आज़ादी का अमृत महोत्सव

भागफल ज्ञात करें : 4096 ÷ 64

ध्वजाङ्क	4			
मुख्याङ्क	6	4 0 9	6
		4	1
		6 4	0
		भागफल	शेषफल

ध्वजाङ्क सूत्र

गणित पाठ्यपुस्तक

(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

वेद-भूषण - III वर्ष / प्रथमा - III वर्ष / कक्षा आठवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

समयोर्धनर्णयोरैक्यं खं शून्यं भवति।

विपरीतच्छेदगुणा राश्योश्छेदांशकाः समच्छेदाः ।

सङ्कलितेंऽशा योज्या व्यवकलितेंऽशान्तरं कार्यम्॥

परिवर्त्य भागहारच्छेदांशौ छेदसंगुणच्छेदः ।

अंशोंऽशगुणो भाज्यस्य भागहारः सवर्णितयोः ॥

समद्विघातः कृतिः उच्यते इति प्रथमः प्रकारः ।

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः इति प्रथमः प्रकारः ।

योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च ।

षष्टिं सहस्राश्व्यस्यायुतासनमुष्ट्रानां विंशतिं शता।

दश श्यावीनां शता दश त्र्यरुषीणां दश गवां सहस्ता ॥

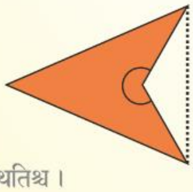
सदृशद्विवधो वर्गस्त्र्यादिवधस्तद् गतोऽन्यजातिवधः।

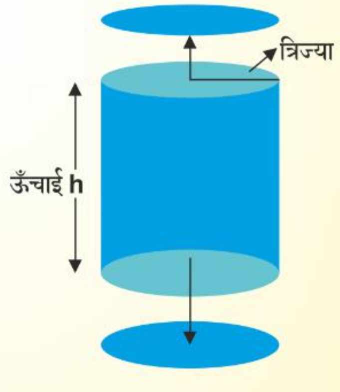
अन्योऽन्यवर्णघातो भावितकः पूर्ववच्छेषम्॥

खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा।

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धिः फलस्य तु।

व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥





3 का वर्ग

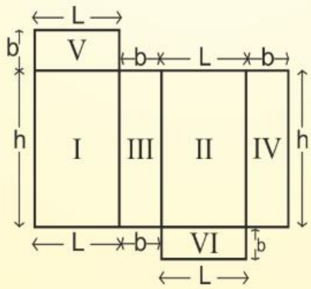
$3^2 = 3 \times 3 = 9$

9 का वर्गमूल

2 का घन

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

8 का घनमूल



सर्वसमिकाएँ

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

चक्रवृद्धि ब्याज $=$ मूलधन $\left(1 + \dfrac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} -$ मूलधन

ध्वजाङ्कः | विलोकनम् | आनुरूप्येण | ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

गणित पाठ्यपुस्तक

वेद-भूषण - III वर्ष / प्रथमा - III वर्ष / कक्षा आठवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

लेखकगण : ....

आवरण एवं सज्जा : ....

चित्राङ्कन : ....

तकनीकी सहयोग : ....

अक्षरविन्यास : ....

© महर्षिसान्दीपनिराष्ट्रियवेदविद्याप्रतिष्ठानम्, उज्जयिनी

ISBN : ....

मूल्य : ....

संस्करण : ....

प्रकाशित प्रति : ....

पेपर उपयोगः : आर.सी.टी.बी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रिय वेदविद्या प्रतिष्ठान

(शिक्षामन्त्रालय भारत सरकार की स्वायत्तशासी संस्था)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - 456006 (म.प्र.)

email : msrvvpujn@gmail.com,

Web : msrvvp.ac.in

दूरभाषा (0734) 2502255, 2502254

भूमिका

भारतवर्ष में गणित की समृद्ध परम्परा रही है । इतिहास के अत्यन्त प्राचीन काल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है । वैदिक काल के आरम्भ से ही गणित विद्या को सर्वोच्च स्थान दिया गया है। उदाहरणार्थ, गणितसारसंग्रह का सुस्पष्ट कथन है :

बहुभिः प्रलापैः किं त्रैलोक्ये सचराचरे। यत्किंचिद्वस्तु तत् सर्वं गणितेन विना न हि॥

लौकिके वैदिके वापि तथा सामयिकेऽपि यः।व्यापारस्तत्र सर्वत्र संख्यानमुपयुज्यते॥

(गणितसारसंग्रहः,संज्ञाधिकारः 8-9)

अर्थात् , इस चराचर ब्रह्माण्ड में जो भी कोई वस्तु हमें प्राप्त है, उस वस्तु का अस्तित्व बिना गणित के नहीं समझा जा सकता क्योंकि लौकिक, वैदिक और सामयिक में जो व्यवहार है, वहाँ सर्वत्र संख्याओं का उपयोग होता है।

पुरातन ज्ञान का उपयोग एवं प्राचीन उपलब्धियों के तारतम्य से आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के उद्देश्य से इस पाठ्यपुस्तक में वैदिक गणित के साथ संस्कृत ज्ञान प्रणाली में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं का समावेश किया गया है । वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामञ्जस्य बनाकर पूरे भारतवर्ष के वैदिक विद्यार्थियों को गणित विषय में अधिगम स्तर की दक्षता प्रदान करने के लिए राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 में निहित - चर्चा, विश्लेषण, उदाहरण एवं अनुप्रयोग जैसे मुख्य सिद्धान्तों की दृष्टि को ध्यान में रखते हुए वैदिक विद्यार्थियों के अनुरूप पाठ्यक्रम एवं पाठ्य पुस्तकों का निर्माण किया गया है।

पाठ्यपुस्तक की भाषा बहुत ही सरल और सहज है जिससे विद्यार्थियों को समझने में सुगमता होगी। वेदभूषण तृतीय(आठवीं समकक्ष) वर्ष की यह पाठ्यपुस्तक प्राय: पूरे भारतवर्ष के कक्षा-8 गणित पाठ्यक्रम के समकक्ष है।पाठ्यपुस्तक में कई पाठ्य बिन्दुओं को संस्कृत ज्ञान प्रणाली के वैदिक प्रमाणों के साथ-साथ ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त, शुल्बसूत्र, आर्यभट्टीयम्, लीलावती एवं बीजगणितम् आदि ग्रन्थों के सन्दर्भों को भी सम्मिलित किया गया है जिससे वैदिक विद्यार्थी आधुनिक गणित के साथ प्राचीन गणितीय सङ्कल्पनाओं को भी समझने में सक्षम होंगे एवं अपनी भारतीय परम्परा की गरिमा का अनुभव कर सकेंगे। पूर्व कक्षा के अनुभव को दोहराते हुए, पाठ्यपुस्तक के कुल 11 अध्यायों की रचनाएँ वेद विद्यालयों के वेद भूषण तृतीय वर्ष पाठ्यक्रम के आवश्यकता के अनुसार की गई है।अध्याय 1 में परिमेय संख्याओं पर सङ्क्रियाओं को विस्तार से प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 2 में एक चर वाले रैखिक समीकरण के हल एवं समीकरण के अनुप्रयोग का वर्णन है। अध्याय 3 में वर्ग एवं वर्गमूल तथा अध्याय 4 में घन एवं

घनमूल ज्ञात करने की विधियों को बताया गया है। अध्याय 5 में को घात एवं घाताङ्क की गणितीय संकल्पना के अन्तर्गत घाताङ्कों के नियम को विस्तार से प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 6 में वैदिक गणित में ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं आनुरूप्येण सूत्रों से गुणन तथा ध्वजाङ्क सूत्र से भागफल ज्ञात करना सीखेंगे। अध्याय 7 में चतुर्भुज की समझ के अन्तर्गत बहुभुज एवं चतुर्भुज के प्रकार का विस्तार से वर्णन है। अध्याय 8 में बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ को वर्णन किया गया है। अध्याय 9 में राशियों की तुलना के अन्तर्गत प्रतिशत, बट्टा ज्ञात करने के साथ-साथ साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करना सिखाया गया है। अध्याय 10 में सीधा एवं प्रतिलोम समानुपात को विस्तार से प्रस्तुत किया गया है। अध्याय 11 में क्षेत्रमिति के अन्तर्गत घन ,घनाभ एवं बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों का विस्तार से प्रस्तुत किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में वैदिक विद्यार्थियों की गणित की समझ को विकसित करने के साथ-साथ तथ्यों की पुनः खोज करने की दक्षता का विकास करने के लिए विभिन्न गतिविधियाँ दी गई हैं। जिन्हें **'करो और सीखो'** का नाम दिया गया है, साथ ही विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर को बढ़ाने के लिए प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण सङ्कल्पनाओं एवं परिणामों को " **हमने सीखा** " के रूप में स्थान दिया गया है ।

भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीय गणितज्ञों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति विद्यार्थियों की समझ बनाने के लिए पाठ्यपुस्तक के अन्त में **भारतीय गणितज्ञों का गणित में योगदान** का भी उल्लेख किया गया है।

