुसार योग 20 है ।

अतः, वाञ्छित समीकरण $x + 4 = 20$ है ।

उदाहरण : यदि किसी संख्या के 6 गुणा में से आप 5 घटायें तो 7 प्राप्त होता है ।

हल : अब मान लें कि यह संख्या y है। y को 6 गुणा करने पर $6y$ प्राप्त होता है ।

$6y$ में से 5 घटाने पर $(6y - 5)$ प्राप्त होगा यह परिणाम 7 है ।

अतः, वाञ्छित समीकरण $6y - 5 = 7$ है।

उदाहरण : P का एक चौथाई में 7 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।

हल : P का एक चौथाई $= \frac{P}{4}$ है ।

उपर्युक्त के प्रश्नानुसार P के एक चौथाई $\left(\frac{P}{4}\right)$ में 7 जोड़ने पर $\left(\frac{P}{4} + 7\right)$ है ।

यह 8 के बराबर है ।अतः, वाञ्छित समीकरण $\frac{P}{4} + 7 = 8$ है ।

उदाहरण : यदि किसी संख्या के 3 गुणा में से 4 घटाने पर 5 प्राप्त होता है ।

हल : मान लीजिए वह संख्या Z है। Z को 3 से गुणा करने पर $3Z$ प्राप्त होता है ।

$3Z$ में से 4 घटाने पर $(3Z - 4)$ प्राप्त होगा। यह परिणाम 5 के बराबर है।

अतः, वाञ्छित समीकरण $3Z - 4 = 5$ है।

समीकरणों से कथन के रूप में बदलिए -

(1) $x - 4 = 5$ (2) $5p = 25$

(3) $3x + 7 = 11$ (4) $\frac{m}{5} = 4$

हल : 1. x में से 4 घटाने पर 5 प्राप्त है।

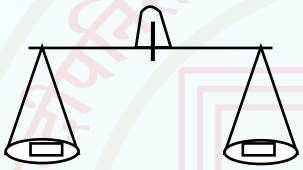
2. एक संख्या p का पाँच गुणा 25 है।

3. किसी संख्या x का तीन गुणा में 7 जोड़ने पर 11 प्राप्त होता है।

4. किसी संख्या m के $\frac{1}{5}$ वें भाग करने पर 4 प्राप्त होता है।

एक समीकरण को हल करना -

एक समीकरण को एक तोलने वाली तराजू या तुला $(balance)$ समझा जाता है। एक समीकरण पर एक गणितीय सङ्क्रिया $(+, -)$ करना इस प्रकार समझना चाहिए। जैसे कि तोलने वाली तराजू के दोनों पलड़ों के बराबर बांट ड़ालना या उनसे बराबर बांट निकाल लेना।



बायाँ पक्ष **दायाँ पक्ष**

(एक सन्तुलित समीकरण तराजू जैसी है, जिसके दोनों पलड़ों पर बराबर बांट रखे हों।)

बीजगणितम् में सरल समीकरण को हल करने के पूर्व कुछ बातों को ध्यान में रखने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

एकाव्यक्तं शोधयेद् अन्यपक्षाद् रूपाण्यन्यस्य इतरस्माच्च पक्षात् ।
शेषाव्यक्तेन उद्धरेद् रूपशेषं व्यक्तं मानं जायते ऽव्यक्ता राशेः।।
अव्यक्तानां द्वयादिकानामपीह ,यावत्तावद् द्वयादिनिघ्नं हृतं वा।
युक्तोनं वा कल्पयेद् आत्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेव विदित्वा।

(बीजगणितम्,एकवर्णसमीकरणम्, पृ. 263)

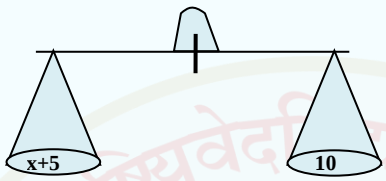
उपर्युक्त बीजगणितम् के श्लोक की पंक्ति से अर्थ स्पष्ट है कि एक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि-

1. समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।

2. समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

आइये, निम्न समीकरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण : समीकरण $x + 5 = 10$ में x का मान ज्ञात कीजिए ।



इसी समीकरण के दोनों पक्षों में से 5 घटाते पर -

नवीन बायाँ पक्ष : $x + 5 - 5 = x$

तथा

नवीन दायाँ पक्ष : $10 - 5 = 5$

दोनों पक्षों को 5 से इसलिए घटाया गया क्योंकि 5 घटाने पर बायाँ पक्ष x रह जाता है। चूंकि इससे सन्तुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसलिए हमें प्राप्त होता है।

नवीन बायाँ पक्ष = नवीन दायाँ पक्ष

$x = 5$

अतः समीकरण $x + 5 = 10$ में x का मान 5 है।

उदाहरण : समीकरण $x - 3 = 10$ को हल कीजिए ।

हल : दिया है : $x - 3 = 10$

बायाँ पक्ष $= x - 3$ तथा दायाँ पक्ष $= 10$

(समीकरण के दोनों पक्षों में 3 को जोड़ने पर)

$x - 3 + 3 = 10 + 3$

$x = 13$

अतः, समीकरण का हल $x = 13$ है।

उदाहरण : हल कीजिए : $3P = 15$

हल : $3P = 15$

अब दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

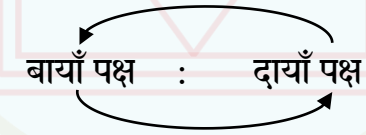
$$\frac{3P}{3} = \frac{15}{3}$$

अतः, $P = 5$ जो इस समीकरण का हल है।

समीकरण का हल ज्ञात करना मतलब उस समीकरण जो चर x, y, z ... इत्यादि कुछ भी आ रहा है। उस चर का मान ज्ञात करना ।

आइये , स्थापन विधि से चर राशि का मान ज्ञात करना सीखते हैं। इस विधि में एक पक्ष चर और दूसरे पक्ष में संख्या लेते हैं।

यदि बायें पक्ष की किसी संख्या को दायें पक्ष तथा दायें पक्ष की किसी संख्या को बायें पक्ष में ले जाना चाहते हैं तो चिह्न परिवर्तित हो जाते हैं।



$+$	$-$
$-$	$+$
$\times$	$\div$
$\div$	$\times$

उदाहरण : x का मान ज्ञात करें -

$$x - 12 = 18$$

हल : बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$x - 12 = 18$$
$$x = 18 + 12$$

(12 को दायें पक्ष में स्थापन करने पर चिह्न परिवर्तन)

$$x = 30$$

अतः x का मान 30 है।

उदाहरण : $3x + 1 = 13$

हल : बायाँ पक्ष $= 3x + 1$

दायाँ पक्ष $= 13$

$3x + 1 = 13$ { 1 को बायें पक्ष से दायें पक्ष की ओर ले जाने पर }

$3x = 13 - 1$ { चिह्न परिवर्तन }

$3x = 12$

दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$x = 4$

अतः x का मान 4 है।

उदाहरण : x का मान ज्ञात करें -

$x + 2 = 18$

हल : बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष

$x + 2 = 18$
$x = 18 - 2$

(2 को दायें पक्ष में स्थापन करने पर चिह्न परिवर्तन)

$x = 16$

अतः x का मान 16 है।

प्रश्नावली 5.1

1. चर राशि एवं अचर राशि की परिभाषा उदाहरण सहित दीजिए।

2. निम्नलिखित कथनों से समीकरणों के रूप में लिखिए -

   (1) x और 4 का योग 6 है।

   (2) यदि किसी संख्या में 12 घटाएँ तो 7 प्राप्त होगा।

   (3) संख्या p को 5 से भाग देने पर 8 प्राप्त होता है।

   (4) a का 10 गुणा 70 है।

   (5) x के तीन गुणा में 11 जोड़ने पर 32 प्राप्त होता है।

   (6) m का एक चौथाई 15 है।

3. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में बदलिए -

   (1) $x - 4 = 12$ (2) $3p = 18$ (3) $3x + 4 = 1$

   (4) $\frac{p}{5} - 3 = 6$ (5) $m + 3 = 15$ (6) $m + 13 = 25$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए -

   (1) $10m = 100$ (2) $3x = 12$ (3) $2p + 6 = 18$

   (4) $3t + 12 = 18$ (5) $3x + 1 = 19$ (6) $x - 12 = 8$

   (7) $x + 3 = 18$ (8) $5 + x = 15$ (9) $4x + 1 = 17$

5. सही-मिलान कीजिए -

   (1) यदि $x + 1 = 3$ तब $x = 4$

   (2) यदि $x + 4 = 9$ तब $x = 2$

   (3) यदि $x + 3 = 7$ तब $x = 14$

(4) यदि $x - 4 = 10$ तब $x = 5$

(5) यदि $x - 2 = 8$ तब $x = 10$

➢ हमने सीखा

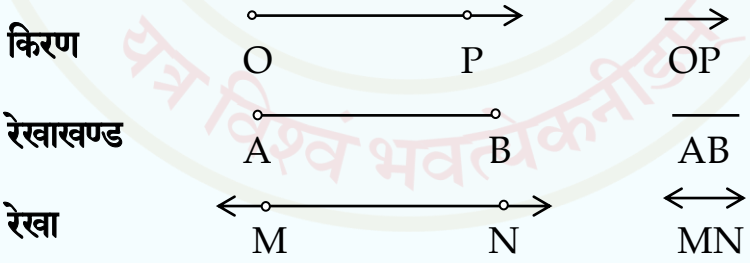
1. समीकरण में चर पर ऐसा प्रतिबन्ध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए।
2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण सन्तुष्ट होता है, वह उस **समीकरण का हल** कहलाता है।
3. पक्षान्तर अर्थात् समीकरण के अचर या बीजीय पदों का एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानान्तरण है। पक्ष में परिवर्तन पर जोड़ व घटाव की स्थिति में क्रमशः चिह्न बदल जाते हैं। गुणा की स्थिति में भाग एवं भाग की स्थिति में गुणा हो जाता है।
4. किसी समीकरण में बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष परस्पर बदलने पर समीकरण नहीं बदलता है।
5. समीकरण में हम दोनों पक्षों में एक साथ किसी संख्या को जोड़, घटाव, गुणा या भाग कर सकते हैं।
6. समीकरण का हल चरणबद्ध होता है, दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय सङ्क्रियाएँ करनी पड़ती हैं । जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त होता है और समीकरण का हल प्राप्त होता है।

अध्याय 6

रेखा एवं कोण

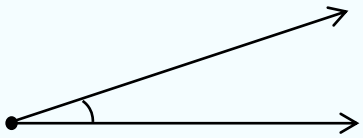
प्रिय बटुकों ! आपने पिछली कक्षा में ज्यामिति का प्रारम्भिक परिचय के रूप में अध्ययन किया था। जिसके अन्तर्गत आपने रेखा, रेखाखण्ड, बिन्दु, कोण (न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण) समान्तर, प्रतिच्छेद रेखाओं के बारे में अध्ययन कर चुके हो इस अध्याय में पूर्व में किये गये अध्ययन को दोहराते हुए तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

स्मरण कीजिए कि एक रेखाखण्ड के दो अन्त बिन्दु होते हैं। यदि हम इन दो अन्त बिन्दुओं को अपनी-अपनी दिशाओं में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक रेखा का कोई अन्त बिन्दु नहीं होता है। आपको याद होगा कि किरण का एक अन्त (प्रारम्भिक बिन्दु) होता है। उदाहरण नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए –



कोण –

जब दो किरण एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है तो उनके मध्य **कोण** बनता है।



आपने कोण के वर्गीकरण विषय में पूर्व कक्षा में भी अध्ययन किया था। आपको स्मरण होगा कि: न्यूनकोण (0° से बड़े तथा 90° से छोटे कोण), समकोण (90° का कोण), अधिक कोण (90° से बड़े कोण तथा 180° से छोटे कोण) तथा ऋजु कोण (180°) के रूप में कोणों का वर्गीकरण किया जाता है ।

आइये, अब सम्बन्धित कोणों का अध्ययन करेंगे –

पूरक कोण – जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण **पूरक कोण** (Complementary angle) कहलाते हैं।



(i) (ii) (i) (ii)

क्या ये दोनों कोण पूरक कोण हैं ? - हाँ क्या ये दोनों कोण पूरक कोण हैं ? - नहीं

जब दो कोण पूरक होते हैं, तब परस्पर कोण एक-दूसरे के पूरक कोण कहलाते है।**जैसे** : 30° का पूरक कोण 60° होगा तथा 60° का पूरक कोण 30° होगा।

❖ **करो और सीखो -**

बताइये 45° का पूरक कोण क्या होगा ? (.....)

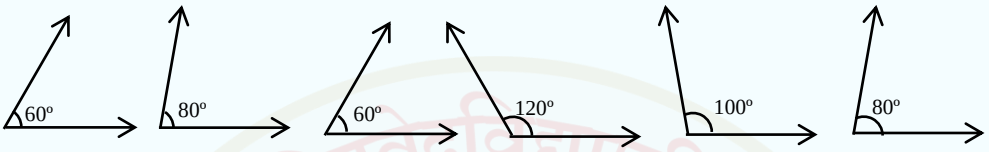
➢ **सोचिए –**

(i) समकोण का पूरक कोण क्या होता है ?

(ii) क्या दो कोण एक-दूसरे के पूरक हो सकते हैं ?

सम्पूरक कोण –

जब दो कोणों का योग 180° होता है तो ये कोण एक-दूसरे के **सम्पूरक कोण** कहलाते हैं । नीचे दिए गए कोणों के युग्म में कौन-कौन से सम्पूरक कोण है।



आकृति 1 आकृति 2 आकृति 3

$(60^0 + 80^0 \neq 180^0)$ $(60^0 + 120^0 = 180^0)$ $(80^0 + 100^0 = 180^0)$

हम देखते हैं कि उपर्युक्त युग्म में आकृति (i) को छोड़कर आकृति (ii) एवं आकृति (iii) के कोणों का माप 180° है । अतः आकृति (ii) एवं (iii) कोणों के ऐसे युग्म सम्पूरक कोण (Supplementary Angles) कहलाते हैं ।

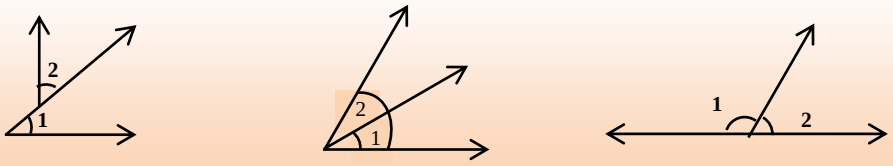
आसन्न कोण -



उपर्युक्त चित्रों में आपको दो-दो कोण आपस में जुड़े हुए दिख रहे हैं। कोणों के ऐसे युग्म **आसन्न कोण** कहलाते हैं। आसन्न कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष तथा एक उभयनिष्ठ भुजा होती है तथा दोनों कोण उभयनिष्ठ भुजा के एक ही ओर न होकर विपरीत की ओर होते हैं।

❖ **करो और सीखो**

नीचे दिए कोणों में कौन-कौन आसन्न कोण है और क्यों ?