पाठ्यपुस्तक में उपलब्ध गणितीय सङ्कल्पनाओं को समझकर वैदिक विद्यार्थी प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी में सक्षम होंगे। उक्त पुस्तक के अध्ययनोपरान्त विद्यार्थी कक्षा आठवीं की NCERT तथा विषय विशेष से सम्बन्धित पुस्तकों का अध्ययन करें।

लेखक पाठ्यपुस्तक के त्रुटि सुधार हेतु प्रेषित सकारात्मक सुझाव के लिए आपका कृतज्ञ होगा।

प्रस्तावना

(राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के आलोक में)

शिक्षा मन्त्रालय (उच्चतर शिक्षा विभाग), भारत सरकार ने माननीय शिक्षा मन्त्री जी (तत्कालीन मानव संसाधन विकास मन्त्री) की अध्यक्षता में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान की स्थापना दिल्ली में 20 जनवरी, 1987 को सोसायटी पञ्जीकरण अधिनियम, 1860 के तहत की थी। भारत सरकार ने वेदों की श्रुति परम्परा का संरक्षण, संवर्धन, प्रसार और विकास के लिए प्रतिष्ठान की स्थापना का संकल्प संख्या 6-3/85-SKT-IV दिनाङ्क 30-3-1987 को भारत के राजपत्र में अधिसूचित किया था। वेदों के अध्ययन की श्रुति परम्परा (वेद संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, वेदाङ्ग, वेद भाष्य आदि), वेदों का पाठ संरक्षण, वैदिक स्वर तथा वैज्ञानिक आधार पर वेदों की व्याख्या का दायित्व वेद विद्या प्रतिष्ठान को दिया गया था। वर्ष 1993 में राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान के कार्यालय को उज्जैन में स्थानान्तरित करने के पश्चात् संगठन का नाम महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान कर दिया गया। वर्तमान में यह संगठन मध्यप्रदेश सरकार द्वारा प्रदत्त भूमि- परिसर, महाकाल नगरी, उज्जैन में स्थित है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति-1986 के संशोधित नीति-1992 और कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन)-1992 में भी वैदिक शिक्षा को बढ़ावा देने के लिए राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान को उत्तरदायित्व दिया गया था। भारत के प्राचीन ज्ञान कोष, मौखिक परम्परा और इस तरह की शिक्षा के लिए पारंपरिक गुरुओं को संयोजित करने के उद्देश्य को 1992 के कार्यप्रणाली (प्रोग्राम ऑफ एक्शन) में उल्लेखित किया गया था।

राष्ट्र की आकांक्षाओं के अनुरूप, राष्ट्रीय स्तर पर वेद और संस्कृत शिक्षा के लिए एक बोर्ड की स्थापना के पक्ष में राष्ट्रीय सहमति, जनादेश, नीति, विशिष्ट उद्देश्य और कार्यान्वयन रणनीतियों के अनुरूप, भारत सरकार के माननीय शिक्षा मन्त्रीजी की अध्यक्षता में महासभा और शासी परिषद के समावेश में ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड'' की स्थापना 2019 में हुई है। MSRVVP का वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड भी वैदिक शिक्षा का एक भाग है और MSRVVP के उद्देश्यों की पूर्ति के लिए आवश्यक है जैसा कि MOA और नियमों में संकल्पना की गई है। महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड को शिक्षा मन्त्रालय,भारत सरकार तथा भारतीय

विश्वविद्यालय संघ, केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली से मान्यता प्राप्त है।

यहाँ यह भी उल्लेखनीय है कि भारत सरकार के शिक्षा मन्त्रालय द्वारा वर्ष 2015 में श्री एन. गोपालस्वामी (पूर्व चुनाव आयुक्त) की अध्यक्षता में गठित समिति ''संस्कृत के विकास के लिए विजन और रोडमैप - दस वर्षीय परिप्रेक्ष्य योजना'' की रिपोर्ट में अनुशंसा की गई है कि माध्यमिक विद्यालय स्तर तक वेद संस्कृत शिक्षा के पाठ्यक्रम मानकीकरण, संबद्धता, परीक्षा मान्यता, प्रमाणीकरण के लिए राष्ट्रस्तर पर वेद संस्कृत परीक्षा बोर्ड की स्थापना की जाए। समिति की अनुशंसा थी कि प्राथमिक स्तर का वैदिक एवं संस्कृत अध्ययन अभिप्रेरक, सम्प्रेरक एवं आनन्ददायी होना चाहिए। आधुनिक शिक्षा के विषयों को वैदिक और संस्कृत पाठशालाओं में सन्तुलित रूप से सम्मिलित करना भी आवश्यक है। इन पाठशालाओं की पाठ्यक्रम सामग्री को समकालीन समाज की आवश्यकताओं के अनुरूप और प्राचीन ज्ञान का उपयोग करते हुए आधुनिक समस्याओं का समाधान खोजने के लिए प्रारूपित किया जाना चाहिए।

वेद पाठशालाओं के संबंध में समिति ने यह संस्तुति की है कि संस्कृत और आधुनिक विषयों की श्रेणीबद्ध सामग्री के परिचय के साथ-साथ वेद पाठ कौशल संवर्धन और वेद उच्चारण में मानकीकरण की आवश्यकता है ताकि वेद छात्र अन्ततः वेद भाष्य के अध्ययन तक पहुंच सकें और छात्रों को आगे की पढ़ाई के लिए मुख्यधारा में लाया जा सके। उचित स्तर पर वेदों के विकृति पाठ के अध्ययन पर बढ़ावा दिया जाना चाहिए। समिति के सदस्यों ने यह भी चिंता व्यक्त की है कि वैदिक सस्वर पाठ पूरे भारत में समान रूप से नहीं फैला है, इसलिए वैदिक सस्वर पाठ की शैलियों और शिक्षण पद्धति की क्षेत्रीय विविधताओं में हस्तक्षेप किए बिना स्थिति में सुधार के लिए उचित कदम उठाया जाना है।

यह भी अनुभव किया गया कि वेद और संस्कृत अविभाज्य हैं और एक दूसरे के पूरक हैं और देश भर में सभी वेद पाठशालाओं और संस्कृत पाठशालाओं के लिए परीक्षा मान्यता और सम्बद्धता की समस्याएँ समान है, इसलिए दोनों के लिए एक साथ वेद संस्कृत हेतु एक बोर्ड का गठन किया जा सकता है। समिति ने यह पाया कि बोर्ड द्वारा आयोजित परीक्षाओं को कानूनी रूप से वैध मान्यता प्राप्त होनी चाहिए, जो शिक्षा की आधुनिक बोर्ड प्रणाली के साथ समानता रखे। समिति ने पाया कि महर्षि सान्दीपनि

राष्ट्रीय वेद् विद्या प्रतिष्ठान उज्जैन को ''महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद् संस्कृत विद्या परिषद्'' के नाम से परीक्षा बोर्ड का दर्जा दिया जाये, जिसका मुख्यालय उज्जैन में रहे। परीक्षा बोर्ड होने के अतिरिक्त अब तक जो सभी वेद् कार्यक्रम और वेद् पर गतिविधियाँ हैं, वे सभी प्रतिष्ठान में जारी रहेंगे।

वैदिक शिक्षा का प्रचार भारत की गौरवशाली ज्ञान परम्परा का एक व्यापक अध्ययन है और इसमें वैदिक अध्ययन (वेद् संहिता, पद पाठ से घनपाठ तक, स्वर का सम्यक् प्रयोग ज्ञान आदि), सस्वर पाठ कौशल, मन्त्र उच्चारण और संस्कृत ज्ञान प्रणाली सामग्री की बहुस्तरीय श्रुति परम्परा सम्मिलित है। प्रतिष्ठान में NEP 2020 अनुरूप 3 + 4 (सात साल तक) के वेद् अध्ययन की योजना में पारम्परिक छात्रों को मुख्य धारा में लाने की नीति के परिप्रेक्ष्य में अन्य विभिन्न आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि पाठ्यक्रम के अनुसार तथा वैदिक शिक्षा पर केन्द्रित नीति निर्धारक निकायों में राष्ट्रीय सहमति, समय की उपलब्धता के आधार पर सभी अध्ययन संयोजित हैं। अध्ययन की यह योजना NEP 2020 के परिप्रेक्ष्य में भारतीय ज्ञान प्रणाली पर ध्यान केन्द्रित करने वाले पाठ्यक्रम सामग्री में आधुनिक ज्ञान के साथ एवं भारतीय ग्रंथों से तैयार वैदिक ज्ञान के उपयुक्त सामग्री के साथ है।

प्रतिष्ठान बोर्ड की वेद् पाठशालाओं, गुरु शिष्य ईकाइयों और गुरुकुलों में, पाठ्यक्रम मुख्य रूप से सम्पूर्ण सस्वर कण्ठस्थीकरण के साथ संपूर्ण वेद् शाखा का अध्ययन होता है तथा संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि और SUPW जैसे अतिरिक्त सहायक विषयों के साथ वेद् अध्ययन होता है।