रैखिक युग्म –

एक रैखिक युग्म (linear pair) ऐसे आसन्न कोणों का युग्म होता है जिनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है, विपरीत दिशा में किरणें होती हैं।



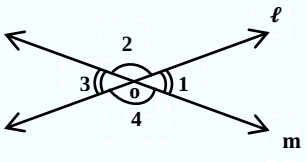
क्या $\angle 1$ व $\angle 2$ रैखिक युग्म है ? – हाँ
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

क्या $\angle 1$ व $\angle 2$ रैखिक युग्म है ? – नहीं
$\angle 1 + \angle 2 \neq 180°$

सम्मुख कोण (शीर्षाभिमुख कोण)

जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेद (काटती) करती है, तो दोनों रेखाओं के आमने-सामने बनने वाले कोण को **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं।

ज्यामिति का उपयोग करते हुए इसे सिद्ध करने का प्रयास करते हैं। दो रेखाएँ ℓ और m लेते हैं। मान लीजिए दोनों रेखाएँ जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ निर्मित करती हैं।



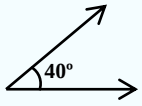
आप यहाँ पाएंगे कि आकृति में 4 कोण होते हैं, जिसमें कोण 1 कोण 3 तथा कोण 2 कोण 4 के बराबर है यह कोण युग्म $\angle 1, \angle 3$ तथा $\angle 2, \angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं ।

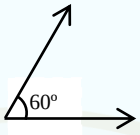
- **सोचिए** – जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती है, तो कितने कोण बनते हैं ?

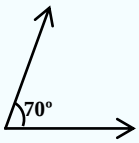


प्रश्नावली 6.1

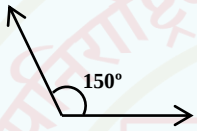
1. निम्न कोणों में से प्रत्येक का पूरक कोण ज्ञात कीजिए ?

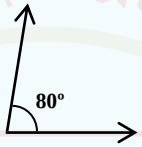
1) 

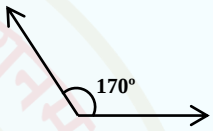
2) 

3) 

2. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का सम्पूरक कोण ज्ञात कीजिए ?

1) 

2) 

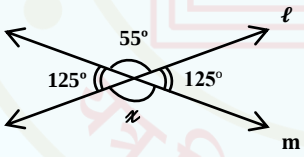
3) 

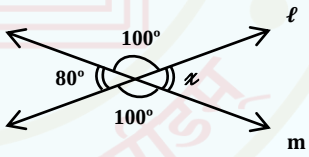
3. कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं सम्पूरक युग्मों को अलग-अलग लिखिए –

(i) $64^\circ , 26^\circ$ (ii) $65^\circ , 115^\circ$ (iii) $45^\circ , 45^\circ$

(iv) $10^\circ , 80^\circ$ (v) $115^\circ , 65^\circ$ (vi) $112^\circ , 68^\circ$

4. निम्नलिखित में प्रत्येक के कोण x^0 ज्ञात कीजिए –





5. रिक्-स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(180°, 60°, 80°, 1, 90°, बराबर, रैखिक युग्म, 180°)

1. यदि दो कोण पूरक हैं तो उनके मापों का योग ..... है।
2. यदि दो सम्पूरक कोण हैं, तो उनके मापों का योग ..... है।
3. शीर्षाभिमुख कोण आपस में ..... होते हैं।

4. 30° का पूरक कोण ..... है।

5. 100° का सम्पूरक कोण ..... है।

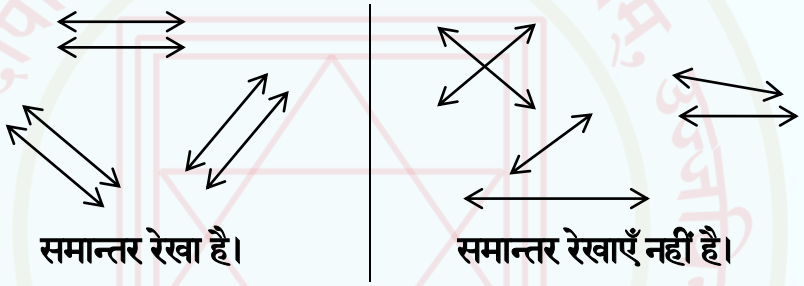
6. आसन्न कोण में कितने उभयनिष्ठ शीर्ष ..... होते हैं।

7. रैखिक युग्म बनाने वाले दो कोण का माप ..... होता है।

8. दो आसन्न कोण सम्पूरक है तो वे ..... बनाते हैं।

रेखा युग्म –

नीचे दिए गए रेखा युग्मों को देखिए –



समान्तर रेखा है। **समान्तर रेखाएँ नहीं है।**

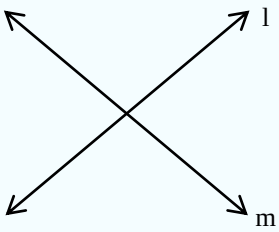
समान्तर रेखा –

दो समतलीय रेखाएँ जो एक-दूसरे को नहीं काटती हैं, वे **समान्तर रेखा** कहलाती हैं। जैसे –



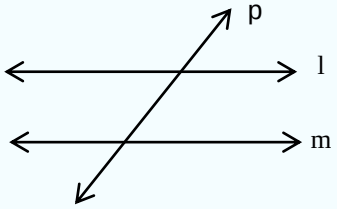
प्रतिच्छेदी रेखा –

ऐसी दो रेखाएँ जो एक-दूसरे को काटती हैं, वे **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। जैसे –



तिर्यक् छेदी रेखाएँ –

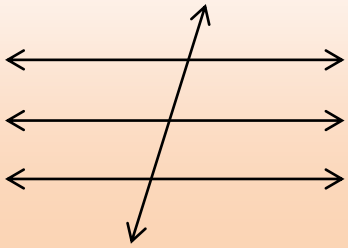
दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा **तिर्यक् छेदी रेखा** कहलाती है।



उपर्युक्त चित्र में रेखा युग्म ℓ तथा m को तिर्यक् रेखा P दो अलग बिन्दुओं पर काटती है।

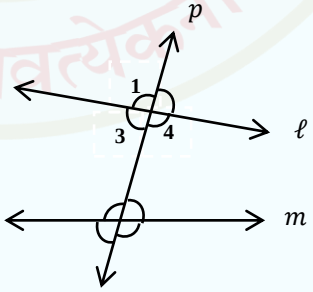
❖ **करो और सीखो -**

यदि तीन रेखाओं पर एक तिर्यक् छेदी रेखा खींची जाए तो कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होंगे।



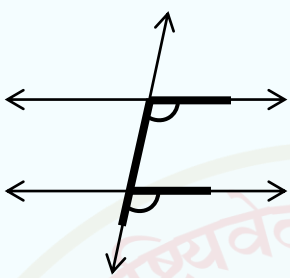
तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोण -

जब रेखा ℓ व m को तिर्यक् छेदी रेखा p काटती है, तो 8 विभिन्न कोण बनते हैं चित्र में 8 कोणों को देखिए –

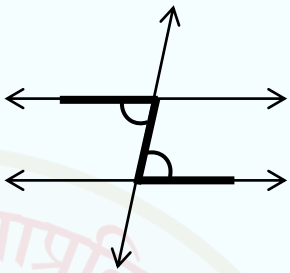


इन कोणों में बाहर की ओर बनने वाले कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ व $\angle 8$ हैं ये बाह्य कोण

कहलाते हैं। इसी प्रकार अंदर की ओर बनने वाले कोण ∠3, ∠4, ∠5 व ∠6 अन्त कोण कहलाते हैं। **संगत कोण *F* आकार बनाते हैं।**



संगत कोण में *F* आकार बनता हैं।

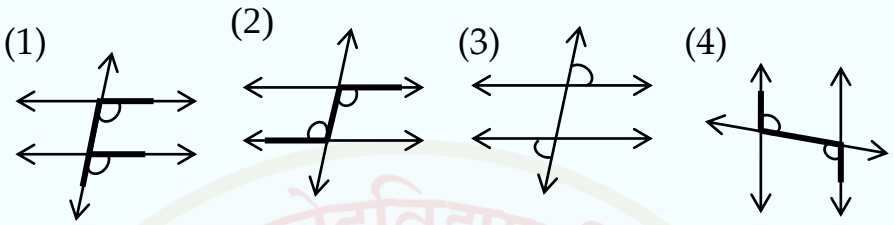


एकान्तर कोण में *Z* आकार बनता हैं।

कोणों के प्रकार	कोण
संगत कोण – युग्म	∠1 व ∠5, ∠2 व ∠6 ∠3 व ∠7, ∠4 व ∠8
एकान्तर अन्तः कोण युग्म	∠3 व ∠6, ∠5 व ∠4
एकान्तर बाह्य कोण युग्म	∠1 व ∠8, ∠2 व ∠7
तिर्यक् छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्त कोण युग्म	∠3 व ∠5, ∠4 व ∠6
तिर्यक् छेदी रेखा के एक ही ओर बने बाह्य कोण युग्म	∠1 व ∠7, ∠2 व ∠8

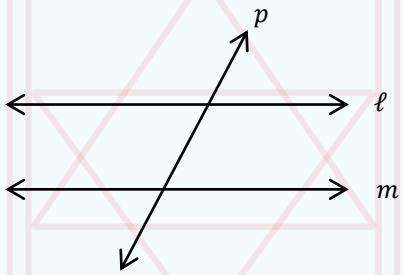
❖ **करो और सीखो –**

प्रत्येक आकृति के कोण युग्म को पहचाने और उनके नाम लिखें –



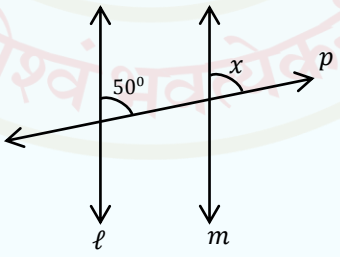
(.....) (.....) (.....) (.....)

समान्तर रेखाओं की तिर्यक् छेदी रेखा –



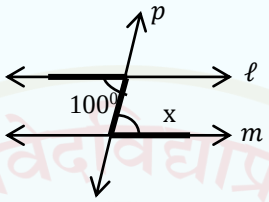
जब दो समान्तर रेखा को कोई तिर्यक् रेखा काटती है तब –

1. **संगत कोण आपस में समान होते हैं ।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है । अतः तिर्यक् रेखा के प्रतिच्छेद करने पर संगत समान है। अतः $x = 50^{\circ}$

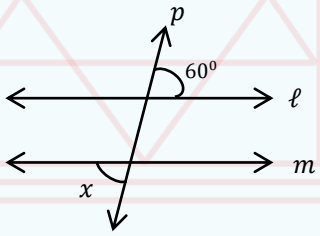
2.**एकान्तर अन्तकोण समान होते हैं।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा $(\ell \parallel m)$ है । P एक तिर्यक् छेदी रेखा है।

अतः $x = 100^{\circ}$ है।

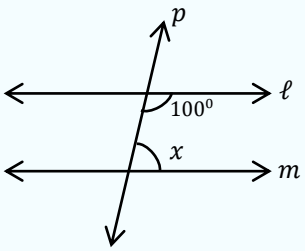
3. **एकान्तर बाह्य कोण समान होते हैं।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा $(\ell \parallel m)$ है । P एक तिर्यक् छेदी रेखा है।

अतः $x = 60^{\circ}$ है।

4. **तिर्यक् रेखा के एक ओर बनने वाले अंतःकोण सम्पूरक होते हैं।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है। P एक तिर्यक् छेदी रेखा है।

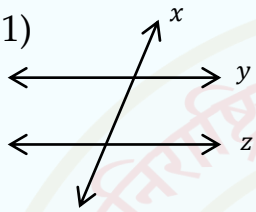
अतः अन्त कोणों का प्रत्येक युग्म सम्पूरक होता है।

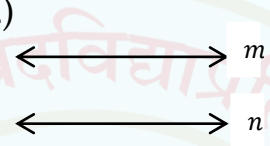
$$100° + x = 180°$$
$$x = 180° - 100°$$
$$x = 80°$$

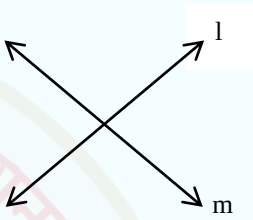
अतः $x = 80°$

प्रश्नावली 6.2

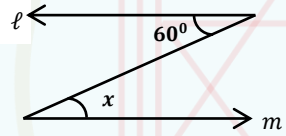
1. निम्न आकृति में समान्तर, प्रतिच्छेदी तथा तिर्यक् छेदी रेखाओं के नाम लिखिए –

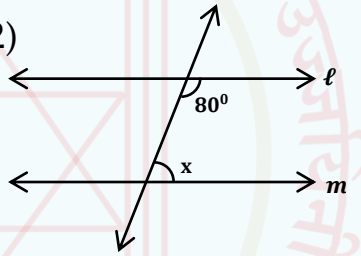
1) 

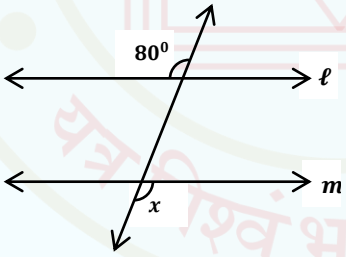
2) 

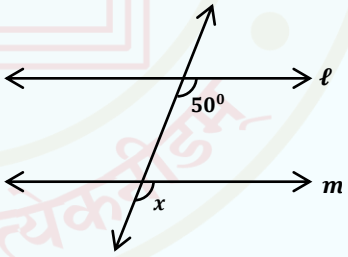
3) 

2. यदि ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) हो तो x का मान बताइये।

1) 

2) 

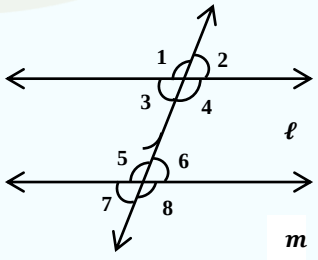
3) 

4) 

3. दिए गए चित्र में बताइये –

(1) अन्त कोणों के नाम

(2) बाह्य कोण के नाम



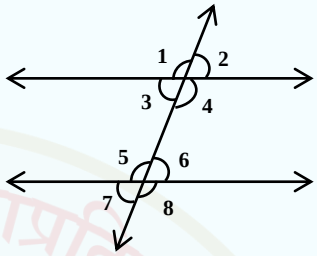
4. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. समान्तर रेखाओं को तिर्यक् रेखा काटती है,तो संगत कोण ..... होते हैं । (समान / असमान)
2. यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक् छेदी रेखा काटती है तो बनने वाले कोण एकान्तर कोण ..... होते हैं । (समान / असमान)
3. यदि $\ell \parallel m$ रेखा किसी एक तिर्यक् रेखा के एक ही ओर बने तो कोण का प्रत्येक युग्म ..... का होता है । (180° / 90°)
4. एकान्तर कोण में ..... आकृति बनती है । (F / Z)
5. संगत कोण ..... आकार बनता है । (Z / F)

➢ **हमने सीखा –**

1. जब दो कोणों का योग 90° हो तो वह परस्पर **पूरक कोण** कहलाते हैं।
2. यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वह परस्पर **सम्पूरक कोण** कहलाते हैं।
3. उभयनिष्ठ शीर्ष एवं उभयनिष्ठ भुजा के दोनों ओर निर्मित कोणों को **आसन्न कोण** कहते हैं।
4. जब दो आसन्न कोण सम्पूरक कोण हो तो वह **रैखिक युग्म** बनाते हैं।
5. जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेदी होती हैं, तो दोनों रेखाओं के आमने-सामने बनने वाले कोण को **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं।
6. शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म हमेशा समान होते हैं।
7. जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक् रेखा प्रतिच्छेदी करती है । तब संगत कोण, एकान्तर अन्त:कोण एवं एकान्तर बाह्य कोण समान है।

8. एक रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हो तो तिर्यक् छेदी रेखा कहलाती है। दो रेखाओं पर काटने वाली रेखा आठ कोण बनाती है।



तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनने वाली कोण –

क्र. सं.	कोणों के प्रकार	युग्मों की संख्या	कोण
1	अन्त:कोण	-	∠3 व ∠4, ∠5 व ∠6
2	बाह्य कोण	-	∠1 व ∠2, ∠7 व ∠8
3	शीर्षाभिमुख कोण	4 युग्म	∠1 व ∠4, ∠2 व ∠3 ∠5 व ∠8, ∠6 व ∠7
4	संगत कोण	4 युग्म	∠1 व ∠5, ∠2 व ∠63 ∠3 व ∠7, ∠4 व ∠8
5	एकान्तर अन्तः कोण	2 युग्म	∠3 व ∠6, ∠4 व ∠5
6	एकान्तर बाह्य कोण	2 युग्म	∠1 व ∠8, ∠2 व ∠7
7	तिर्यक् रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तः कोण	2 युग्म	∠3 व ∠5, ∠4 व ∠6

अध्याय 7

राशियों की तुलना

अनुपात –

बीजगणितम् में अनुपात के विषय में निम्न श्लोक मिलता है।

एकः पदार्थस्तत् सजातीयद्वितीयपदार्थेन यद् गुणितः स एव सम्बन्धो निष्पत्तिर्वा।

यथा अ, व अनयोः सम्बन्धः $\frac{\text{अ}}{\text{व}}$, वा अ : व **एवं लिख्यते ।**

(बीजगणितम्, परिशिष्टम्पृ. 243)

दो अनुपात संख्या या राशियों की विभाजन से तुलना एक **अनुपात** कहा जाता है। अनुपात को व्यक्त करने के सङ्केत ' : ' का प्रयोग किया जाता है इसके लिए दोनों राशियों एक ही इकाई में होनी चाहिए।

एक अनुपात एक भिन्न के रूप में समझा जा सकता है।

उदाहरण : पूजन के कार्यक्रम में उपयोग होने वाले बाजोट की लम्बाई 50 से.मी. है तथा चौड़ाई 80 से.मी. है तो बाजोट की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : बाजोट की लम्बाई = 50 से.मी.

बाजोट की चौड़ाई = 80 से.मी.

तब, अनुपात $= \frac{\text{बाजोट की लम्बाई}}{\text{बाजोट की चौड़ाई}}$

$$= \frac{50 \text{ से.मी.}}{80 \text{ से.मी.}}$$

$$= \frac{5 \text{ से.मी.}}{8 \text{ से.मी.}}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 5 : 8 प्राप्त है।

उदाहरण : पूजन मण्डल में षोडश मातृका तथा नवग्रह को बनाने के लिए क्रमशः 2 किलो गेहूँ तथा 500 ग्रा. चावल का प्रयोग किया जाता है, तब गेहूँ एवं चावल का अनुपात क्या होगा ?

हल : दिया है –

गेहूँ की मात्रा – 2 किलोग्राम

चावल की मात्रा – 500 ग्राम

तब,

$$\text{अनुपात} = \frac{\text{गेहूँ की मात्रा}}{\text{चावल की मात्रा}}$$

हम जानते हैं दोनों राशियों की इकाई एक होनी चाहिए । गेहूँ की मात्रा की इकाई को कि.ग्रा. से ग्राम में बदलने पर

$$1 \text{ कि.ग्रा.} = 1000 \text{ ग्राम}$$

$$2 \text{ कि.ग्रा.} = 1000 \times 2$$

$$= 2000 \text{ ग्राम}$$

अतः,

$$\text{अनुपात} = \frac{2000 \text{ ग्राम}}{500 \text{ ग्राम}} = \frac{4}{1}$$

अतः यहाँ अभीष्ट अनुपात 4 : 1 होगा ।

उदाहरण : अनुपात को सरल रूप में बदलिए -

(1) $\frac{25}{45}$

$= \frac{25 \div 5}{45 \div 5}$

$= \frac{5}{9}$

(2) $\frac{32}{24}$

या $= \frac{32 \div 2}{24 \div 2} = \frac{16}{12}$

या $= \frac{16 \div 2}{12 \div 2} = \frac{8}{6}$

या $= \frac{8 \div 2}{6 \div 2} = \frac{4}{3}$

या $= \frac{32 \div 8}{24 \div 8} = \frac{4}{3}$

तुल्य अनुपात –

दो अनुपात तुल्य कहलाते हैं यदि उनकी संगत भिन्न तुल्य हो। आकृतियों के माध्यम से समझाते हैं –



$\frac{2}{4}$ या $\frac{1}{2}$



$= \frac{3}{6}$ या $\frac{1}{2}$

अतः आकृति (1) व (2) का अनुपात

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (संगत अनुपात तुल्य है।)

उदाहरण : अनुपात $4 : 3$ या $4/3$ के तीन तुल्य अनुपात ज्ञात करें ।

हल : $\frac{4}{3}$ के तीन तुल्य अनुपात

$$\frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{4 \times 3}{3 \times 3} = \frac{12}{9}$$

$$\frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{16}{12}$$

तब, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$

अतः तुल्य अनुपात $\frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}$ है।

उदाहरण : अनुपात 5 : 7 के दो तुल्य अनुपात ज्ञात करें ।

हल : $\frac{5}{7}$ के तीन तुल्य अनुपात -

$$\frac{\mathbf{5 \times 2}}{\mathbf{7 \times 2}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{6}}$$

$$\frac{\mathbf{5 \times 3}}{\mathbf{7 \times 3}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{21}}$$

समानुपात –

संस्कृत प्रणाली के अन्तर्गत आर्यभट्टीयम् एवं बीजगणितम् में समानुपात के सन्दर्भ में निम्न श्लोक प्राप्त होता है ।

त्रैराशिकफलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा।

लब्धं प्रमाणभाजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात्॥

(आर्यभट्टीयम् ,गणितापाद : 26)

अर्थात् फल राशि को इच्छा राशि से गुणा करने पर प्राप्त लब्धि को प्रमाण से भाग देने से इच्छा फल प्राप्त होता है।

$$\textbf{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा राशि}}{\text{प्रमाण}}$$

त्रैराशिक का नियम आर्यभट्ट से पहले वेदाङ्गज्योतिष काल में भारतीयों को ज्ञात था। बाद में आचार्यों ने इसे तीन से अधिक राशियों के लिए ज्ञात किया है। भारत से यह नियम यूरोप अरब में बहुत पहुँचा तथा वहाँ बहुत प्रचार,प्रसार हुआ एवं बहुत प्रशंसा हुई ।

यदि चत्वारो राशयः सम्बन्धिनो भवेयुस्तदा आद्यन्त्योर्घातः

द्वितीयतृतीयराश्योर्घाततुल्यो भवेत् ।

कल्प्यन्ते राशयः अ, व, क, ड तदा अः व = कः ड

अर्थात् $\frac{\text{अ}}{\text{व}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}}$ पक्षौ व ड अनेन गुण्यते तदा अ ड = व क॥

(बीजगणितम्, परिशिष्टम् पृ. 245)

अर्थात् , चार राशियाँ एक समानुपात में तब कही जायेगी, जब पहली राशि तथा दूसरी राशि का अनुपात तथा तीसरी एवं चौथी राशि के अनुपात के बराबर हो। इसे '::' से दर्शाते हैं।

उदाहरण : यदि 6 पुष्पमाला का मूल्य 60 रु. है। तब ऐसी ही 10 पुष्पमाला का मूल्य क्या होगा ?

हल : समानुपात के नियम से -

पुष्पमाला का अनुपात :: पुष्पमाला के मूल्यों के अनुपात

$$\frac{6}{10} :: \frac{60}{x}$$

चूंकि :: या =

$$\frac{6}{10} = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{60 \times 10}{6}$$

$$x = \frac{600}{6}$$

$$x = 100$$

अतः 10 पुष्पमालाओं का मूल्य 100 रु. होगा।

ऐकिक विधि से हल –

∵ 6 पुष्पमालाओं का मूल्य = 60

∴ 1 पुष्पमाला का मूल्य $= \frac{60}{6} = 10$ रु.

अतः 10 पुष्पमालाओं का मूल्य $= 10 \times 10 = 100$ रु.

सङ्केत

∵ - चूंकि

∴ - इसलिए

प्रश्नावली 7.1

1. अनुपात ज्ञात कीजिए –

   1. 3 k.g. का 100 g. 2. 12 c.m. का 36 c.m.

2. गुरुकुल के एक कक्ष की लम्बाई 14 मीटर तथा चौड़ाई 20 मीटर है । कक्ष की लम्बाई चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

3. सरल रूप में बदलिए –

   (i) $\frac{12}{16}$ (ii) $\frac{45}{20}$ (iii) $\frac{32}{18}$

4. निम्नलिखित अनुपातों के दो तुल्य अनुपात ज्ञात करें –

   (i) $\frac{5}{3}$ (ii) 2 : 3

5. एक दुकानदार 3 पञ्च-पात्रों का सेट 150 रु. में देता है तो 2 पञ्च-पात्रों का मूल्य क्या होगा ?

प्रतिशत -

प्रतिशत का चिह्न (%) प्रतिशत शब्द दो शब्दों 'प्रति' तथा 'शत' के मिलने से बना है। प्रति का अर्थ है - 'प्रत्येक' अर्थात् 'Per' तथा शत का अर्थ है 'सैकड़ा' या 'सौ' या '100' ।

अर्थात् प्रतिशत का अर्थ है - 'प्रति सैकड़ा' या 'प्रति सौ' दूसरे शब्दों में - 'किसी संख्या के प्रतिशत का अर्थ उस संख्या को 100 बराबर भागों में बाटने से है।

उदाहरण :

1. एक आश्रम में कुल 100 वृक्ष में से 20 वृक्ष फल वाले हैं, तो फल वाले वृक्ष का प्रतिशत 20 हुआ। यहाँ 20 प्रतिशत फल वाले वृक्ष का अर्थ है, फल वाले वृक्षों की संख्या 20 है। जहाँ कुल वृक्षों की संख्या 100 है।
2. मान लीजिए कि किसी छात्र ने 100 में से 40 अङ्क प्राप्त किए तो इसका अर्थ यह हुआ है कि उस छात्र ने 40 प्रतिशत (%) अङ्क प्राप्त किए।

प्रतिशत का चिह्न -

प्रतिशत को किसी अङ्क के बाद चिह्न (%) को लगाकर व्यक्त किया जाता है।

जैसे: 40 प्रतिशत को 40%

2 प्रतिशत को 2%

प्रतिशत एक भिन्न -

प्रतिशत एक प्रकार का भिन्न है, जिसमें हर के स्थान पर हमेशा 100 होता है।

$$a\% = \frac{a}{100}$$

$$40\% = \frac{40}{100}$$

$$13\% = \frac{13}{100} \quad \text{इत्यादि}$$

प्रतिशत को भिन्न में बदलना -

नियम - प्रतिशत का चिह्न हटाकर 100 से भाग दें अथवा प्रतिशत का चिह्न हटाकर $\frac{1}{100}$ से गुणा करें तथा प्राप्त भिन्न को सरल करें।

अर्थात् $a\% = \frac{a}{100}$

उदाहरण : 3% को साधारण भिन्न में बदलिए।

हल : $3\% = \frac{3}{100}$

अब चूंकि अंश तथा हर में कोई भी गुणक उभयनिष्ठ नहीं है। अतः

$3\% = \frac{3}{100}$ है।

उदाहरण : 10% को साधारण भिन्न में बदलिए।

हल : $10\% = \frac{10}{100}$

$= \frac{10}{10\times10} = \frac{1}{10}$

अतः 10% का साधारण भिन्न का मान $\frac{1}{10}$ है ।

दशमलव संख्या वाले प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलना -

1. सर्वप्रथम % का चिह्न हटाकर दी गई संख्या में 100 से भाग दें।
2. दशमलव हटाने के लिए 10, 100, 1000 आदि अङ्कों से आवश्यकता अनुसार भाग दीजिए ।
3. भिन्न को सरल कर उत्तर प्राप्त करें ।

उदाहरण : 0.4% को भिन्न में बदलें ।

हल : दिया गया है - $0.4\% = \frac{0.4}{100}$

चूंकि यहाँ अंश में दशमलव के दायीं तरफ एक अङ्क है। अतः दशमलव हटाने के लिए $\frac{1}{10}$ गुणा करने पर

$= \frac{4}{100} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{4\times1}{100\times10} = \frac{1}{250}$

प्रतिशत को दशमलव में बदलना

दशमलव ,संख्याओं को सटीक रूप में लिखने का एक रूप है। दशमलव बिन्दु का उपयोग करना। उदाहरण के लिए, 3.5 का अर्थ है 3 पूर्ण भाग और एक आधा (0.5) भाग।आइए , निम्न चरण-वार प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए निम्न दिए गए चरणों का पालन करें:

- **चरण 1:** प्रतिशत चिह्न (%) निकालें।
- **चरण 2:** दायीं ओर से बायीं ओर दो अङ्कों की छलांग लगाकर दशमलव बिन्दु लगाएँ।

उदाहरणार्थ : 45% को दशमलव में बदलते हैं।

हल: 45% को बिना प्रतिशत चिह्न के 45 के रूप में लिखा जा सकता है। अब, यह एक पूर्ण संख्या है ।इसलिए दायें छोर पर दशमलव बिन्दु पर विचार करें। 45, 45.0 के समान है। अब, दशमलव बिन्दु को दो स्थान बायीं ओर खिसकाने पर, हमें 0.45 प्राप्त होता है। इसलिए, 45% = 0.45

एक अन्य उदाहरण मान लीजिये 3.5%को हमें दशमलव बिन्दु को दो स्थानों पर बायीं ओर स्थानान्तरित करना होगा।तब 3.5% = 0.035

भिन्न को प्रतिशत में बदलना -

नियम - 1. दिये गये भिन्न को 100 से गुणा करें।

2. आवश्यक गणना कर सरल करें।

3. प्राप्त व्यंजक में प्रतिशत (%) का चिह्न लगायें।

भिन्न $\frac{a}{b}$% तब $\frac{a}{b} \times 100$

उदाहरण : $\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में बदलें।

हल : दिया गया भिन्न $= \frac{3}{4}$

प्रतिशत में बदलने के लिए 100 से गुणा करने पर हम पाते हैं।

$= \frac{3}{4} \times 100$
$= \frac{300}{4}$
$= 75\%$

या $= \frac{3}{4} \times 100$
$= \frac{3}{4} \times 25 \times 4$
$= 75\%$

किसी संख्या का दिया गया प्रतिशत निकालना –

उदाहरण : 100 का 10% कितना होगा -

हल : 100 का 10%

प्रश्नानुसार,

$= 100 \times 10\%$

चूंकि 'का' हटाकर गुणा का चिह्न लगाया जाता है। अर्थात् 'का' का अर्थ गुणा होता है ।

$= 100 \times \frac{10}{100}$

अतः 100 का 10% = 10 है।

(प्रतिशत % चिह्न हटाकर 100 से भाग दिया जाता है।)

उदाहरण : 300 का 4% ज्ञात करें -

हल : 300 का 4%

$= 300 \times \frac{4}{100}$
$= 3 \times 4 \quad = 12$

अतः 300 का 4% = 12 है।

उदाहरण : 20 का 40% ज्ञात करें।

हल : 20 का 40%

$$= \frac{20 \times 40}{100}$$
$$= 2 \times 4$$
$$= 8$$

अतः 20 का 40% = 8 है।

उदाहरण : 150 का 40% ज्ञात करें।

हल : 150 का 40%

$$= \frac{150 \times 40}{100}$$
$$= 15 \times 4$$
$$= 60$$

अतः 150 का 40% = 60 है।

उदाहरण : एक व्यापारी एक कुर्सी पर 10 % की छूट देता है,यदि कुर्सी का मूल्य 1000 रुपये है तो बताइये ग्राहक को एक कुर्सी खरीदने के लिए कितने रुपये देने होंगे ?