यह सर्वविदित तथ्य है कि वेदों की 1131 शाखाएँ सस्वर पाठ के साथ थे, अर्थात् 21 ऋग्वेद् में, 101 यजुर्वेद् में, 1000 सामवेद् में और 9 अथर्ववेद् में। समय के साथ इन शाखाओं की एक बड़ी संख्या विलुप्त हो गई और वर्तमान में केवल 10 शाखाएँ, अर्थात् ऋग्वेद् में एक, यजुर्वेद् में 4, सामवेद् में 3 और अथर्ववेद् में 2 सस्वर पाठ के रूप में विद्यमान हैं, जिन पर भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित है, इन 10 शाखाओं के संबंध में भी बहुत कम प्रतिनिधि वेदपाठी पंडित है जो श्रुति परम्परा/पाठ/वेद् ज्ञान परम्परा को उसके प्राचीन और पूर्ण रूप में संरक्षित किये हुए हैं। जब तक श्रुति परम्परा के अनुसार वैदिक शिक्षा पर मूलरूप से ध्यान नहीं दिया जाएगा, तब तक यह व्यवस्था सुदृढ़ नहीं हो पायेगी। वैदिक

श्रुति परम्परा की श्रुति अध्ययनों के पहलुओं को सामान्य/अध्ययन में स्कूल में न तो पढ़ाया जाता है और न ही किसी स्कूली शिक्षा के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया जाता है, और न ही स्कूलों/बोर्डों के पास उन्हें आधुनिक स्कूल पाठ्यक्रम में सम्मिलित करने और सञ्चालित करने की विशेषज्ञता है।

वैदिक छात्र जो श्रुति परम्परा / वेद का पाठ सीखते हैं, वे दूर-दराज के गाँवों, सीमावर्ती गाँवों आदि में वेद गुरुकुलों में, वेद पाठशालाओं में, वैदिक आश्रमों में हैं, और वेद अध्ययन के लिए उनका समर्पण लगभग 1900 - 2100 घंटे प्रतिवर्ष है। जो अन्य स्कूल बोर्ड की सीखने की प्रणाली के समय से दोगुना है और वैदिक छात्रों को ''गुरु-मुख-उच्चारण अनुच्चारण'' - वेद गुरु के सामने बैठकर शब्दशः उच्चारण सीखना होता है, संपूर्ण वेद, शब्दशः उच्चारण (उदात्त, अनुदात्त, स्वरित आदि) के साथ कण्ठस्थ करना होता है और स्मृति के बल पर बिना किसी पुस्तक/पोथी को देखे।

ज्ञात हो कि इस प्रकार के वैदिक अध्ययन, वेद मन्त्रपाठ की रीति, गुरु शिष्य की अखण्ड मौखिक परम्परा से प्रचलित क्रम के कारण वेदों के मौखिक प्रसारण को मानवता की अमूर्त सांस्कृतिक विरासत रूप में यूनेस्को-विश्व मौखिक विरासत सूची में मान्यता प्राप्त हुई है। इसलिए, सदियों पुरानी वैदिक शिक्षा (श्रुति परम्परा/सस्वर पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) की प्राचीनता और सम्पूर्ण अखण्डता को बनाए रखने के लिए सुयोग्य कार्यनीति की आवश्यकता है। इसलिए, प्रतिष्ठान और इस बोर्ड ने राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 द्वारा निर्धारित कौशल और व्यावसायिक विषयों के साथ-साथ आधुनिक विषयों जैसे संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि आदि के साथ विशिष्ट प्रकार के वेद पाठ्यक्रम को अपनाया है।

कोई भी व्यक्ति तब सुखी होकर जी सकता है जब वह परा-विद्या और अपरा-विद्या दोनों का अध्ययन करता है। वेदों में से भौतिक ज्ञान, उनकी सहायक शाखाएँ और भौतिक रुचि के विषय अपरा-विद्या कहलाते थे। सर्वोच्च वास्तविकता का ज्ञान, उपनिषदों की अंतिम खोज, परा-विद्या कहलाती है। वेद और उसके सहायक के रूप में अध्ययन किए जाने वाले विषयों की कुल संख्या 14 है। विद्या की 14 शाखाएँ ये हैं - चार वेद, छह वेदांग, मीमांसा (पूर्व मीमांसा और उत्तर मीमांसा), न्याय, पुराण और धर्मशास्त्र। आयुर्वेद, धनुर्वेद, गन्धर्ववेद और अर्थशास्त्र सहित चौदह विद्याएं अठारह हो जाते हैं। सदियों

से भारत उपमहाद्वीप में सभी शिक्षा संस्कृत भाषा में ही थी, क्योंकि इस उपमहाद्वीप में लम्बे समय तक संस्कृत बोली जाने वाली भाषा रही। इसलिए वेद भी सुलभता से समझे जाते थे।

तक्षशिला के विद्यालयों के सम्बन्ध में अठारह शिल्प-या औद्योगिक और तकनीकी कला और शिल्प का उल्लेख किया गया है। छान्देग्य उपनिषद् तथा नीति ग्रन्थों में भी इन का विवरण है। निम्नलिखित 18 कौशल/व्यावसायिक विषय अध्ययन के विषय बताए गए हैं- (1) गायन सङ्गीत (2) वाद्य सङ्गीत (3) नृत्य (4) चित्रकला (5) गणित (6) लेखाशास्त्र (7) इञ्जीनियरिङ्ग (8) मूर्तिकला (9) प्रजनन (10) वाणिज्य (11) चिकित्सा (12) कृषि (13) परिवहन और कानून (14) प्रशासनिक प्रशिक्षण (15) तीरंदाजी, किला निर्माण और सैन्य कला (16) नये वस्तु या उपज का निर्माण । उपर्युक्त कला और शिल्प में तकनीकी शिक्षा के लिए प्राचीन भारत में एक प्रशिक्षु प्रणाली विकसित की गई थी। विद्या और अविद्या मनुष्य को इस प्रपंच में सन्तुष्ट जीवन व्यतीत करने के लिए समर्थ और परलोक में मुक्ति योग्य सिद्ध करती है ।

दुनिया की सबसे पुरानी सभ्यताओं में सर्व प्रथम भारतीय सभ्यता में शास्त्रों, विज्ञान और प्रौद्योगिकी को सीखने की एक विशाल एवं सुदृढ परम्परा रही है। भारत प्राचीन काल से ही ऋषियों, ज्ञानियों और संतों की भूमि के साथ-साथ विद्वानों और वैज्ञानिकों की भूमि भी रही है। शोध से पता चला है कि भारत सीखने सिखाने (विद्या-आध्यात्मिक ज्ञान और अविद्या- भौतिक ज्ञान) के क्षेत्र में विश्व गुरु तो था ही, सक्रिय रूप से भी सम्पूर्ण प्रपञ्च में योगदान दे रहा था और भारत में आधुनिक विश्वविद्यालयों जैसे सीखने के विशाल केन्द्र स्थापित किए गए थे, जहाँ हजारों शिक्षार्थी आते थे। प्राचीन ऋषियों द्वारा खोजी गई कई विज्ञान और प्रौद्योगिकी तकनीकी, सीखने की पद्धतियाँ, सिद्धान्तों और तकनीकों ने कई पहलुओं पर हमारे विश्व के ज्ञान के मूल सिद्धान्तों को बनाया और प्रबल किया है, खगोल विज्ञान, भौतिकी, रसायन विज्ञान, गणित, चिकित्सा, प्रौद्योगिकी, ध्वन्यात्मकता, व्याकरण आदि पर दुनिया में भारत का योगदान समझा जाता है। प्रत्येक भारतीय बालक, बालिका द्वारा इस महान् देश का गौरवान्वित नागरिक होने के कारण इन विषयों का ज्ञान प्राप्त कर लेना चाहिये। भारत की संसद् के प्रवेश द्वार पर उद्धृत ''वसुधैव कुटुम्बकम्'' जैसे भारत के विचार और विभिन्न अवसरों पर संवैधानिक प्राधिकरणों द्वारा उद्धृत कई वेद मंत्र के अर्थ वेदों के अध्ययन से ही ज्ञात होते हैं और उन पर मनन करके

ही वास्तविक प्रेरणा प्राप्त की जा सकती है। वेदों और सम्पूर्ण वैदिक साहित्य में "सत, चित, आनंद" के रूप में सभी प्राणियों की अन्तर्निहित समानता पर जोर दिया गया है।

यह भी उल्लेख किया गया है कि वेद वैज्ञानिक ज्ञान के स्रोत हैं और हमें आधुनिक समस्याओं के समाधान के लिए वेदों और भारतीय शास्त्रों के स्रोतों की ओर पुनः निष्ठा से देखना होगा। जब तक छात्रों को वेदों का पाठ, शुद्ध वैदिक ज्ञान सामग्री और वैदिक दर्शन को आध्यात्मिक ज्ञान और वैज्ञानिक ज्ञान के रूप में नहीं पढ़ाया जाता है, तब तक आधुनिक भारत की आकांक्षा को पूरा करने के लिए वेदों के सन्देश का प्रसार पूर्ण रूप से सम्भव नहीं है।

वेद की शिक्षा (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परंपरा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) केवल धार्मिक शिक्षा नहीं है। यह कहना अनुचित होगा कि वेदों का अध्ययन केवल धार्मिक निर्देश है। वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं और इनमें केवल धार्मिक सिद्धान्त ही नहीं हैं, बल्कि वेद शुद्ध ज्ञान के कोष है, मानव जीवन की कुञ्जी वेदों में है इसलिए, वेदों में निर्देश या शिक्षा को केवल "धार्मिक शिक्षा/धार्मिक निर्देश" के रूप में नहीं माना जा सकता है।

2004 की सिविल अपील संख्या 6736 में माननीय सर्वोच्च न्यायालय (AIR 2013: 15 SCC 677); (निर्णय की दिनाङ्क- 3 जुलाई 2013), जैसा कि माननीय सर्वोच्च न्यायालय के निर्णय में यह स्पष्ट है कि वेद केवल धार्मिक ग्रन्थ नहीं हैं। वेदों में गणित, खगोल विज्ञान, मौसम विज्ञान, रसायन विज्ञान, हाइड्रोलिक्स, भौतिक विज्ञान और प्रौद्योगिकी, कृषि, दर्शन, योग, शिक्षा, काव्यशास्त्र, व्याकरण, भाषा विज्ञान आदि के विषय सम्मिलित हैं, जिन्हें माननीय भारतीय सर्वोच्च न्यायालय द्वारा प्रकाशित किया गया है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 के अनुपालन में प्रतिष्ठान एवं बोर्ड के माध्यम से वैदिक शिक्षा -

राष्ट्रीय शिक्षा नीति-2020 में भारतीय ज्ञान प्रणाली 'संस्कृत ज्ञान प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है, उनके महत्त्व और पाठ्यक्रम में उनका समावेश और विविध विषयों के संयोजन में लचीले दृष्टिकोण को मजबूती से प्रदर्शित किया गया है। कला एवं मानविकी के छात्र भी विज्ञान सीखेंगे, प्रयास करना होगा कि सभी व्यावसायिक विषय और व्यावहारिक कौशलों (सॉफ्ट स्किल्स) को प्राप्त करें। कला, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में भारत की गौरवशाली परम्परा इस तरह की शिक्षा की ओर बढ़ने में

सहायक होगी। भारत की समृद्ध, विविध प्राचीन और आधुनिक संस्कृति और ज्ञान प्रणालियों और परम्पराओं को संयोजित करने और उससे प्रेरणा पाने हेतु यह नीति बनायी गयी है। भारत की शास्त्रीय भाषाओं और साहित्य के महत्त्व, प्रासङ्गिकता और सुन्दरता की उपेक्षा नहीं की जा सकती है। संस्कृत, संविधान की आठवीं अनुसूची में वर्णित एक महत्त्वपूर्ण आधुनिक भाषा है यदि सम्पूर्ण लैटिन और ग्रीक साहित्य को मिलाकर भी इसकी तुलना की जाए तो भी वह संस्कृत शास्त्रीय साहित्य की बराबरी नहीं कर सकता। संस्कृत साहित्य में गणित, दर्शन, व्याकरण, सङ्गीत, राजनीति, चिकित्सा, वास्तुकला, धातुविज्ञान, नाटक, कविता, कहानी, और बहुत कुछ (जिन्हें "संस्कृत ज्ञान प्रणालियों" के रूप में जाना जाता है) के विशाल भण्डार हैं। विश्व विरासत के लिए इन समृद्ध संस्कृत ज्ञान प्रणाली विरासतों को न केवल पोषण और भविष्य के लिए संरक्षित किया जाना चाहिए बल्कि हमारी शिक्षा प्रणाली के माध्यम से शोध कराकर इन्हें बढ़ाते हुए नए उपयोगों में भी रखा जाना चाहिए। इन सबको हजारों वर्षों में जीवन के सभी क्षेत्रों के लोगों द्वारा, सामाजिक-आर्थिक पृष्ठभूमि के एक विस्तृत जीवन्त दर्शन के साथ लिखा गया है। संस्कृत को रूचिकर और अनुभावात्मक होने के साथ-साथ समकालीन रूप से प्रासङ्गिक विधियों से पढ़ाया जाएगा। संस्कृत ज्ञान प्रणाली का उपयोग विशेष रूप से ध्वनि और उच्चारण के माध्यम से है। फाउंडेशन और माध्यमिक स्कूल स्तर पर संस्कृत की पाठ्यपुस्तकों को संस्कृत के माध्यम से संस्कृत पढ़ाने (एस.टी.एस.) और इसके अध्ययन को आनन्ददायी बनाने के लिए सरल मानक संस्कृत (एस.एस.एस.) में लिखा जाना है। ध्वन्यात्मकता और उच्चारण वेदों की मौखिक परम्परा पर लागू होता है। वैदिक शिक्षा ध्वन्यात्मकता और उच्चारण पर आधारित है।

कला और विज्ञान के बीच, पाठ्यक्रम और पाठ्येतर गतिविधियों के बीच, व्यावसायिक और शैक्षणिक धाराओं, आदि के बीच कोई स्पष्ट विभेद नहीं किया गया है। सभी ज्ञान की एकता और अखण्डता को सुनिश्चित करने के लिए, एक बहु-विषयक दुनिया के लिए विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, कला, मानविकी और खेल के बीच एक बहु-विषयक (Multi-Disciplinary) एवं समग्र शिक्षा के विकास पर बल दिया गया है। नैतिकता, मानवीय और संवैधानिक मूल्य जैसे, सहानुभूति, दूसरों के लिए सम्मान, स्वच्छता, शिष्टाचार, लोकतान्त्रिक भावना, सेवा की भावना, सार्वजनिक सम्पत्ति के

लिए सम्मान, वैज्ञानिक चिन्तन, स्वतन्त्रता, उत्तरदायित्व, बहुलतावाद, समानता और न्याय पर जोर दिया गया है ।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.23 में अनिवार्य विषयों, कौशलों और क्षमताओं का शिक्षाक्रमीय एकीकरण के विषय में निर्देश है। विद्यार्थियों को अपने व्यक्तिगत पाठ्यक्रम को चुनने में बड़ी मात्रा में लचीले विकल्प मिलेगें, लेकिन आज की तेजी से बदलती दुनिया में सभी विद्यार्थियों को एक अच्छे, सफल, अनुभवी, अनुकूलनीय और उत्पादक व्यक्ति बनने के लिए कुछ विषयों, कौशलों और क्षमताओं को सीखना भी आवश्यक है। वैज्ञानिक स्वभाव और साक्ष्य आधारित सोच, रचनात्मकता और नवीनता, सौंदर्यशास्त्र और कला की भावना, मौखिक और लिखित अभिव्यक्ति और संवाद, स्वास्थ्य और पोषण, शारीरिक शिक्षा, शारीरिक दक्षता, स्वास्थ्य और खेल, सहयोग और टीम वर्क, समस्या को हल करने और तार्किक चिन्तन, व्यावसायिक एक्सपोजर और कौशल, डिजिटल साक्षरता, कोडिंग और कम्प्यूटेशनल चिन्तन, नैतिकता और नैतिक तर्क, मानव और संवैधानिक मूल्यों का ज्ञान और अभ्यास, लिङ्ग संवेदनशीलता, मौलिक कर्तव्य, नागरिकता कौशल और मूल्य, भारत का ज्ञान, पर्यावरण सम्बन्धी जागरूकता, जिसमें पानी और संसाधन संरक्षण, स्वच्छता और साफ-सफाई, समसामयिक घटना और स्थानीय समुदायों, राज्यों, देश और दुनिया द्वारा जिन महत्त्वपूर्ण मुद्दों का सामना किया जा रहा है उनका ज्ञान, भाषाओं में प्रवीणता के अलावा, इन कौशलों में सम्मिलित है। बच्चों के भाषा कौशल संवर्धन के लिए और इन समृद्ध भाषाओं और उनके कलात्मक निधि के संरक्षण के लिए, सार्वजनिक या निजी सभी विद्यालयों में सभी छात्रों को भारत की एक शास्त्रीय भाषा और उससे सम्बन्धित साहित्य सीखने का कम से कम दो साल का विकल्प मिलेगा।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 4.27 में "भारत का ज्ञान" के विषय में महत्त्वपूर्ण निर्देश है। "भारत का ज्ञान" में आधुनिक भारत और उसकी सफलताओं और चुनौतियों के प्रति प्राचीन भारत का ज्ञान और उसका योगदान - भारतीय ज्ञान प्रणाली जैसे गणित, खगोल विज्ञान, दर्शन, योग, वास्तुकला, चिकित्सा, कृषि, इंजीनियरिंग, भाषा विज्ञान, साहित्य, खेल के साथ –साथ शासन, राजव्यवस्था, संरक्षण आदि जहाँ भी प्रासङ्गिक हो, विषयों में सम्मिलित किया जाएगा। इसमें औषधीय