हल : दिया है, एक व्यापारी 1000 रुपये की एक कुर्सी पर 10 % की छूट देता है।

अर्थात् , 1000 का 10%

$$= \frac{1000 \times 10}{100} = 100$$

तब, 1000 – 100 = 900

अत: ,ग्राहक को एक कुर्सी खरीदने के लिए 900 रुपये देने होंगे ।

❖ **करो और सीखो -**

(1) 30 का 10% (2) 40 का 20%

नोट :- हम ऐसा समझ सकते हैं कि एक (%) प्रतिशत से दो शून्य हट जाते हैं कि और तुरन्त हल भी कर सकते हैं।

उदाहरण : एक गुरुकुल में 30 विद्यार्थियों की कक्षा में 50% विद्यार्थी क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं तो क्रिकेट पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या क्या है ?

हल : क्रिकेट पसन्द करने वाले विद्यार्थी = 30 का 50%

$$= 30 \times \frac{50}{100}$$
$$= 3 \times 5$$
$$= 15$$

अतः 15 विद्यार्थी क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं।

उदाहरण : विशाल ने वेद की परीक्षा मूल्यांकन में 50 में से 30 अङ्क प्राप्त हुए, तो बताओ विशाल ने कितने प्रतिशत अङ्क प्राप्त किए ?

हल : दिया है - 50 में से 30 अङ्क प्राप्त किए

$$= \frac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णाङ्क}} \times 100\%$$

अतः $= \frac{30}{50} \times 100\%$

$$= \frac{30}{50} \times (50 \times 2)\%$$
$$= 30 \times 2\%$$
$$= 60\%$$

अतः विशाल ने 60% अङ्क प्राप्त किए।

❖ **करो और सीखो -** उत्कर्ष ने गणित के टेस्ट में 20 में से 15 अङ्क प्राप्त किए। बताइये छात्र ने कितने प्रतिशत अङ्क प्राप्त किए ?

प्रश्नावली 7.2

1. दिए गए प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलिए ?

   (1) 13% (2) 15% (3) 9%

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए ?

   (1) 0.9% (2) 0.7%

3. दी गई भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए ?

   (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$

4. ज्ञात कीजिए -

   (1) 300 का 12% (2) 50 का 70% (3) 40 का 50%

   (4) 600 का 8% (5) 900 का 5% (6) 150 का 50%

5. एक समूह के 50 सदस्यों में से 20 ने रक्तदान दिवस पर रक्त दान किया। तो बताइये कितने प्रतिशत सदस्यों ने रक्तदान किया ?

6. पाठशाला के 200 विद्यार्थियों में से वेदभूषण द्वितीय वर्ष की कक्षा में 40 विद्यार्थी अध्ययन करते हैं। तो बताइये कितने प्रतिशत विद्यार्थी द्वितीय वर्ष में अध्ययन करते हैं ?

7. एक कर्मचारी 5000 रुपये प्रतिमाह आय प्राप्त करता है। वह अपनी आय के 10% भाग की बचत करता है, तो बताइये वह प्रतिमाह कितने धन की बचत करता है ?

8. राष्ट्रिय आदर्श वेद विद्यालय के 200 विद्यार्थियों में से 15% विद्यार्थी सामवेद तथा 20% विद्यार्थी शुक्ल यजुर्वेद माध्यन्दिन शाखा में अध्ययन करते हैं तो बताइए कितने विद्यार्थी सामवेद तथा शुक्ल यजुर्वेद का अध्ययन करते हैं।

9. एक वेद पाठशाला के 50 विद्यार्थियों में से 20% विद्यार्थी शुक्लयजुर्वेद माध्यन्दिन शाखा तथा 15% विद्यार्थी काण्व शाखा में अध्ययन करते हैं तो बताइए कितने विद्यार्थी माध्यन्दिन तथा काण्व शाखा में अध्ययन करते हैं।

किसी वस्तु से सम्बन्धित मूल्य, अर्थात् क्रय तथा विक्रय

क्रय मूल्य (खरीदना) -

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है,तो वह मूल्य उसका **क्रय मूल्य** (Cost Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में क्र.मू. (C.P.) लिखा जाता है।

विक्रय मूल्य (बेचना) -

जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है,तो वह मूल्य उसका **विक्रय मूल्य** (Selling Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में वि.मू. (S.P.) लिखा जाता है।

आइए, उदाहरण से समझते हैं – **उदाहरणार्थ:**

एक दुकानदार एक उपवस्त्र 100 रु. में खरीदता है तथा वेद पाठियों को 130 रु. में बेचता है, तो हम समझ सकते हैं।

क्रय मूल्य = 100 रु. एवं विक्रय मूल्य = 130 रु. है।

गुरुजी - बताइये ? इस व्यवहार में दुकानदार को लाभ हुआ या हानि हुई।

उत्सव - लाभ हुआ। क्योंकि (कम में खरीदा गया यानि 100 रु. में खरीदा तथा ज्यादा रु. में बेचा गया अर्थात् 130 रु. में)

गुरुजी - बहुत अच्छे ! आप बताइये उसे कितने रु. का लाभ हुआ ?

लक्ष्मी - 30 रु. का लाभ हुआ ।

गुरुजी - बहुत अच्छे ! बिल्कुल सही ।

उपर्युक्त उदाहरण के माध्यम से हम लाभ व हानि की स्थिति को समझें।

लाभ (Profit) -

जब कोई वस्तु कम दाम में खरीदी (क्रय) की जाती है और अधिक दाम में बेची (विक्रय) की जाती है। अर्थात्

विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

तब, **लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य**

Profit = SP – CP

हानि (Loss) -

लाभ की स्थिति के विपरीत जब कोई वस्तु अधिक दाम में खरीदी (क्रय) की जाती है और कम दम में बेची (विक्रय) की जाती है। अर्थात्

विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य

तब, **हानि = क्रय मूल्य – विकय मूल्य**

loss = CP – SP

लाभ एवं हानि प्रतिशत में

लाभ-हानि को प्रतिशत के रूप में ज्ञात किया जा सकता है । ध्यान रखिए कि लाभ-हानि को प्रतिशत सदैव क्रय मूल्य (खरीदने वाले मूल्य) पर निकाला जाता है।

लाभ प्रतिशत $= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

हानि प्रतिशत $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

उदाहरण : यदि दुकानदार एक कुर्सी 250 रु. में खरीदता है तथा ग्राहक को 300 में बेचता है । उसे कितना लाभ हुआ ?

हल : विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

$$300 > 250$$

अतः,

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

$= 300 - 250$

$= 50$ रु.

तब, **लाभ प्रतिशत** $= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$= \frac{50}{250} \times 100$

$= \frac{5000}{250}$

$= \frac{5000 \div 250}{250 \div 250}$

$= \frac{20}{1} = 20\%$

उदाहरण : यदि दुकानदार ने एक खिलोना कार 100 रु. में खरीद कर उसे 80 रु. में ग्राहक को बेच दिया। तो हानि प्रतिशत कितना होगा ?

हल : विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य

$80 < 100$

तब, **हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य**

$= 100 - 80$

$= 20$

अब, **हानि प्रतिशत** $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$= \frac{20}{100} \times 100$

$= 20\%$

उदाहरण : एक वस्तु 50 रु. में क्रय की गई तथा 10 प्रतिशत लाभ पर बेच दी गई तो उसका विक्रय मूल्य क्या होगा ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है क्रय मूल्य = 50 रु.

अतः विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का 10%

$$= 50 + \left(50 \times \frac{10}{100}\right)$$
$$= 50 + 5$$
$$= 55$$

अतः विक्रय मूल्य 55 रु. है ।

उदाहरण : उमाशंकर ने एक कुलर अपने मित्र अजित को 10 प्रतिशत हानि के साथ 3500 रु. में को बेच देता है तब बताइये उमाशंकर ने कुलर कितने रुपये में क्रय किया था ।

हल : दिया है विक्रय मूल्य = 50 रु.

अतः क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + विक्रय मूल्य का 10%

$$= 3500 + \left(3500 \times \frac{10}{100}\right)$$
$$= 3500 + 350$$
$$= 3850$$

अतः क्रय मूल्य 3850 रु. है ।

प्रश्नावली 7.3

1. दुकानदार और ग्राहक के मध्य हुए क्रय – विक्रय (खरीदने-बेचने) के निम्न सौदे में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए।प्रत्येक स्थिति में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।
    1. एक गोमुखी 50 रुपये में खरीदी गई तथा 40 रु. में बेची गई।
    2. एक कॉटन का शॉल (दुशाला) 200 रु. में खरीदी गयी तथा 220 रु. में बेची गई।
    3. एक शर्ट 250 रु. में खरीदी गई और 300 रु. में बेची गई।
2. राहुल ने एक पुस्तक 200 रु. में खरीदी जिसमें 12% लाभ पर राम को बेच दी, तो पुस्तक का विक्रय मूल्य क्या है ?
3. एक आलू के कट्टें का दाम 500 रु. है, जिसे 3% लाभ पर बेचा गया तो बताइये आलू के कट्टें का विक्रय मूल्य क्या होगा ?

➢ **हमने सीखा -**

1. दैनिक जीवन में हमें प्रायः दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है। ये राशियाँ ऊँचाई, भार, वेतन, प्राप्तांक आदि हो सकती हैं।
2. दो अनुपातों की तुलना उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदलकर की जा सकती है। यदि दोनों समान हर वाली भिन्न समान हैं। तो हम कहते हैं कि दोनों के अनुपात भी तुल्य अनुपात हैं।
3. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। प्रतिशत का अर्थ 'प्रत्येक सौ पर' होता है। अर्थात् 100 बराबर भागों में बाँटना।

$$3\% = \frac{3}{100}$$

दशमलव से प्रतिशत में - 0.4%

$$= \frac{0.4}{10} \times 100 = 40\%$$

भिन्न को दशमलव में - $= \frac{a}{b}\% = \frac{a}{b \times 100}$

$$= \frac{3}{4}\% = \frac{3}{4 \times 100} = \frac{3}{400}$$

या $\frac{3}{400} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25 \times 100} = \frac{75}{10000} = 0.0075$

संख्या को प्रतिशत में - 300 का 4%

$$= 300 \times \frac{4}{100} = 3 \times 4 = 12$$

मूल्य - क्रय मूल्य = खरीदना

विक्रय मूल्य = बेचना

लाभ की स्थिति - विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

हानि की स्थिति - विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

अध्याय 8

परिमेय संख्या

प्रिय बटुकों ! हमने दैनिक जीवन में वस्तुओं को गिनने से प्रारम्भ कर संख्याओं को सीखा है, गिनने (गणना) में प्रयोग की गई संख्याओं को प्राकृत संख्याएँ कही गयी है। 1, 2, 3, 4, 5 ..... प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ प्राप्त हुई। इसके बाद 0, 1, 2, 3, 4 ..... पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मक को सम्मिलित करने पर हमें ..... –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3 ..... पूर्णाङ्क संख्याएँ प्राप्त होती हैं। इस प्रकार हमने हमें संख्या पद्धति का पूर्णाङ्क तक विस्तार से अध्ययन किया।

प्राकृत संख्याएँ	पूर्ण संख्या	पूर्णाङ्क
1, 3, 4, 9, 8, 5, 2, 7	0, 1, 2, 7, 6, 8, 70, 100	–3 –2 –1 –6 0 12 5 7

पूर्व कक्षा में आपको भिन्नों (Fractions) से परिचित करवाया गया था। ये $\frac{\text{अंश (Numerator)}}{\text{हर (Denominator)}}$ के रूप की संख्याएँ होती हैं।

इस अध्याय में हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार कर, परिमेय संख्या की अवधारणा के बारे में जानकारी परिमेय संख्या का संख्या रेखा पर निरूपण, उनकी तुलना और दो परिमेय संख्याओं के बीच की संख्या ज्ञात करना सीखेंगे ।

परिमेय संख्या –

बीजगणितम् में परिमेय संख्या के विषय में निम्न श्लोक मिलता है।

सच्छेदकराशौ भाज्ये भाजके वा ऋणत्वं चेत् फलमृणमेव,

द्वयोर्ऋणत्वे फलं धनमेव । यथा -

$$\frac{-\text{अ}}{\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{व}} \text{ , } \frac{\text{अ}}{-\text{व}} = -\frac{\text{अ}}{\text{व}} \text{ तथा } \frac{-\text{अ}}{-\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{व}}$$

(बीजगणितम्, सच्छेदकराशिगणितम् पृ. 238)

अर्थात् यदि किसी संख्या को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तो उसे परिमेय संख्या कहते हैं। यहाँ $\frac{\text{p}}{\text{q}}$ के अनुपात $p : q$ को $\frac{\text{p}}{\text{q}}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ $q \neq 0$ ($q = 0$ नहीं होना चाहिए) हो, **परिमेय संख्याएँ** कहलाती है।

परिमेय संख्याएँ = $\{ \frac{\text{p}}{\text{q}} /$ जहाँ $q \neq 0$ एवं $\text{p}, \text{q} \in$ पूर्णाङ्क संख्या $(I) \}$

परिमेय संख्याओं के गुणन एवं भाग में चिह्नों के गुणन '**भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम्**' के नियमानुसार होते हैं।

उदाहरण : $\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{-4}$ आदि परिमेय संख्याएँ हैं।

अंश एवं हर -

एक परिमेय संख्या जो कि $\frac{\text{p}}{\text{q}}$ के रूप में होती है। जहाँ p को अंश तथा q को

हर कहते हैं। $\text{हर} \rightarrow \frac{p}{q} \leftarrow$ अंश

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ में 2 अंश तथा 3 हर है। इस प्रकार $-\frac{5}{6}$ में (-5) अंश तथा 6 हर है।

परिमेय संख्याओं के सम्बन्ध में कुछ सामान्य प्रश्नों कि कक्षा में चर्चा चल रही हैं।-

गुरुजी : क्या सभी प्राकृत संख्याएँ परिमेय संख्याएँ हैं ?