प्रथाओं, वन प्रबन्धन, पारम्परिक (जैविक) फसल की खेती, प्राकृतिक खेती, स्वदेशी खेलों, विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में प्राचीन और आधुनिक भारत के प्रेरणादायक व्यक्तित्वों पर ज्ञानदायी विषय हो सकेंगे।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 11.1 में समग्र और बहु-विषयक शिक्षा की ओर प्रवृत्त करने के निर्देश हैं। भारत में समग्र एवं बहु-विषयक विधि से सीखने की एक प्राचीन परम्परा पर बल दिया गया है, तक्षशिला और नालन्दा जैसे विश्वविद्यालयों के उल्लेख सहित 64 कलाओं के ज्ञान के रूप में गायन और चित्रकला, वैज्ञानिक क्षेत्र जैसे रसायनशास्त्र और गणित, व्यावसायिक क्षेत्र जैसे बढ़ई का काम और कपड़े सिलने का कार्य, व्यावसायिक कार्य जैसे औषधि तथा अभियान्त्रिकी और साथ ही साथ सम्प्रेषण, चर्चा और वाद-संवाद करने के व्यावहारिक कौशल (सॉफ्ट स्किल्स) भी सम्मिलित है । यह विचार है कि गणित, विज्ञान, व्यावसायिक विषयों और सॉफ्ट स्किल सहित रचनात्मक मानव प्रयास की सभी शाखाओं को 'कला' माना जाना चाहिए, जिसका मूल भारत है। 'कई कलाओं के ज्ञान' या जिसे आधुनिक समय में प्राय: 'उदार कला' कहा जाता है (अर्थात्, कलाओं की एक उदार धारणा) की इस धारणा को भारतीय शिक्षा में वापस लाया जाना चाहिए, क्योंकि यह ठीक उसी तरह की शिक्षा है जो 21वीं सदी के लिए आवश्यक है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.1 में भारतीय भाषाओं, कला और संस्कृति का संवर्धन हेतु निर्देश हैं। भारत संस्कृति का समृद्ध भण्डार है – जो हजारों वर्षों में विकसित हुआ है, और यहाँ की कला, साहित्यिक कृतियों, प्रथाओं, परम्पराओं, भाषायी अभिव्यक्तियों, कलाकृतियों, ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक धरोहरों के स्थलों इत्यादि में परिलक्षित होता हुआ दिखता है। भारत में भ्रमण, भारतीय अतिथि सत्कार का अनुभव होना, भारत के आकर्षक हस्तशिल्प एवं हाथ से बने कपड़ों को खरीदना, भारत के प्राचीन साहित्य को पढ़ना, योग एवं ध्यान का अभ्यास करना, भारतीय दर्शनशास्त्र से प्रेरित होना, भारत के अनुपम त्यौहारों में भाग लेना, भारत के वैविध्यपूर्ण सङ्गीत एवं कला की सराहना करना और भारतीय फिल्मों को देखना आदि ऐसे कुछ आयाम हैं जिनके माध्यम से दुनिया भर के करोड़ो लोग प्रतिदिन इस सांस्कृतिक विरासत में सम्मिलित होते हैं, इसका आनन्द उठाते हैं और लाभ प्राप्त करते हैं।

यही सांस्कृतिक एवं प्राकृतिक सम्पदा है भारत की इस सांस्कृतिक सम्पदा का संरक्षण, संवर्धन एवं प्रसार, देश की उच्चतर प्राथमिकता होनी चाहिए क्योंकि इस देश की पहचान के साथ-साथ इसकी अर्थव्यवस्था के लिए भी बहुत महत्त्वपूर्ण है।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के बिन्दु क्रं. 22.2 में कलाओं के विषय में निर्देश हैं। भारतीय कला एवं संस्कृति का संवर्धन राष्ट्र एवं राष्ट्र के नागरिकों के लिए महत्त्वपूर्ण है । बच्चों में अपनी पहचान और अपनेपन के भाव तथा अन्य संस्कृतियों और पहचानों की सराहना का भाव पैदा करने के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति जैसी प्रमुख क्षमताओं को बच्चों में विकसित करना जरूरी है। बच्चों में अपने सांस्कृतिक इतिहास, कला, भाषा एवं परम्परा की भावना और ज्ञान के विकास द्वारा ही एकता, सकारात्मक सांस्कृतिक पहचान और आत्म-सम्मान निर्मित किया जा सकता है । अत: व्यक्तिगत एवं सामाजिक कल्याण के लिए सांस्कृतिक जागरूकता और अभिव्यक्ति का योगदान महत्त्वपूर्ण है ।

प्रतिष्ठान की मुख्य वैदिक शिक्षा (वेदों की श्रुति या मौखिक परम्परा/वेद पाठ/वैदिक ज्ञान परम्परा) सहित अन्य आवश्यक आधुनिक विषय- संस्कृत, अंग्रेजी, मातृभाषा, गणित, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान, कम्प्यूटर विज्ञान, दर्शन, योग, वैदिक कृषि, भारतीय कला, SUPW आदि महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड की पाठ्य पुस्तकों की नींव/स्त्रोत भारतीय ज्ञान परम्परा (IKS) विषयों की अनुप्रविष्टि (इनपुट) पर आधारित हैं। ये सभी निर्देश राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के दिशानिर्देशों के अनुरूप है। राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 एवं महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के शैक्षिक चिन्तकों, प्राधिकरणों के परामर्श एवं नीति को ध्यान में रखते हुए प्रारूप पुस्तकें पीडीएफ फॉर्मेट में उपलब्ध करायी गयी हैं। इन पुस्तकों को भविष्य में NCF के अनुरूप अद्यतन किया जाएगा और अन्त में प्रिन्ट रूप में उपलब्ध कराया जाएगा।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन के राष्ट्रीय आदर्श वेदविद्यालय के अध्यापक महानुभावों ने, वेद अध्यापन (वैदिक मौखिक एवं श्रुति परम्परा/वेद पाठ/वेद ज्ञान परम्परा) में समर्पित आचार्यों ने, सम्बद्ध वेद पाठशालओं के संस्कृत एवं आधुनिक विषयों के अध्यापकों ने, आधुनिक विषय पाठ्यपुस्तकों को इस रूप में प्रस्तुत करने में पिछले दो वर्षों में अथक परिश्रम किया है। उन सभी को हृदय की गहराई से धन्यवाद समर्पण करता हूँ। राष्ट्र स्तर के विविध विशेषज्ञों ने

समय-समय पर पधार कर पाठ्यपुस्तकों में गुणवत्ता लाने में विशेष सहायता प्रदान की है। उन सभी विशेषज्ञों एवं विद्यालयों के अध्यापक महानुभावों को भी धन्यवाद अर्पित करता हूँ। अक्षर योजना हेतु, चित्राङ्कन हेतु, पेज सेटिंग हेतु मेरे सहयोगी कर्मचारियों ने कार्य किया है, उन सभी को हृदय की गहराई से कृतज्ञता समर्पण करता हूँ।

पाठ्य पुस्तकों की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए रचनात्मक आलोचना सहित सभी सुझावों का स्वागत है।

आपरितोषात् विदुषां न साधु मन्ये प्रयोगविज्ञानम्।
बलवदपि शिक्षितानाम् आत्मन्यप्रत्ययं चेतः॥

(अभिज्ञानशाकुन्तलम् १.०२)

(जब तक विद्वानों को पूर्ण सन्तुष्टि न हो जाए तब तक विशिष्ट प्रयोग को सब तरह से सफल नहीं मानता क्योंकि प्रयोग में विशेष योग्यता प्राप्त विद्वान भी पहले प्रयोग के सफलता में आश्वस्त नहीं रहता है।)

प्रो. विरूपाक्ष वि जड्डीपाल
सचिव
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

विषयानुक्रमणिका

क्र. सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	परिमेय संख्या	1 - 27
2	एक चर वाले रैखिक समीकरण	28 - 42
3	वर्ग एवं वर्गमूल	43 - 61
4	घन एवं घनमूल	62 - 73
5	घात एवं घाताङ्क	74 - 92
6	वैदिक गणित	93 - 110
7	चतुर्भुजों को समझना	111 - 127
8	बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ	128 - 146
9	राशियों की तुलना	147 - 164
10	सीधा और प्रतिलोम अनुपात	165 - 176
11	क्षेत्रमिति	177 - 192

❖ **भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान** 193 - 196

अध्याय 1

परिमेय संख्या

प्रिय बटुकों ! हमने पूर्व कक्षा में परिमेय संख्याओं के बारे में अध्ययन किया था आपको स्मरण होगा कि परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है। जहाँ p व q पूर्णाङ्क हैं और $q \neq 0$ हमने परिमेय संख्याओं में धनात्मक व ऋणात्मक परिमेय संख्या, समतुल्यता, मानक रूप, उनकी आपस में तुलना आदि का विस्तार से अध्ययन किया है। इस अध्याय में पूर्व कक्षा के अध्ययन को आगे बढ़ाते हुए परिमेय संख्याओं में सङ्क्रियाएँ, योज्य एवं गुणात्मक प्रतिलोम, दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करने का अध्ययन एवं अभ्यास करेंगे।

बीजगणितम् में परिमेय संख्याओं के रूप से सम्बन्धित निम्न श्लोक मिलता है।

सच्छेदकराशौ भाज्ये भाजके वा ऋणत्वं चेत् फलमृणमेव,

द्वयोर्ऋणत्वे फलं धनमेव यथा $\frac{-\text{अ}}{\text{व}} = -\frac{\text{अ}}{\text{व}}$, $\frac{\text{अ}}{-\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{व}}$ **तथा** $\frac{\text{अ}}{-\text{व}} = \frac{\text{अ}}{\text{व}}$

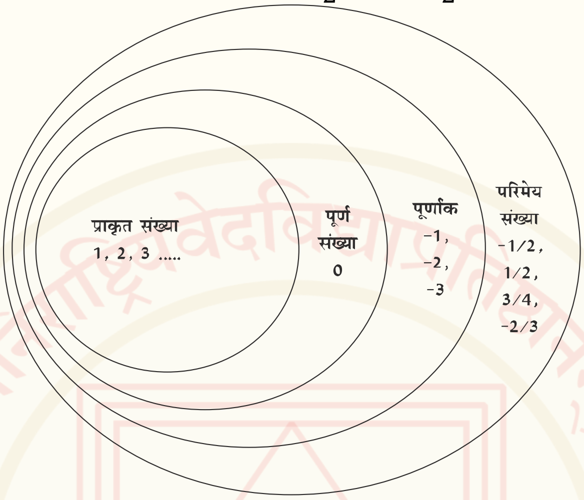
(बीजगणितम् , सच्छेदकराशिगणितम्, पृष्ठ 238)

आइये, संख्याओं के पूर्व अनुभव को दोहराते हुए परिमेय संख्या का अध्ययन करते हैं।

1. प्राकृत संख्या (N) = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...
2. पूर्ण संख्या (W) = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ...

3. पूर्णाङ्क संख्या = ... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ....

4. परिमेय संख्या = ... $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$, ...



इस प्रकार सभी प्राकृत संख्या (N), पूर्ण संख्याएँ भी होती हैं एवं सभी पूर्ण संख्याएँ पूर्णाङ्क संख्याएँ भी होती हैं, सभी पूर्णाङ्क संख्या परिमेय संख्या भी होती हैं तथा सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्या (अपरिमेय एवं परिमेय संख्या) होती है ।

परिमेय संख्याओं के गुणधर्म :-

1.संवृत गुणधर्म –

जब दो परिमेय संख्याओं के मध्य परस्पर सङ्क्रिया (+, −, ×, ÷) करने पर परिणाम पुनः परिमेय संख्या प्राप्त हो तो उसे दी गई सङ्क्रिया के अन्तर्गत संवृत कहते हैं । आइए, निम्न उदाहरणों में दी गई सङ्क्रिया पर विचार करते हैं ।

योग :-(क) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{6}{14} + \frac{7}{14} = \frac{13}{14}$ एक परिमेय संख्या है ।

(ख) $\frac{2}{5} + \frac{(-4)}{3} = \frac{6}{15} + \frac{(-20)}{15} = \frac{6-20}{15} = \frac{-14}{15}$ एक परिमेय संख्या है ।

व्यवकलन :-

(क) $\frac{3}{7} - \frac{5}{3} = \frac{9}{21} - \frac{35}{21} = \frac{9-35}{21} = \frac{-26}{21}$ एक परिमेय संख्या है ।

(ख) $\frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2-2}{5} = \frac{0}{5} = 0$ एक परिमेय संख्या है ।

गुणन :-

(क) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$ एक परिमेय संख्या है ।

(ख) $\frac{4}{5} \times \frac{(-3)}{7} = \frac{4 \times (-3)}{5 \times 7} = \frac{(-12)}{35}$ एक परिमेय संख्या है ।

भाग :-

(क) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ एक परिमेय संख्या है ।

(ख) $0 \div \frac{2}{3} = 0 \times \frac{3}{2} = \frac{0 \times 3}{2} = \frac{0}{2} = 0$ एक परिमेय संख्या है ।

(ग) $\frac{3}{5} \div \frac{0}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{0} = \frac{3 \times 4}{5 \times 0} = \frac{12}{0}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

उपर्युक्त सभी उदाहरणों को हम देखकर पाएंगे कि दो परिमेय संख्याओं के मध्य योग, व्यवकलन एवं गुणन का परिणाम भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु भाग सदैव परिमेय संख्या ही हो ऐसा आवश्यक नहीं है। अतः परिमेय संख्याएँ योग, व्यवकलन एवं गुणन के अन्तर्गत संवृत नियम का पालन करती है परन्तु भाग के अन्तर्गत परिमेय संख्याएँ संवृत नहीं है।

2. सहाचर्य गुणधर्म -

योग : तीन परिमेय संख्याओं के मध्य परस्पर संक्रिया $(+, -, \times, \div)$ पर सहाचर्य गुणधर्म की जाँच करते हैं ।

आइए तीन परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ एवं $\frac{2}{3}$ को लेकर जाँच करते हैं।

(क) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{9+8}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{17}{12}$$
$$= \frac{6+17}{12}$$
$$= \frac{23}{12}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}$$
$$= \left(\frac{2+3}{4}\right) + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{15}{12} + \frac{8}{12}$$
$$= \frac{23}{12}$$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a, b, व c के लिए

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{(-3)}{4}$ लेकर जाँच कीजिए -

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{(-3)}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{12} - \frac{-9}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{8-(-9)}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{8+9}{12}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{(-3)}{4}$$
$$= \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{6}\right) - \frac{(-3)}{4}$$
$$= \left(\frac{3-4}{6}\right) - \frac{(-3)}{4}$$
$$= \frac{-1}{6} - \frac{(-3)}{4}$$

$= \frac{1}{3} - \frac{17}{12}$	$= \frac{-2}{12} - \frac{(-9)}{12}$
$= \frac{4}{12} - \frac{17}{12}$	$= \frac{-2-(-9)}{12}$
$= \frac{4-17}{12} = \frac{(-13)}{12}$	$= \frac{-2+9}{12} = \frac{7}{12}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a, b एवं c के लिए

$$\boldsymbol{a - (b - c) \neq (a - b) - c}$$

गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ एवं $\frac{(-2)}{3}$ लेकर गुणन के सापेक्ष सहाचर्य गुणधर्म की जाँच कीजिए -

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{(-2)}{3}$	$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{(-2)}{3}\right)$
$= \left(\frac{1\times3}{2\times4}\right) \times \frac{(-2)}{3}$	$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3\times(-2)}{4\times3}\right)$
$= \frac{3}{8} \times \frac{-2}{3}$	$= \frac{1}{2} \times \frac{(-6)}{12}$
$= \frac{3\times(-2)}{8\times3}$	$= \frac{1\times(-6)}{2\times12} = \frac{-6}{24}$
$= \frac{-6}{24}$ या $\frac{-1}{4}$	$= \frac{(-1)}{4}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a, b एवं c के लिए

$$\mathbf{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

भाग

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ एवं $\frac{(-1)}{4}$ लेकर भाग के सापेक्ष सहाचर्य गुणधर्म जाँच कीजिए -

$= \left(\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}\right) \div \frac{(-1)}{4}$	$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{2}{3} \div \frac{(-1)}{4}\right)$
$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right) \div \frac{(-1)}{4}$	$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{(-1)}\right)$
$= \left(\frac{1\times3}{2\times2}\right) \div \frac{(-1)}{4}$	$= \frac{1}{2} \div \frac{(2\times4)}{3\times(-1)}$
$= \frac{3}{4} \div \frac{(-1)}{4}$	$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{8}{(-3)}\right)$
$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{(-1)}$ या $\frac{3}{4} \times \frac{(-4)}{1}$	$= \frac{1}{2} \times \frac{(-3)}{8}$
$= \frac{3\times(-4)}{4\times1} = \frac{-12}{4}$	$= \frac{1\times(-3)}{2\times8}$
$= \frac{(-3)}{1}$	$= \frac{(-3)}{16}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a, b व c के लिए

$$(\mathbf{a} \div \mathbf{b}) \div \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \div (\mathbf{b} \div \mathbf{c})$$

3) तत्समक गुणधर्म :

'योगे खं क्षेपसमं' (लीलावती गणित, शून्यपरिकर्माष्टकम्)

अर्थात् शून्य को किसी संख्या में जोड़ने पर योगफल उस संख्या के तुल्य होता है।

योज्य तत्समक एवं गुणात्मक तत्समक

किसी परिमेय संख्या में शून्य को जोड़ने तथा 1 का गुणन करने पर वहीं संख्या प्राप्त होती है अर्थात् शून्य (0) योज्य तत्सम कहलाता है तथा संख्या एक (1) गुणात्मक तत्समक कहलाता है।