प्रत्युष : हाँ, सभी प्राकृत संख्याएँ परिमेय संख्याएँ हैं। 1, 2, 3, 4 ..... प्राकृत संख्याएँ हैं। चूंकि सभी प्राकृत संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे : 2 को $\frac{2}{1}$, 3 को $\frac{3}{1}$

अतः, सभी प्राकृत संख्या परिमेय संख्या होती है।

गुरुजी : क्या सभी पूर्णाङ्क परिमेय संख्याएँ हैं ?

आराध्य : जैसे 0, –3, 1, 3, –4, 5 ..... आदि पूर्णाङ्क हैं।

चूंकि –3 को $\frac{-3}{1}$, 4 को $\frac{4}{1}$, –5 को $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में है।

अतः, सभी पूर्णाङ्क परिमेय संख्याएँ होती हैं। शून्य जो कि पूर्ण संख्या है वह भी परिमेय संख्या है। क्योंकि 0 को $\frac{0}{1}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

गुरुजी : क्या सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं ?

उत्सव : हाँ सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं, क्योंकि भिन्न $\frac{p}{q}$ के रूप में होते हैं।

जहाँ $q \neq 0$ होता है ।

गुरुजी :क्या $\frac{4}{0}$ एक परिमेय संख्या है ?

लक्ष्मी: नहीं, $\frac{4}{0}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। क्योंकि एक परिमेय संख्या का हर शून्य नहीं होता है तथा $\frac{4}{0}$ का हर 0 है।

गुरुजी : बहुत अच्छे ! आपने सभी प्रश्नों के सही उत्तर दिये।

समतुल्य परिमेय संख्या -

किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को समान संख्या से गुणा करके अथवा भाग देकर इन्हें इच्छित अंश अथवा हर में बदल सकते हैं।

परिमेय संख्या $\frac{(-2)}{3}$ पर विचार करते हैं।

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times 2}{3\times 2} = \frac{(-4)}{6}$$

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times 3}{3\times 3} = \frac{(-6)}{9}$$

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times(-4)}{3\times(-4)} = \frac{8}{(-12)} \text{ या } \frac{(-8)}{12}$$

इस प्रकार $\frac{(-2)}{3} = \frac{(-4)}{6} = \frac{(-6)}{9} = \frac{(-8)}{12}$ के समतुल्य है।

आइये, एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{(-30)}{25}$ पर विचार कीजिए ।

$$\frac{(-30)\div 5}{25\div 5} = \frac{(-6)}{5}$$

$$\frac{(-30)\div(-5)}{25\div(-5)} = \frac{6}{(-5)} \text{ या } \frac{(-6)}{5}$$

अतः, $\frac{(-30)\div 5}{25\div 5} = \frac{(-6)}{5}$ के समतुल्य है ।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक-दूसरे के समतुल्य या तुल्य कहीं जाती है ।

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

धनात्मक परिमेय संख्याएँ -

परिमेय संख्याएँ जिनमें अंश तथा हर दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक हों (दोनों का ऋण चिह्न कट जाता है), धनात्मक परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं ।

जैसे : 1. $\frac{2}{3}, \frac{11}{13}, \frac{2}{5}$ यहाँ अंश एवं हर दोनों ही धनात्मक हैं।

2. $\frac{-2}{-3}, \frac{-11}{-15}, \frac{-7}{-5}$ यहाँ अंश एवं हर दोनों ही ऋणात्मक हैं।

$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है । इस प्रकार $\frac{-11}{-15}, \frac{-7}{-5}$ भी धनात्मक परिमेय संख्या है ।

यहाँ अंश एवं हर दोनों ऋणात्मक होने से ऋण का चिह्न हटकर धनात्मक चिह्न हो जाता है। $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है ।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु -

शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

मानक रूप में परिमेय संख्या -

परिमेय संख्या जिसका हर धनात्मक पूर्णाङ्क हो तथा उसके अंश तथा हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड नहीं हो (अंश एवं हर को 1 के अभाव में किसी से विभाजित न किया जा सके) तो उस परिमेय संख्या का मानक रूप कहा जाता है।

उदाहरण : $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{13}$

➢ **विचार कीजिए -**

- संख्या $\frac{3}{4}$ एक मानक रूप में व्यक्त की गई परिमेय संख्या है ?

  हाँ , क्योंकि इसका हर धनात्मक है, तथा अंश एवं हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड नहीं है।

- क्या $\frac{4}{6}$ एक मानक रूप में व्यक्त परिमेय संख्या है ?

  नहीं ,क्योंकि 4 व 6 का सार्व गुणनखण्ड 2 और 1 है। इसे मानक रूप में व्यक्त करने के लिए $\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$

  अतः $\frac{4}{6}$ का मानक रूप $\frac{2}{3}$ है।

उदाहरण : $\frac{(-12)}{18}$ को मानक रूप में बदलिए -

हल : $\frac{(-12)}{18}$

12, 18 का महत्तम समापवर्तक = 6 है।

या 12, 18 के सार्व गुणनखण्ड (1, 2, 3, 6) है।

अतः मानक रूप अंश एवं हर को 6 से भाग देने पर

$= \frac{(-12) \div 6}{18 \div 6} = \frac{(-2)}{3}$

अतः $\frac{(-12)}{18}$ का मानक रूप $\frac{(-2)}{3}$ है।

❖ **करो और सीखो -**

निम्न को मानक रूप में बदलिए ।

1. $\frac{35}{25}$ 2. $\frac{(-15)}{25}$ 3. $\frac{(-20)}{24}$

परिमेय संख्याओं की तुलना (= , > एवं <) -

वैदिक विधि (ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्)

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{7}$ की तुलना करें ?

हल : दी गई परिमेय संख्या है

$\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{7}$

(सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से गुणन करने पर)

$\frac{3}{5} \times \frac{6}{7}$

या 3×7 तथा 6×5

या 21 तथा 30

स्पष्ट है कि $21 \boxed{<} 30$

अतः $\frac{3}{5} \boxed{<} \frac{6}{7}$

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं में से धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या को पृथक कीजिए।

$\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{-4}{-5}, \frac{2}{7}, \frac{-2}{-1}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{-7}, \frac{+8}{+3}\right)$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं की तीन-तीन समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए।

1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{-2}{7}$ 3) $\frac{-4}{-7}$

3. मानक रूप में बदलिए -

1) $\frac{-14}{12}$ 2) $\frac{36}{30}$ 3) $\frac{-25}{45}$

4. तुलना सङ्केत (= , > एवं <) में से सही सङ्केत चुनकर रिक्त-स्थानों को भरिए -

1) $\frac{3}{5} \square \frac{-4}{7}$ 2) $\frac{-3}{7} \square \frac{4}{5}$ 3) $\frac{4}{3} \square \frac{3}{7}$

4) $\frac{-5}{-4} \square \frac{-2}{-3}$ 5) $\frac{5}{7} \square \frac{7}{9}$ 6) $\frac{9}{1} \square \frac{1}{4}$

7) $\frac{4}{6} \square \frac{2}{3}$ 8) $\frac{5}{9} \square \frac{4}{6}$

5. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी परिमेय संख्या बड़ी है -

1) $\frac{-2}{3}, \frac{5}{5}$ 2) $\frac{-5}{6}, \frac{-3}{4}$

3) $\frac{-3}{1}, \frac{4}{3}$ 4) $\frac{2}{3}, \frac{1}{-4}$

6. सत्य / असत्य लिखिए -

1. शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और ना ही ऋणात्मक संख्या

है।

2. $\frac{-4}{6}$ का मानक रूप $\frac{2}{3}$ है।
3. $\frac{-4}{-7}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
4. संख्याएँ $\frac{2}{5}$ एवं $\frac{3}{5}$ में बड़ी परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ है।
5. ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे की तुल्य परिमेय कही जाती हैं।

➢ **हमने सीखा -**

1. परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता है। यहाँ p और q पूर्णांक है। तथा $q \neq 0$ दूसरे शब्दों में अंश तथा हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखण्ड न हो या $HCF\ (p\ ,\ q\ ) = 1$

   जैसे - $\frac{7}{8}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{0}{4}\ ,\ \frac{5}{4}$

2. सभी प्राकृत संख्या तथा पूर्ण संख्या परिमेय संख्या होती है। जैसे -

   $4 = \frac{4}{1}\ ,\ 6 = \frac{6}{1}\ ,\ -7 = \frac{-7}{0}$

3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश या हर को एक ही पूर्णांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है। जो दी गई परिमेय संख्या के **समतुल्य परिमेय संख्या** कही जाती है।

   उदाहरण : $\frac{3}{2} = \frac{3\times5}{2\times5} = \frac{15}{10}$

   अतः $\frac{15}{10}$, संख्या $\frac{3}{2}$ की समतुल्य रूप है।

   $\frac{45}{25} = \frac{45\div5}{25\div5} = \frac{9}{5}$

4. **परिमेय संख्या का वर्गीकरण**

धनात्मक परिमेय संख्या	**ऋणात्मक परिमेय संख्या**
जब अंश और हर दोनों ही धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णाङ्क हों तो वह संख्या **धनात्मक परिमेय संख्या** कहलाती है।	जब अंश व हर दोनों में से एक ऋणात्मक पूर्णाङ्क हों तो वह **ऋणात्मक परिमेय संख्या** कहलाती है।
जैसे : $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{5}$	**जैसे :** $\frac{-3}{4}$, $\frac{-4}{5}$, $\frac{6}{-7}$

5. संख्या '0' न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है ।

6. एक परिमेय संख्या को मानक रूप में तब माना जाता है जब उसका हर धनात्मक पूर्णाङ्क हो तथा अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड न हो या 1 के अतिरिक्त किसी और संख्या से विभाजित न हो।

   जैसे : $\frac{-1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $1\frac{-2}{3}$ आदि मानक रूप हैं।

7. परिमेय संख्या की तुलना में क्रॉस गुणा (**ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्** - वैदिक विधि) कर आसानी से तुलना की जाती है । जैसे –

   $\frac{-4}{5}$ तथा $\frac{6}{7}$ तुलना के लिए क्रॉस गुणा करने पर $(-4) \times 7$ तथा 6×5

   स्पष्ट है कि $(-28) < 30$

   अतः $\frac{(-4)}{5} < \frac{6}{7}$

अध्याय 9

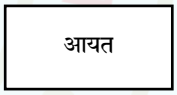
परिमाप और क्षेत्रफल

प्यारे विद्यार्थियों ! हमने पिछली कक्षा में परिमाप और क्षेत्रफल अध्याय के अन्तर्गत वर्ग एवं आयत, दो आकृतियों का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखा था। एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी **परिमाप** है।जबकि एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गये तल के भाग या क्षेत्र को **क्षेत्रफल** कहते हैं। इस अध्याय में आप और कुछ तल की आकृतियों के परिमाप व क्षेत्रफल के बारे में अध्ययन करेंगे।

पूर्व कक्षा में किए गए अध्ययन को दोहराते हैं।

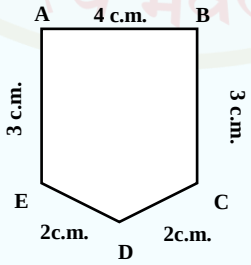
- वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा
- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा
- आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)
- आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई





परिमाप - किसी बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी का योग **परिमाप** कहलाता है।

उदाहरण : नीचे दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए -



हल : परिमाप = चारों ओर की दूरी का योग

= AB + BC + CD + DE + EA

= 4 से.मी. + 3 से.मी. + 2 से.मी. + 2 से.मी. + 3 से.मी.

= 14 से.मी.

अर्थात् दी गई आकृति का परिमाप 14 से.मी. है।

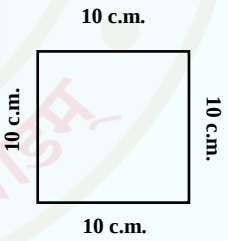
संस्कृत ज्ञान प्रणाली में समकर्ण वाले चतुर्भुजाकार आकृति के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि आर्यभट्टीयम् के निम्न श्लोक में बताई गई है।

वर्गस्समचतुरस्रः फलञ्च सदृशद्वयस्य संवर्गः॥

(आर्यभट्टीयम् ,गणितापाद , 3 अ)

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों भुजाएँ समान हों समचतुरस्र (वर्ग) कहलाता है तथा समान दो भुजाओं का गुणन करने पर क्षेत्रफल ज्ञात होता है। जिसे 'वर्ग' की संज्ञा दी गई है।

उदाहरण : एक वर्गाकार मैदान की भुजा 10 मीटर है तो परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



हल : दिया है -

वर्गाकार मैदान की एक भुजा = 10 मीटर

तब, **वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा**

= 4 × 10 मीटर

= 40 मीटर

तथा, **वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा**

= 10 मी. × 10 मी.

$= 100$ मीटर $\times$ मीटर

$= 100$ (मी.)^2

अतः वर्गाकार मैदान का परिमाप 40 मीटर तथा क्षेत्रफल 100 (मी.)^2 है।

उदाहरण : एक वर्गाकार कक्ष का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसके कक्ष की लम्बाई 5 मीटर हो ?

हल : दिया है -वर्गाकार कक्ष की एक लम्बाई $= 5$ मीटर

तब, **वर्ग का परिमाप** $= 4 \times$ **भुजा (लम्बाई)**

$= 4 \times 5$ मीटर $= 20$ मीटर

उदाहरण : एक आयताकार श्यामपट्ट की लम्बाई 4 मीटर तथा चौड़ाई 3 मीटर है तो आयत का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, आयताकार श्याम पट्ट की लम्बाई = 4 मीटर, चौड़ाई = 3 मीटर

तब, **आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)**

$=$ 2 (4 मीटर + 3 मीटर)

$=$ 2 (7 मीटर)

$=$ 14 मीटर

तथा, **आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई**

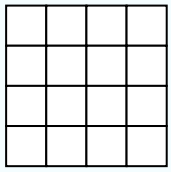
$=$ 4 मीटर $\times$ 3 मीटर

$=$ 12 (मीटर $\times$ मीटर)

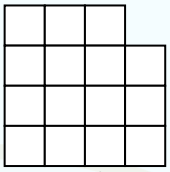
$=$ 12 (मीटर)^2

अतः आयताकार श्यामपट्ट का परिमाप 14 मीटर तथा क्षेत्रफल 12 (मीटर)^2 है।

➢ **सोचिए -**



आकृति 1



आकृति 2

आकृति 1 आकृति 2

1. उपर्युक्त आकृति 1 तथा आकृति 2 का परिमाप बराबर है या नहीं ?
2. उपर्युक्त आकृति 1 एवं आकृति 2 का क्षेत्रफल बराबर(समान) है या नहीं ?

❖ **करो और सीखो -**

निम्नलिखित परिस्थितियों में बताइये कि कब परिमाप तथा कब क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

1. यदि कक्षा में दरी बिछानी हो .....
2. यदि गुरुकुल के चारों ओर तार फेन्सिंग करवानी हो .....
3. यदि रेशम (कौशेय) दुपट्टे के किनारों पर लेस कोर लगाना हो .....

उदाहरण : एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 100 (से. मी.)^2 यदि शीट की चौड़ाई 20 से.मी. है तो लम्बाई क्या होगी ?

हल : दिया है

आयताकार शीट का क्षेत्रफल = 100 (से. मी.)^2

चौड़ाई = 20 से.मी., लम्बाई = ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि –

आयताकार शीट का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$100 = \text{लम्बाई} \times 20$$

या $$\text{लम्बाई} = \frac{100}{20} \text{ से.मी.}$$

$$= 5 \text{ से.मी.}$$

अतः आयताकार शीट की लम्बाई 5 से.मी. है।

उदाहरण : पवन ने एक प्लॉट लिया जिसकी लम्बाई 10 मी. एवं चौड़ाई 20 मी. है तो बताइये पवन ने कितनी भूमि (क्षेत्रफल) खरीदी ?

हल : दिया है **आयताकार का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई**

$$= 10 \text{ मीटर} \times 20 \text{ मीटर}$$

$$= 200 \text{ (मी.)}^2$$

अतः पवन ने प्लॉट के लिये 200 वर्ग मीटर भूमि खरीदी।

प्रश्नावली 9.1

1. आयत का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी लम्बाई एवं चौड़ाई निम्न है -

   1. लम्बाई = 10 से.मी., चौड़ाई = 30 से.मी.
   2. लम्बाई = 20 से.मी., चौड़ाई = 50 से.मी.
   3. लम्बाई = 40 मीटर, चौड़ाई = 30 मीटर

2. वर्ग का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा निम्नलिखित है-

   1. 10 से.मी. 2. 30 से.मी.
   3. 40 मीटर 4. 15 मीटर

3. यदि एक आयत का क्षेत्रफल 500 (मीटर)^2 तथा आयत की लम्बाई 50 मीटर हो, तो चौड़ाई कितने मीटर होगी ?
4. यदि आयताकार खेत का क्षेत्रफल 1000 (मीटर)^2 तथा खेत की चौड़ाई 200 मीटर है तो खेत की लम्बाई क्या होगी ?
5. उस आयताकार भूमि का क्षेत्रफल क्या होगा जिसकी लम्बाई 15 मी. एवं चौड़ाई 20 मीटर हो ?
6. रवि ने वर्गाकार भूमि खरीदी जिसकी लम्बाई 20 मीटर तथा चौड़ाई 40 मीटर है। तो रवि की भूमि क क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. सही-जोड़ी का मिलान कीजिए -

1) वर्ग का क्षेत्रफल = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

2) आयत का क्षेत्रफल = 4 × एक भुजा

3) वर्ग का परिमाप = भुजा × भुजा

4) आयत का परिमाप = लम्बाई × चौड़ाई

8. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें -

(12 मी, 16 मी, 25से.मी.^{2}, 12 से.मी.^{2})

1. यदि एक आयत की लम्बाई 3 से.मी. एवं चौड़ाई 4 से.मी. है तो क्षेत्रफल ..... होगा।
2. यदि एक वर्गाकार पटले की एक भुजा 4मी. है तो पटले का परिमाप ..... होगा।
3. यदि एक आयत की लम्बाई 4 मी. व चौड़ाई 2 मी. है तो आयत का परिमाप ..... होगा।
4. यदि वर्ग की एक भुजा 5 से.मी.. है तब उसका क्षेत्रफल ..... होगा।
5. वर्ग का क्षेत्रफल = ... ।
6. आयत का क्षेत्रफल = ... ।
7. वर्ग का परिमाप = ... ।
8. आयत का परिमाप = ... ।

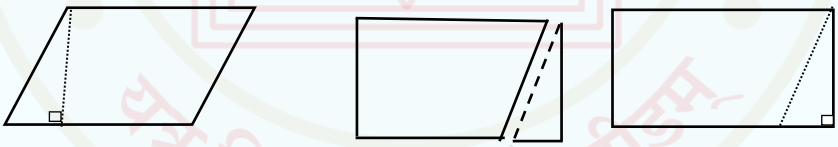
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल -

हमे आस-पास के परिवेश में वर्ग एवं आयत के अतिरिक्त कई दूसरे आकार भी देखने को मिलते हैं। आप ऐसे भूखण्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे, जो समान्तर चतुर्भुज जैसे आकार का हो।



समान्तर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर होती हैं। एक समान्तर चतुर्भुज को एक समान क्षेत्रफल वाले आयत में रूपान्तरित किया जा सकता है।

समान्तर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लम्ब खींचिए । इस त्रिभुज को काट लीजिए और इस त्रिभुज को समान्तर चतुर्भुज की दूसरी भुजा के साथ रखिए ।



आकृति 1 **आकृति 2** **आकृति 3**

गुरुजी - आप **आकृति** 3 में कौन-सा आकार प्राप्त करते हैं ?

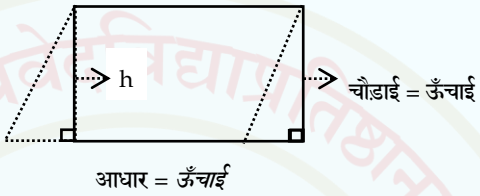
विशाल - हमें **आकृति** 3 में एक आयत का आकार प्राप्त हुआ ।

गुरुजी- बिल्कुल सही ! क्या आयत का क्षेत्रफल समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बराबर है ?

प्रत्यूष - हाँ, क्योंकि **आकृति** 1 में परिवर्तन से **आकृति** 3 आयत ने भी

समान (बराबर) क्षेत्र घेरा है।

गुरुजी - बहुत अच्छे ! जी, हमने देखा कि बनाए गए आयत की लम्बाई, समान्तर चतुर्भुज के आधार की ऊँचाई के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई के बराबर है ।



अब,

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

आधार × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई

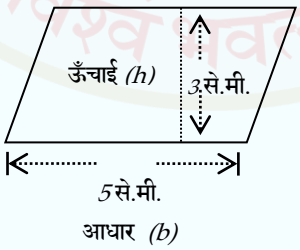
लेकिन आयत की लम्बाई (l) तथा चौड़ाई (b) क्रमशः समान्तर चतुर्भुज का आधार (b) और ऊँचाई (h) है।

इस प्रकार, **समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल**

आधार × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई

$= b \times h$

उदाहरण : नीचे दी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



हल : हम जानते हैं, उपर्युक्त दी गई आकृति समान्तर चतुर्भुज है, जिसमें आधार की लम्बाई (b) = 5 से.मी. तथा समान्तर भुजाओं की संगत ऊँचाई (h) = 3 से.मी.

तब, **समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई × ऊँचाई**

= 5 से.मी. × 3 से.मी.

= 15 (से. मी.)^2

अतः उपर्युक्त दी गई आकृति का क्षेत्रफल 15 (से. मी.)^2 है।

उदाहरण : एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा 5 से.मी. तथा संगत ऊँचाई 6 से.मी. है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है

समान्तर चतुर्भुज की भुजा आधार की लम्बाई (b) = 5 से.मी.

आधार की ऊँचाई (h) = 6 से.मी.

तब, **समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई × ऊँचाई**

= 5 से.मी. × 6 से.मी.

= 30से. मी.^{2}

उदाहरण : एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 30(मीटर)^2 है जिसकी एक भुजा 10 मीटर हो तो ऊँचाई ज्ञात करें ।

हल : दिया है -

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 30(मीटर)^2 एवं एक भुजा = 10 मीटर

हम जानते हैं,

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई × ऊँचाई

$$30(\text{मीटर})^2 = 10 \text{ मीटर} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{या} \quad \text{ऊँचाई} = \frac{30(\text{मीटर})^2}{10 \text{ मीटर}}$$

$$\text{या} \quad \text{ऊँचाई} = 3 \text{ मीटर}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल -

अथर्ववेद के निम्न मन्त्र में किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल का विवरण प्राप्त हुआ है।

यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं श्यान:।

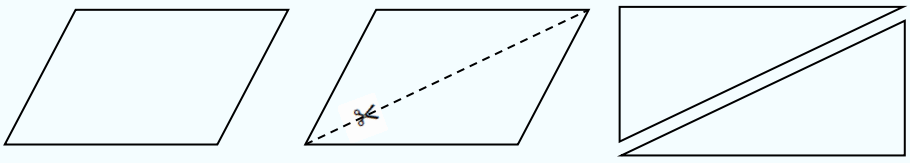
वत्स कामदुघो विराज: स गुहा चक्रे तन्व: पराचै॥

(अथर्ववेद : 8/9/2)

अर्थात् उस क्षेत्र में, जो त्रिभुजाकार आकृतियों के अन्तर्गत सन्निहित है। क्षेत्र की समस्त विशेषताएँ विद्यमान रहती है। इसका तात्पर्य है कि त्रिभुज के अन्तर्गत क्षेत्रफल विद्यमान रहता है। तथा रेखा गणित का आधार पर क्षेत्र का गुण अर्थात् क्षेत्रफल पर ही आधार होता है।

किसी त्रिभुजाकार खेत में घास लगाने का खर्च ज्ञात करना है। त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करें ?

किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण, समान्तर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटता है ।



आप उपर्युक्त आकृतियों को देखकर समझ सकते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के

विकर्ण को काटने पर दो समान क्षेत्रफल वाले सर्वांगसम त्रिभुजाकार प्राप्त होते हैं। दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है। त्रिभुज के आधार व ऊँचाई क्रमशः समान्तर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई के बराबर होता है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार $\times$ ऊँचाई)

या त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(b \times h)$

उपर्युक्त त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र आर्यभट्टीयम् एवं लीलावती गणित के निम्न श्लोक बताया गया है।

त्रिभुजस्य फलशरीरं समदलकोटीभुजार्धसंवर्ग।

(आर्यभट्टीयम् ,गणितपाद : 6)

उपर्युक्त श्लोक से त्रिभुज का क्षेत्रफल भुजार्ध (आधार) तथा लम्ब के गुणनफल के बराबर होता है।

लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति।।

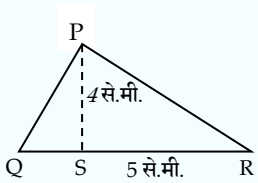
(लीलावती गणित, 209)

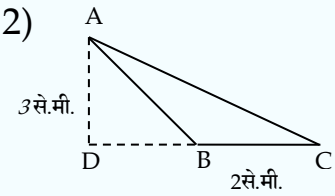
अर्थात् त्रिभुज में लम्ब को भूमि(आधार) से गुणा कर उसका आधा करें, तो त्रिभुज का स्पष्ट फल(क्षेत्रफल) प्राप्त होता है।

उपर्युक्त आर्यभट्टीयम् एवं लीलावती गणित के श्लोकों कि व्याख्या के आधार पर त्रिभुज के क्षेत्रफल सूत्र निम्न रूप में लिख सकते है।

अर्थात् **त्रिभुज का क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2}$ (आधार $\times$ ऊँचाई)

उदाहरण : निम्न त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें -

1) 

2) 

हल : 1) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(QR \times PS)$

$= \frac{1}{2}(5\text{से. मी.} \times 4\text{से. मी.})$

$= \left(\frac{20}{2}\right)\text{से. मी.}^2$

$= 10\text{से. मी.}^2$

2) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(BC \times AD)$

$= \frac{1}{2}(2\text{से. मी.} \times 3\text{से. मी.})$

$= \left(\frac{6}{2}\right)\text{से. मी.}^2$

$= 3\text{से. मी.}^2$

उदाहरण : किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 6 से.मी. एवं ऊँचाई 4 से.मी. है।

हल : दिया है - त्रिभुज का आधार $=$ 6 से.मी.

ऊँचाई $=$ 4से.मी.

हम जानते हैं,कि **त्रिभुज का क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2}$ (आधार $\times$ ऊँचाई)

$= \frac{1}{2}(6\text{से. मी.} \times 4\text{से. मी.})$

$= \left(\frac{24}{2}\right)\text{से. मी.}^2 = 12(\text{से. मी.})^2$

उदाहरण : किसी त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 60 मीटर एवं ऊँचाई 20 मीटर है।

हल: दिया है - त्रिभुज का आधार = 60 मीटर

ऊँचाई = 20 मीटर

हम जानते हैं,कि **त्रिभुज का क्षेत्रफल** = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

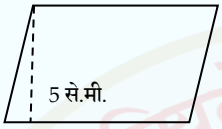
= $\frac{1}{2}$ (60 मीटर × 20 मीटर)

= $600(\text{मीटर})^2$

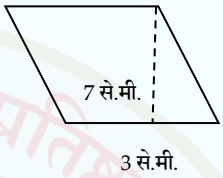
प्रश्नावली 9.2

1. निम्न आकृतियों को देखकर समान्तर चतुर्भुज एवं त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए -

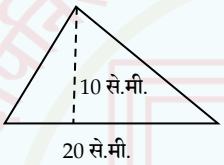
1)



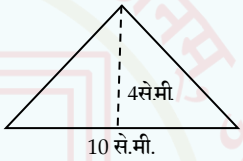
2)



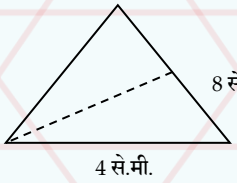
3)



4)

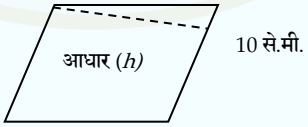


5)



2. एक समान्तर चतुर्भुज का आधार 7 से.मी. समान्तर भुजाओं की संगत ऊँचाई 8 से.मी. है तब समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $30(\text{से. मी.})^2$ है और आधार 10 से.मी. हो तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

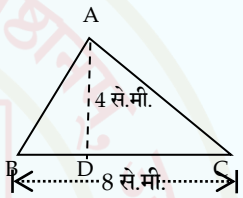


4. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आधार व ऊँचाई क्रमशः 5 मीटर व 7 मीटर है।

5. एक त्रिभुज का आधार व ऊँचाई क्रमशः 7 से.मी. व 2 से.मी. है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

6. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसका आधार 10 मीटर व ऊँचाई 5 मीटर है।

7. निम्न आकृति ΔABC में आधार $BC = 8$ से.मी. व ऊँचाई $AD = 4$ से.मी. है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



8. रिक्त-स्थानों का मान ज्ञात करें ।

क्र.	आधार	ऊँचाई	समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
1)	10 से.मी.	.....	300 से.मी.^{2}
2)	.....	75 से.मी.	150 से.मी.^{2}
3)	15 से.मी.	.....	30 से.मी.^{2}

9. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

आधार × ऊँचाई , $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई), 50 (से.मी.)^2,100 से.मी.^{2} , दो, आधा

1) त्रिभुज का क्षेत्रफल = ...

2) समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण, इसे ..... त्रिभुजों में बांटता है।

3) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल ..... होता है।

4) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ...