(क) $5 + 0 = 5 = 0 + 5$ (ग) $(-8) \times 1 = -8 = 1 \times (-8)$

(ख) $\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}=0+\frac{3}{2}$ (घ) $\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}=1\times\frac{3}{4}$

अर्थात् परिमेय संख्या a के लिए

$a+0=a=0+a$ $a\times 1=a=1\times a$

0 योज्य तत्समक है। **1 गुणात्मक तत्समक है।**

4) प्रतिलोम गुणधर्म

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के निम्न श्लोक की व्याख्या में प्रतिलोम गुणधर्म बताया गया है।

समयोर्धनर्णयोरैक्यं खं शून्यं भवति।

(ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त:,कुट्टकाध्याय:, श्लो.30 (व्याख्या))

अर्थात् समान धन एवं ऋण संख्याओं का अन्तर शून्य होता है।

योज्य प्रतिलोम जब दो परिमेय संख्याओं का योग शून्य (योज्य तत्समक) हो तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे के योज्य प्रतिलोम होती हैं हम कह सकते हैं। a का योज्य प्रतिलोम (–a) तथा (–a) का योज्य प्रतिलोम a है।

जैसे : $3+(-3) = 3-3 = 0$

$\frac{3}{5}-\frac{3}{5}=0$

जब दो परिमेय संख्या का गुणनफल एक (1) गुणात्मक प्रतिलोम (गुणात्मक तत्सम) हो तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम होती हैं। हम कह सकते हैं। व्यापक रूप में $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ तथा $\frac{b}{a}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{a}{b}$ है। जहाँ $a \neq 0$

जैसे : $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$

$\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = 1$

5. क्रमविनिमेय -

जब दो परिमेय संख्या के आपस में क्रम बदलने पर दी गई सङ्क्रिया (+, –, ×, ÷) का परिमाप समान (बराबर) हो तो हम कहते हैं कि दी गई परिमेय संख्या क्रमविनिमेय नियम का पालन करती है।

योग

दो परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ एवं $\frac{2}{5}$ का योगफल ज्ञात करें।

$\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$
$= \frac{15}{20} + \frac{8}{20}$	$= \frac{8}{20} + \frac{15}{20}$
$= \frac{15+8}{20}$	$= \frac{8+15}{20}$
$= \frac{23}{20}$	$= \frac{23}{20}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a व b योग के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करती है -

$$a + b = b + a$$

व्यवकलन: दो परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ में से $\frac{7}{3}$ को घटाइये।

$\frac{3}{5} - \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3} - \frac{3}{5}$
$= \frac{9}{15} - \frac{35}{15}$	$= \frac{35}{15} - \frac{9}{15}$

$= \frac{9-35}{15}$	$= \frac{35-9}{15}$
$= \frac{-26}{15}$	$= \frac{26}{15}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a एवं b व्यवकलन के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुणधर्म पालन नहीं करती है -

$$a - b \neq b - a$$

गुणनः- दो परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ एवं $\frac{4}{7}$ का गुणनफल ज्ञात करें ।

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$
$= \frac{3\times4}{5\times7}$	$= \frac{4\times3}{7\times5}$
$= \frac{12}{35}$	$= \frac{12}{35}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a एवं b गुणन के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुणधर्म पालन करती है -

$$a \times b = b \times a$$

भागः- दो परिमेय संख्या $\frac{7}{5}$ और $\frac{2}{3}$ का भागफल ज्ञात करें ।

$\frac{7}{5} \div \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5}$
$= \frac{7}{5} \times \frac{3}{2}$	$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$
$= \frac{7\times3}{5\times2}$	$= \frac{2\times5}{3\times7}$
$= \frac{21}{10}$	$= \frac{10}{21}$

अर्थात् व्यापक रूप में परिमेय संख्या a एवं b भाग के सापेक्ष क्रमविनिमेय गुणधर्म पालन नहीं करती है –

$$a \div b \neq \mathbf{b} \div \mathbf{a}$$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों को देखकर हम पाएंगे कि परिमेय संख्या योग एवं गुणन के अन्तर्गत क्रमविनिमेय नियम का पालन करती है परन्तु व्यवकलन एवं भाग में परिमेय संख्या क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करती है।

परिमेय संख्याओं पर सङ्क्रियाएँ –

बटुकों ! आप पूर्णाङ्क तथा भिन्नों संख्याओं की सङ्क्रियाओं (+, – , ×, ÷) से परिचित हैं। क्या आप योग, व्यवकलन (अन्तर),गुणन तथा भाग सङ्क्रिया कर सकते हैं ? लीलावती गणित में परिमेय संख्याओं के योग एवं व्यवकलन (अन्तर) ज्ञात करने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।

मिथो हराभ्यामपवर्त्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियाऽत्र गुण्यौ॥

(लीलावती,भिन्नपरिकर्माष्टकम् : 1)

अर्थात्, परिमेय संख्याओं के समान हर बनाने के लिए प्रथम राशि के हर को दूसरी राशि के अंश एवं हर तथा दूसरी राशि के हर को प्रथम राशि के अंश एवं हर से गुणा करके तुल्य हर (समान हर) बनाया जाता है। तुल्य हर होने के बाद यदि परिमेय संख्याओं का योग करना हो, तो अंशों का योग कर नीचे में तुल्य हर को रखने से योगफल प्राप्त होता है और यदि परिमेय संख्याओं का अन्तर करना हो तो अंशों के मध्य अन्तर कर नीचे में तुल्य हर रखने पर परिमेय संख्याओं का अन्तर

प्राप्त होता है अथवा सम्भव रहने पर किसी अंक से हरो को अपवर्तन देकर, उन अपरिवर्तित हरों से परस्पर हर एवं अंश से गुणा करने पर भी समच्छेद होता है। इसे भागजाति है। **जैसे :**

प्रथम रीति: $\frac{2}{4}$ और $\frac{3}{8}$ का योगफल ज्ञात करें तब प्रथम रीति से समच्छेद करने पर-

$$\frac{12}{32} + \frac{12}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

दूसरी रीति : इस रीति में हर 4 , 8 को 4 से अपवर्तन करने पर 1, 2 हुए।

अब 1 , 2 से परस्पर हर एवं अंश को गुणा करने पर $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$ हुए। दोनों को जोड़ने पर $\frac{7}{8}$ प्राप्त हुआ। यह योगफल प्रथम रीति के तुल्य ही आया है।

आइये, उदाहरणों के द्वारा परिमेय संख्याओं पर होने वाली सङ्क्रियाओं का अध्ययन करते हैं।

परिमेय संख्या के योग एवं अन्तर –

- **समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग –**

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ और $\frac{-5}{7}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{2}{7} + \frac{(-5)}{7}$$

$$= \frac{2+(-5)}{7}$$

$$= \frac{2-5}{7}$$

$$= \frac{(-3)}{7}$$

❖ **करो और सीखो -**

1) $\frac{(-1)}{7} + \frac{3}{7}$

2) $\frac{2}{5} + \frac{(-3)}{5}$

आइए, कुछ अन्य उदाहरणों को हल करते हैं।

1) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2) $\frac{(-13)}{7} + \frac{2}{7} = \frac{(-13)+2}{7} = \frac{(-11)}{7}$

इस प्रकार हम देखते हैं, कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात करने के लिये समान हर को हर के स्थान पर रखते हुए अंशों का योग करते हैं।

दिनकर ने बालकृष्ण से पूछा हम अलग-अलग हर वाली दो परिमेय संख्याओं को कैसे जोड़ते हैं? बालकृष्ण तुम्हें याद है? हमने अलग-अलग हर वाली दो भिन्नों को जोड़ा था।

1) भिन्नों की तरह, हम इन हरों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं।

2) इसके बाद ऐसी समतुल्य परिमेय संख्या ज्ञात करते हैं जिनका हर लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) हो।

3) फिर दोनों परिमेय संख्याओं (जिनका हर समान है) को जोड़ते हैं।

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5}$

4 एवं 5 का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) 20 है।

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{(-2)}{5} = \frac{(-2)\times4}{5\times4} = \frac{(-8)}{20}$$

तब, $\frac{1}{4} + \frac{(-2)}{5} = \frac{5}{20} + \frac{(-8)}{20}$

$$= \frac{5+(-8)}{20}$$

$$= \frac{5-8}{20}$$

$$= \frac{(-3)}{20}$$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न का योगफल ज्ञात करें।

1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 2) $\frac{(-1)}{4} + \frac{2}{3}$

व्यवकलन (अन्तर) –

ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त के गणिताध्याय में परिमेय संख्याओं के अन्तर ज्ञात करने के सम्बन्ध में निम्न श्लोक मिलता है।

विपरीतच्छेदगुणा राश्योश्छेदांशका: समच्छेदाः ।

सङ्कलितेंऽशा योज्या व्यवकलितेंऽशान्तरं कार्यम्॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त ,गणिताध्याय : 2)