5) यदि आधार = 5 से.मी. व ऊँचाई = 10 से.मी. हो तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ..... होगा।

6) यदि आधार = 10 से.मी. व ऊँचाई = 20 से.मी. है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ..... होगा।

वृत्त -

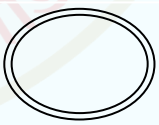
आपने दैनिक जीवन में वृत्त के आकार के कई चित्र देखे होंगे -



चूड़ी



कुँआ



खेल के मैदान में दौड़ का पथ

उपर्युक्त आकार के अतिरिक्त यदि कोई आकार घुमावदार या वक्राकार होता है, तो वह **वृत्त** का आकार कहलाता है।

❖ **करो और सीखो :-**

निम्न में वृत्ताकार को पहचाने और चिह्नित (✓) करें ?



....

अत: हम कह सकते हैं। वृत्त एक बन्द समतलीय आकृति है जो कि एक द्विविमीय (2D) आकार है ।

वृत्त की परिभाषा

किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ **वृत्त** कहलाता है। यह निश्चित बिन्दु, **वृत्त का केन्द्र** कहलाता है। अत: वृत्त एक बन्द समतलीय आकृती है।



वृत्ताकार

वृत्त की परिधि -

उत्सव एक घुमावदार आकार के अलग-अलग कार्ड काटता है । वह इन कार्डों को सजाने के लिए इनके चारों और किनारी लगाना चाहता है । प्रत्येक के लिए कितनी लम्बी किनारी की आवश्यकता होगी ।



क्या आप उपर्युक्त को पैमाने स्केल की सहायता से परिधि को माप सकते हैं ?

किसी वृत्त की परिधि द्वारा केन्द्र पर 360 डिग्री का कोण निर्मित करने का विवरण ऋग्वेद के निम्नलिखित मन्त्र में स्पष्ट परिलक्षित होता है ।

द्वादश प्रधश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत् ।

तस्मिन्त्साकं त्रिशता न् शंकवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलास:।।

(ऋग्वेद : 1/164/48)

अर्थात् एक चक्र है। जिसे द्वादश (बारह) आरे घेरे हुए हैं। उसके तीन प्रभाग (नाभियाँ) हैं।उसे कोई विद्वान (गणितज्ञ) ही जानते हैं। उसमें 360 गतिशील कीलें संलग्न है।

वृत्त का केन्द्र बिन्दु के चारों ओर वक्र रेखा से घिरा होता है । वक्र रेखा की लम्बाई को वृत्त की परिधि कहते हैं। दूसरे शब्दों में वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी वृत्त की **परिधि** (Circumference) कहलाती है इसे C से दर्शाते हैं ।



वृत्त की त्रिज्या

वृत्त के केन्द्र से लेकर परिधि तक की दूरी **वृत्त की त्रिज्या** कहलाती है। वृत्त की त्रिज्या(Radius) को 'r ' से दर्शाते हैं।



वृत्त का व्यास -

परिधि पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है **वृत्त का व्यास** कहलाती है।व्यास(Diameter) को 'D' से दर्शाया जाता है । **वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दो गुणा होता है ।**

वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दो गुणा होता है । वृत्त पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत्त की **जीवा** कहलाती है । वृत्त का व्यास, वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है ।



वृत्त का व्यास

वृत्त के परिधि और व्यास के अनुपात, एक स्थिर अनुपात है । इसे π (पाई) से प्रदर्शित करते हैं । इसका मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लगभग है ।

आर्यभट्टीयम् में π का मान ज्ञात करने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

चतुरधिक शतमष्टगुणं द्वाषष्ठिस्तथा सहस्राणाम् ।

अयुत द्वय विष्कम्भस्यासन्ने वृत्त परिणाहः ॥

(आर्यभट्टीयम् गणितपाद : 10)

अर्थात् दो आयुत (20,000) परिमित व्यास की आसन्न परिधि का परिमाण 62,832 है । 499 ई. में आर्यभट्ट ने इससे सूक्ष्मतर पाई का मान बताया है।

इसलिए, $\pi = \frac{62,832}{20,000} = 3.1416$

सूत्र : $\frac{\text{परिधि } (C)}{\text{व्यास } (D)} = \boldsymbol{\pi}$

परिधि $=$ π व्यास

या $C = \pi D$

या $= \pi \times 2r$

अतः, वृत्त की परिधि $= \mathbf{2\pi r}$

सङ्केत

व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या
$= 2r$

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 5 से.मी. है तो वृत्त की परिधि ज्ञात करें ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या = 5 से.मी.

तब, हम जानते हैं -

वृत्त की परिधि $= \mathbf{2\pi r}$

$= 2\pi \times 5$से. मी.

$= 2 \times 5 \times \pi$ से. मी.

$= 10\pi$ से. मी.

अतः वृत्त की परिधि 10π से. मी. है।

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 14 से.मी. है तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

$\left[\text{जहाँ } \pi \text{ का मान} = \frac{22}{7}\right]$

हल : दिया है -

वृत्त की त्रिज्या $(r) = 14$ से. मी.

तब, हम जानते हैं -

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \pi \times 14$ से. मी. (π का मान रखने पर $\pi = \frac{22}{7}$)

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 88$ से.मी.

अतः वृत्त की परिधि = 88 से.मी. है।

उदाहरण : यदि वृत्त का व्यास 30 से.मी. है तो वृत्त की परिधि क्या होगी ?ज्ञात करें ।

हल : हम जानते हैं - वृत्त की त्रिज्या (r) $= \frac{\text{व्यास } (D)}{2}$

$= \frac{30 \text{ से.मी.}}{2}$

$= 15$से. मी.

तब, **वृत्त की परिधि** $= 2\pi r$

$= 2 \times \pi \times 15$ से. मी.

$= 30\,\pi$ से. मी.

अन्य विधि से , **वृत्त की परिधि** $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times 30$ से. मी.

$= 30\,\pi$ से. मी.

वृत्त का क्षेत्रफल –

वृत्त द्वारा घेरा गया क्षेत्र , वृत्त का क्षेत्रफल कहलाता है। इसे 'A' से दर्शाते हैं। लीलावती गणित में वृत्त के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिये निम्न श्लोक बताया है।

वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यास पादः फलं तत् ।

(लीलावती गणित : 41 अ ,पृ.81)

लीलावती गणित के उपर्युक्त श्लोक बताया गया है ,कि परिधि को व्यास से गुणा कर चार से भाग देने पर वृत्त का क्षेत्रफल प्राप्त होता है ।

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{4}$$

$$= \frac{\pi \times \text{व्यास} \times \text{व्यास}}{4}$$

$$= \frac{\pi \times 2 \text{ त्रिज्या} \times 2 \text{ त्रिज्या}}{4}$$

उपर्युक्त स्थिति को सरल करने पर-

या वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

या **वृत्त का क्षेत्रफल** $= \boldsymbol{\pi r^2}$

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 5 से.मी. है तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या $= 5$ से. मी.

तब हम जानते हैं

वृत्त का क्षेत्रफल $= \boldsymbol{\pi r^2}$

$= \pi(5 \text{ से. मी.})^2$

$= 25\,\pi$ से. मी.^{2}

π का मान रखने पर $= \left(\pi = 3.14 \text{ या } \frac{22}{7}\right)$

$= 3.14 \times 25 = 78.5$ से. मी.^{2}

उदाहरण : 3 से. मी. त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है, त्रिज्या 3 से. मी.

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \pi(3 \text{ से. मी.})^2$

$= \pi \times 9 \text{ से. मी.}^2$

$= 9\pi \text{ से. मी.}^2$

➢ **प्रयास कीजिए -**

1. यदि वृत्त की त्रिज्या 3 से.मी. है तो वृत्त का व्यास ..... प्राप्त होगा।
2. यदि 6 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि ..... π से. मी. प्राप्त होती है।
3. व्यास, वृत्त की त्रिज्या का ..... होता है।
4. यदि वृत्त की व्यास 100 से.मी. है तो वृत्त का त्रिज्या ..... होगा।
5. यदि 18 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त का व्यास ..... से. मी. होगा।
6. यदि वृत्त की व्यास 13 से.मी. है तो वृत्त की त्रिज्या ..... होगा।
7. वृत्त का व्यास = ...
8. वृत्त की परिधि = ...
9. वृत्त का क्षेत्रफल = ...
10. वृत्त का त्रिज्या = ...

प्रश्नावली 9.3

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए - $\left(\text{जहाँ } \pi = \frac{22}{7}\right)$

   1) 14 से.मी. 2) 21 मी.

2. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए -

   1) त्रिज्या = 4 से.मी. 2) व्यास = 12 से.मी.

3. यदि एक वृत्ताकार फूलों के बगीचे की त्रिज्या 6 मीटर है, तो क्यारी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

4. यदि एक वृत्ताकार शीट का व्यास 6 से.मी. है तो शीट की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

5. एक वृत्ताकार पाइप की त्रिज्या 5 से.मी. है, तो पाइप के चारों और टेप लपेटने की आवश्यक लम्बाई क्या होगी ज्ञात करें ?

➢ हमने सीखा -

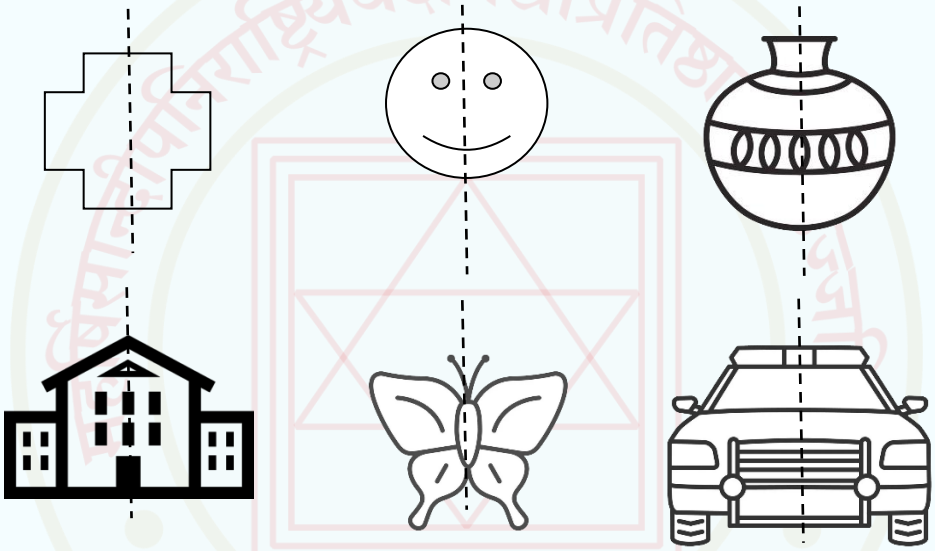
1. परिमाप एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल बन्द आकृति द्वारा घेरे गये क्षेत्र को दर्शाता है।
2. पूर्व कक्षा में किया गया अभ्यास एक वर्ग व आयत का परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र -
   1. वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा
   2. वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा
   3. आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)
   4. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
   $= b \times h$
4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई
5. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)
6. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी **परिधि** कहलाती है।
   वृत्त की परिधि = $2\pi r$ (जहाँ r = त्रिज्या है।)
   वृत्त की परिधि = $\pi \times$ व्यास (व्यास = $2 \times r$)
7. वृत्त द्वारा घेरे गये तल वृत्त का **क्षेत्रफल** कहलाता है।
   वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
   यहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

अध्याय 10

सममिति

रैखिक सममिति

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए -



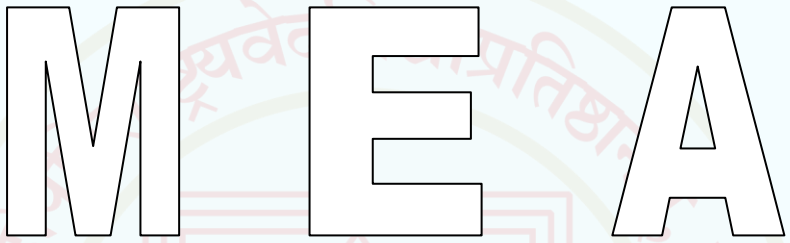
निम्न प्रश्नों का उत्तर अपने साथियों से चर्चा करके जानिए।

1. चित्रों में खींची गई रेखा चित्र को कितने भागों में बाँटती है ?
2. क्या बाँटे गए भाग एक समान हैं ?
3. क्या चित्रों में ऐसी और रेखाएँ खींची जा सकती हैं ? रेखाएँ खींचकर देखिए।

आप देखेंगे कि बिन्दु रेखा चित्र को ठीक दो बराबर भागों में बाँटती है। ऐसी रेखाएँ सममित रेखाएँ कहलाती है। तथा ऐसे चित्र **सममित चित्र** कहलाते हैं।

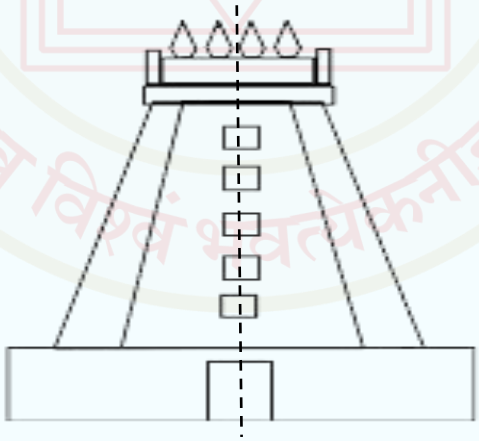
❖ **करो और सीखो -**

निम्न में सममित रेखाएँ बनाइये -



सममित रेखा चित्र को एक जैसे भागों में बाँटती है। यह खड़ी, आड़ी अथवा तिरछी भी हो सकती है। सममित रेखा से मोड़ने पर एक भाग दूसरे भाग का पूर्णतः ढ़क लेता है ।

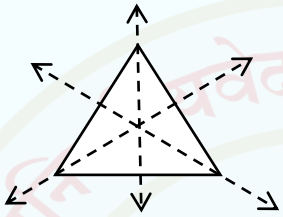
सामान्यतः सममित आकृति, असममित आकृतियों से सुन्दर दिखाई देती है।

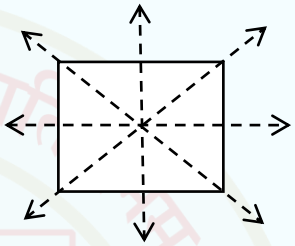


उपर्युक्त मन्दिर का चित्र जो सममिति के कारण से अत्यधिक सुन्दर दिखाई देता है।

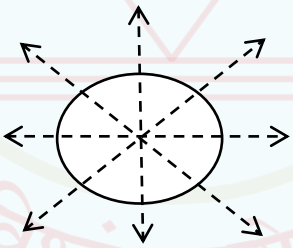
एक से अधिक सममित रेखाएँ -

कई चित्रों (आकृतियों) में एक से अधिक सममित रेखा हो सकती है। नीचे दिए चित्रों में कितनी सममित रेखा बनाई जा सकती है।

1) 

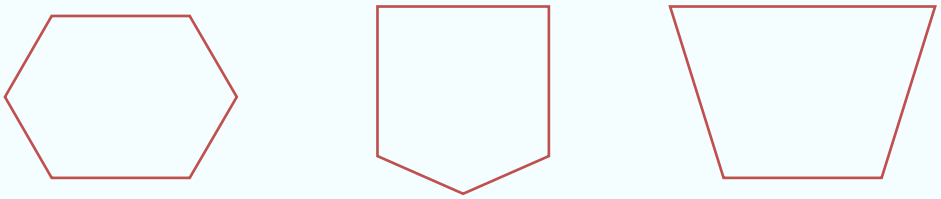
2) 

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि एक चित्र में एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं। रोचक बात यह है कि सम त्रिभुज में तीन, वर्ग में चार सममित रेखाएँ होती हैं। बहुभुज में भुजाओं के बढ़ने के साथ सममित रेखाओं की संख्या भी बढ़ती है। एक वृत्त में अनन्त सममित रेखाएँ हो सकती है ।



➢ **प्रयास करें -**

निम्न आकृति में कितनी सममित रेखाएँ खींचि जा सकती है।



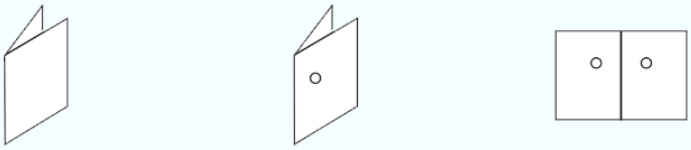
परावर्तन सममिति

एक समतल दर्पण लीजिए तथा उसके विभिन्न वस्तुओं को बारी-बारी से देखिए । हम वस्तुओं के प्रतिबिम्ब दर्पण में देख सकते हैं। नीचे दिए गए चित्रों को दर्पण में इस प्रकार रखो, कि आधा हिस्सा दर्पण में सामने रखें रहें । हम देखते हैं कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने है तथा आधा दर्पण में दोनों हिस्सों से मिलने से चित्र पूरा होता है। यह **परावर्तन सममिति** है। दर्पण में बनने वाले प्रतिबिम्बों को देखिए ।



उपर्युक्त चित्रों में दर्पण प्रतिबिम्ब चित्र का आधा भाग है । दर्पण का किनारा सममित अक्ष के रूप में इस प्रकार रैखिक सममिति की अवधारणा परावर्तन के निकट का सम्बन्ध है ।दर्पण की रेखा एक सममित रेखा ज्ञात करने में मदद करती है।निम्न चित्रों में B व D का दर्पण परावर्तन दिखाया गया है । उपर्युक्त आकृति के दर्पण परावर्तन में पार्श्व परिवर्तन या अभिमुखों का दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।

पेपर में छेद करने वाला खेल खेले -



एक कागज को 2 आधे भाग में मोड़िए

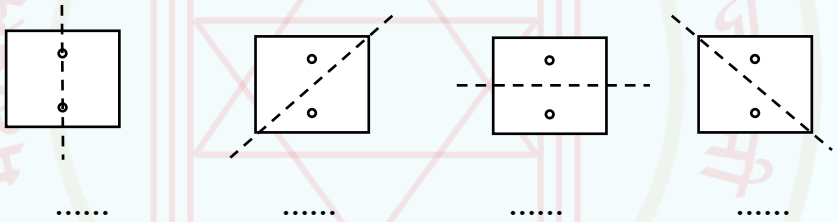
एक छेद करें।

मोड़ के निशान के अनुदिश दो छेद हैं।

मोड़ का निशान एक **सममित रेखा** (या अक्ष) है ।

➢ **प्रयास करें -**

एक कागज के छेद को देखकर सममित रेखा को ज्ञात कीजिए (सही विकल्प का चयन करें)



....

घूर्णन सममिति -



जब घड़ी की सूईयाँ घूमती हैं तो आप क्या समझते हैं? आप समझते हैं कि ये घूर्णन कर रही है ।घड़ी की सूईयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिन्दु के चारों ओर होता है। घड़ी जिस दिशा में घूमती है। वह घूर्णन (Rotation) **दक्षिणावर्त घूर्णन** (Clock wise) कहलाता है। अन्यथा **घूर्णन वामावर्त** (anticlock wise) कहलाता है। जब घूर्णन एक

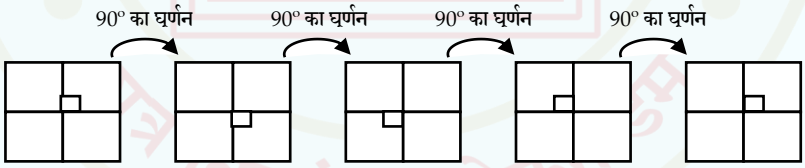
निश्चित बिन्दु के चारों तरफ हो तो यह निश्चित घूर्णन बिन्दु **घूर्णन का केन्द्र** कहलाता है। घूर्णन के दौरान घूमे गये कोण को **घूर्णन कोण** कहते हैं। हम जानते हैं कि एक पूरे चक्कर में 360° का घूर्णन होता है।

एक आधे या अर्द्ध चक्कर और एक चौथाई चक्कर के घूर्णन कोणों के क्रमशः क्या माप हैं ?

आधे या अर्द्ध चक्कर का अर्थ 180° का घूर्णन तथा एक चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है । घूर्णन वामावर्त या दक्षिणावर्त हो सकता है । यदि घूर्णन के बाद वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है,तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है ।

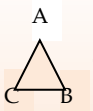
एक पूरे चक्कर (360°) में एक वस्तु स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस **घूर्णन सममिति का क्रम** कहलाती है।

वर्ग का घूर्णन -

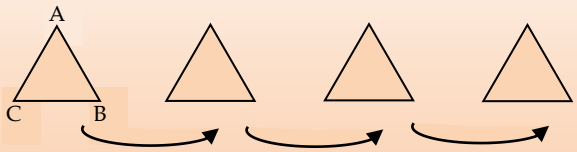


वर्ग अपने घूर्णन में चार बार में अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आता है। अतः इसका घूर्णन क्रम 4 है तथा प्रत्येक 90° पर वह अपनी पहले वाली अवस्था में आता है। अतः वर्ग का घूर्णन कोण 90° है।

❖ **करो और सीखो**

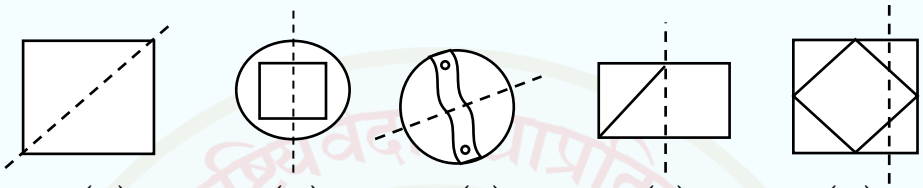


त्रिभुज का वामावर्त घूर्णन की दिशा में घूर्णन क्रम बताइयें -



प्रश्नावली 10.1

1. नीचे दी गई आकृति में जो बिन्दु रेखा दर्शाई गई है वह आकृति की सममित रेखा है या नहीं, बताइये ।



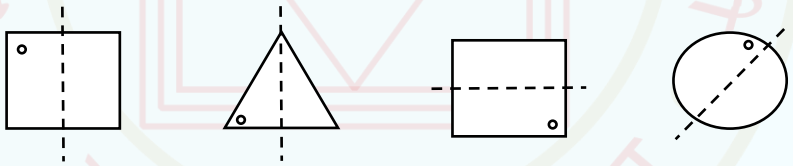
(क) (ख) (ग) (घ) (ङ)

2. नीचे दी गयी आकृति की सममित रेखा खींचिए -



(क) (ख) (ग)

3. नीचे सममित रेखा रेखाएँ दी हुई है । अन्य छेद ज्ञात करें ।

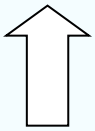


(क) (ख) (ग) (घ)

4.  के घूर्णन की दिशा, घूर्णन कोण व घूर्णन क्रम बनाइये ।



5. निम्न आकृति का घूर्णन क्रम बताइये ।



➢ **हमने सीखा**

1. एक आकृति में रैखिक सममित तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके, जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर सम्पाती हो जाए।
2. प्रत्येक बहुभुज में उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी कि उसमें भुजाएँ **होती हैं।**

समबहुभुज	**समपञ्चभुज**	**वर्ग**	**त्रिभुज**
सममित रेखाओं की संख्या	5	4	3

3. दर्पण परावर्तन में अभिमुखों में दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।
4. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिन्दु के चारों और घुमाया जाता है। निश्चित बिन्दु **घूर्णन का केन्द्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन कोण** कहते हैं।
5. यदि घूर्णन के बाद वस्तु की स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमे **घूर्णन सममिति** है।
6. एक पूरे चक्कर (360°) में कोई वस्तु(आकृति) जितनी बार स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही दिखाई देती है वह संख्या उस **घूर्णन सममिति का क्रम** कहलाती है।

भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान

❖ **भास्कराचार्य** (1114-1185) :

भास्कराचार्य का जन्म 1114 ईस्वी को बीजापुर, कर्नाटक के देशष्ठ ऋग्वेदी ब्राह्मण परिवार में हुआ था। उनके पिता महेश्वर (महेश्वर उपाध्याय) एक गणितज्ञ, खगोल विज्ञानी तथा ज्योतिषी थे जिन्होंने भास्कराचार्य जी को गणित सिखाया था। बचपन से भास्कर को गणित व खगोल विज्ञान में बहुत रुचि थी। आरम्भिक शिक्षा ग्रहण करने के बाद वह इसी कार्य में अग्रसर रहे। बाद में, वह उज्जैन की खगोल विज्ञान जन्तर-मन्तर का मुख्य अध्यक्ष भी बने। यह जन्तर-मन्तर उस समय की सबसे बड़ी जन्तर-मन्तर थी।

भास्कर सह्याद्री क्षेत्र (वर्तमान जलगांव जिला, महाराष्ट्र) में रहा करते थे। पिता से ग्रहण की हुई शिक्षा उन्होंने अपने बेटे लोक समुद्र को भी सिखाई तथा उसे गणित व खगोल विज्ञान के बारे में बताया। लोक समुद्र के बेटे ने 1207 में एक स्कूल का निर्माण करवाया जहाँ पर उसके दादा भास्कर के सिद्धान्तों को सिखाया जाता था। भास्कर जब 36 वर्ष के थे तब उन्होंने सिद्धान्त शिरोमणि की रचना की थी। इस सिद्धान्त शिरोमणि में उन्होंने गणित की बहुत सारी शाखाओं का आधारभूत ज्ञान व सूत्रों का प्रतिपादन किया है। जब वह 69 वर्ष के थे उन्होंने करण

कुतूहल की रचना की थी। भास्कराचार्य जी कि प्रमुख रचना सिद्धान्त शिरोमणि के मुख्यतः चार भाग हैं। ये सभी भाग गणित की ही शाखाएँ हैं।

1. लीलावती गणितम् 2. बीजगणितम्

3. ग्रहगणितम् 4. गोलाध्याय

❖ **बिभुति भूषण दत्ता (1888-1958) :**

भारतीय गणित के इतिहासकार थे। इनकी शिक्षा कलकत्ता विश्वविद्यालय में हुई थी जहाँ से इन्होंने मिश्रित गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि प्राप्त की, साथ ही उन्हें एक शोध छात्र वृत्ति भी मिली। युवा अवस्था में ही इनका झुकाव सन्यास की ओर हो गया। 1920 में उनका नाम स्वामी विष्णु तीर्थ महाराज रखा गया। 1921 में हाईड्रोडाईनेमिक्स के क्षेत्र में शोध प्रबन्ध के लिये इन्हें डी. एस. सी .की उपाधि मिली। उसके बाद प्रो. गणेश प्रसाद के प्रभाव में आकर इनकी रुचि गणित के इतिहास की ओर हो गई।

1926-35 की अवधि के दौरान दत्ता ने पचास से अधिक शोध पत्रों को प्रकाशित किया, जिनमें उन्होंने भारतीय गणित के विभिन्न पहलुओं एकत्र कर के उनका अध्ययन किया। इस दौरान बड़ी संख्या में पाण्डु लिपियाँ तैयार हुयीं जिन्होने हिन्दू गणित का इतिहास जैसी पुस्तक का आधार तैयार किया। 1929 में दत्ता ने कलकत्ता विश्वविद्यालय के प्रोफेसर पद से इस्तीफा दे दिया,1934 में इसके

बारे में प्रोफेसर कार्पिनस्की को एक पत्र में उल्लेख करते हुये लिखा कि ब्राह्मण में रहने वाले एक वेदान्ति अर्थात् 'अनन्त स्व' के जीवन की आकांक्षा के लिये उन्होंने त्यागपत्र दिया था। 1931 में, कुछ समय के लिये वे विश्वविद्यालय में लौट आये, प्रो. गणेश प्रसाद की इच्छाओं के सम्मान के लिए कई व्याख्यान दिए जो कि 'शुल्व के विज्ञान' के रूप में प्रकाशित किए गए थे (1932)। 1933 में वे विश्वविद्यालय से सेवानिवृत हो गए और 1938 में उन्होने स्वामी विद्यारण्य के नाम से सन्यास ले लिया। उन्होंने अपने जीवन के आखिरी वर्ष पुष्कर में बिताये जहाँ उन्होने भारतीय दर्शन पर बंगाली में बहुत सी पुस्तकों को लिखा। 1929 में विश्वविद्यालय छोडने के पहले उन्होंने हिस्ट्री ऑफ **हिंदू मैथेमेटिक्स:** ए सोर्स बुक पुस्तक की हस्तलिपि को अपने कनिष्ठ सहयोगी अवधेश नारायण सिंह को दिया जिन्होंने उसको दो भागों में अङ्क गणित एवं बीजगणित में क्रमश: 1935 और 1938 में प्रकाशित करवाया।

❖ **मालुर रंगाचारी (1861-1916) :**

मद्रास के क्रिस्चियन कॉलेज से विज्ञान स्नातक थे, जो बाद में प्रेसीडेंसी कॉलेज में संस्कृत के प्रोफेसर बन गए थे। उन्होने महावीर के गणित सार संग्रह को अंग्रेजी अनुवाद और लेख के साथ सम्पादित किया (1912)। कोल ब्रुक के द्वारा 1817 में ब्रह्मगुप्त और भास्कर का अनुवाद के बाद यह भारतीय गणितीय काम का पहला विस्तृत विवरण था।

परिशिष्ट

- **भारतीय संख्या पद्धति में संख्याओं के नाम**

इकाई	1
दहाई	10
सैकड़ा	100
हजार	1,000
दस हजार	10,000
लाख	1,00,000
दस लाख	10,00,000
करोड़	1,00,00,000
दस करोड़	10,00,00,000
अरब	1,00,00,00,000
दस अरब	10,00,00,00,000
खरब	1,00,00,00,00,000
दस खरब	10,00,00,00,00,000
नील	1,00,00,00,00,00,000
दस नील	10,00,00,00,00,00,000
पद्म	1,00,00,00,00,00,00,000
दस पद्म	10,00,00,00,00,00,00,000
शंख	1,00,00,00,00,00,00,00,000
दस शंख	10,00,00,00,00,00,00,00,000

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय



महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in