अर्थात् , दो परिमेय संख्या के हर और अंश को परस्पर गुणन कर तुल्य हर बनाया जाता है। तथा योग के लिए अंशों का योग कर नीचे तुल्य हर को रखने पर योग होता है।तथा अन्तर के लिए अशों के मध्य अन्तर कर नीचे तुल्य हर को रखने पर अन्तर ज्ञात होता है।

- **समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं के व्यवकलन (अन्तर)** -

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{8}$ में से $\frac{(-7)}{8}$ को घटाइये।

हल : $\frac{3}{8} - \frac{(-7)}{8}$

$$= \frac{3-(-7)}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8}$$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न को हल करें (अन्तर) -

1) $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$ 2) $\frac{5}{9} - \frac{4}{9}$

आइए , कुछ अन्य उदाहरणों को हल करते हैं।

1) $\frac{5}{3} - \frac{8}{3} = \frac{5-8}{3} = \frac{(-3)}{3} = -1$

2) $\frac{(-5)}{4} - \frac{13}{4} = \frac{-5-13}{4} = \frac{(-18)}{4} = \frac{(-9)}{2}$

3) $\frac{2}{11} - \frac{(-3)}{11} = \frac{2-(-3)}{11} = \frac{2+3}{11} = \frac{5}{11}$

उपर्युक्त उदाहरणों को देखकर हम पाएंगे कि समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं के अन्तर ज्ञात करने पर समान हर को हर के स्थान पर रखते हुए ,अंशों के मध्य अन्तर करते हैं। विष्णु ने जगदीश से प्रश्न किया कि- यदि दोनों परिमेय संख्याओं का हर अलग-अलग हो तो हम उनका व्यवकलन कैसे ज्ञात करेंगे?

जगदीश - जिस प्रकार हमने परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात किया था ठीक उसी प्रकार हम व्यवकलन (अन्तर) में अन्तिम चरण में योग के स्थान पर अन्तर कर देते हैं।

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{5}{4}$ में से $\frac{(-1)}{6}$ को घटाइये।

हल : $\frac{5}{4} - \frac{(-1)}{6}$

4 एवं 6 का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) 12 है।

$\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$

$\frac{(-1)}{6} = \frac{(-1)\times2}{6\times2} = \frac{(-2)}{12}$

अत: $\frac{5}{4} - \frac{(-1)}{6} = \frac{15}{12} - \frac{(-2)}{12}$

$= \frac{15+2}{12}$

$= \frac{17}{12}$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न को हल करें (घटाइये)।

1) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$ 2) $\frac{1}{2} - \frac{(-1)}{3}$

परिमेय संख्या के मध्य गुणन –

बटुकों ! हमने भिन्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करना जानते हैं।

अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥

(लीलावती गणित, 42)

अर्थात् दी गई भिन्न संख्याओं के अंशों के मध्य गुणनफल को, हरों के मध्य गुणनफल से भाग देने पर भिन्न संख्याओं का गुणनफल होता है। भिन्न संख्याओं के गुणन की तरह परिमेय संख्याओं के गुणनफल ज्ञात करने के विषय में ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त में निम्न श्लोक मिलता है।

रूपाणिच्छेदगुणान्यंशयुतानि द्वयोर्बहूनां वा ।

प्रत्युत्पन्नो भवतिच्छेदवधेनोद्धृतोंऽशवधः ॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त, गणिताध्याय: 3)

अर्थात्, दो या दो अधिक परिमेय संख्याओं के गुणन के लिए अंशों के गुणनफल को हर के गुणनफल से भाग देने पर परिपेय संख्याओं के गुणनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण : परिमेय संख्या के गुणनफल $2 \times \frac{(-5)}{3}$ पर विचार करते हैं।

हल: गुणन क्रिया : $\frac{2}{1} \times \frac{(-5)}{3}$

$= \frac{2 \times (-5)}{1 \times 3} = \frac{(-10)}{3}$

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ में $\frac{(-4)}{7}$ का गुणा करें।

हल : गुणन क्रिया : $\frac{3}{4} \times \frac{(-4)}{7}$

$= \frac{3 \times (-4)}{4 \times 7}$

$= \frac{(-12)}{28}$

❖ **करो और सीखो**

निम्न का गुणन करें -

1) $4 \times \frac{(-2)}{5}$ 2) $\frac{5}{3} \times \frac{(-7)}{4}$

परिमेय संख्याओं के मध्य भाग –

बटुकों! हमने भिन्न संख्याओं के भागफल ज्ञात करने की विधि को जानते हैं।

छेदं लवं च परिवर्त्त्य हरस्य शेष: कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च।

(लीलावती गणित, 42)

अर्थात् भिन्न संख्या के भागफल ज्ञात करने के लिए भाजक के अंश एवं हर को परस्पर बदलकर भिन्न संख्या के गुणन रीति से गुणन करने पर भागफल प्राप्त

होता है। भिन्न संख्याओं के भाग की तरह परिमेय संख्याओं के भागफल ज्ञात करने के विषय में ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त के गणिताध्याय में निम्न श्लोक मिलता है।

परिवर्त्य भागहारच्छेदांशौ छेदसंगुणाच्छेदः ।

अंशोंऽशगुणो भाज्यस्य भागहारः सवर्णितयोः ॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त, गणिताध्याय,5)

अर्थात्, परिमेय संख्या के भागफल ज्ञात करने के लिये भाजक के हर एवं अंश का स्थान परिवर्तन कर (भाजक के व्युत्क्रम) भाज्य के साथ गुणन करने से भागफल प्राप्त होता है।

बटुकों! क्या आप भिन्नों के व्युत्क्रम के बारे जानते हैं?

$\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{2}$ होता है।

यह अवधारणा परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रम के लिए भी लागू होती है। इस प्रकार $\frac{(-5)}{4}$ का व्युत्क्रम $\frac{(-4)}{5}$ या $\frac{4}{(-5)}$ तथा $\frac{(-7)}{9}$ का व्युत्क्रम $\frac{(-9)}{7}$ होगा।

हम जानते हैं,

$$2 \times 5 = 10$$

इसे हम दो प्रकार से लिख सकते हैं।

(1) $10 \div 5 = 2$

$$\frac{10}{5} = 2$$

$$10 \times \frac{1}{5} = 2$$

(2) $10 \div 2 = 5$

$$\frac{10}{2} = 5$$

$$10 \times \frac{1}{2} = 5$$

भाज्य में भाजक के व्युत्क्रम से गुणफल ज्ञात करने पर हमें भागफल प्राप्त होता है। उपर्युक्त उदाहरण में हमने भाग की सङ्क्रिया को गुणन रूप में बदल कर भागफल प्राप्त किया है।

उदाहरण : $\frac{(-21)}{5} \div \frac{2}{3}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{(-21)}{5} \div \frac{2}{3}$

$= \frac{(-21)}{5} \times \frac{3}{2}$ (चूँकि $\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम $\frac{3}{2}$)

$= \frac{(-21) \times 3}{5 \times 2}$

$= \frac{(-63)}{10}$

उदाहरण : $\frac{3}{4} \div \frac{(-1)}{5}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{3}{4} \div \frac{(-1)}{5}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{(-5)}{1}$ (चूँकि $\frac{-1}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{(-1)}$ या $\frac{(-5)}{1}$)

$= \frac{3 \times (-5)}{4}$

$= \frac{(-15)}{4}$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न को हल करें -

1) $\frac{(-7)}{4} \div \frac{3}{5}$ 2) $\frac{5}{3} \div \frac{(-1)}{4}$

योज्य प्रतिलोम –

जब दो संख्याओं का योग शून्य (0) हो, तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे की **योज्य प्रतिलोम** होती हैं। व्यापक रूप में -

a **का योज्य प्रतिलोम** $= (-a)$ **होगा।**

2 का योज्य प्रतिलोम (–2) तथा (–2) का योज्य प्रतिलोम 2 होता है।

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ की योज्य प्रतिलोम संख्या बताइए।

हल : $\frac{3}{4}$ का $\frac{(-3)}{4}$ से जोड़ने पर

$$\frac{3}{4} + \frac{(-3)}{4} = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

अतः $\frac{3}{4}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{(-3)}{4}$ है।

निम्न उदाहरण द्वारा संख्याओं के योज्य प्रतिलोम को देखिए -

$\frac{(-3)}{5}$ का योज्य प्रतिलोम $= \frac{3}{5}$

$\frac{5}{7}$ का योज्य प्रतिलोम $= \frac{(-5)}{7}$

1 का योज्य प्रतिलोम $= -1$

इस प्रकार हम कह सकते हैं। किसी परिमेय संख्या का **योज्य प्रतिलोम** उसी संख्या का विपरीत चिह्न वाली संख्या ही होती है।

❖ **करो और सीखो –**

निम्न संख्याओं के योज्य प्रतिलोम लिखिए।

अ) 5 ब) $\frac{(-2)}{7}$ स) $\frac{5}{4}$ द) $\frac{(-4)}{3}$

गुणात्मक प्रतिलोम –

जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 हो, तो वे दोनों संख्याएँ एक-दूसरे की **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाती हैं। गुणात्मक प्रतिलोम का व्यापक रूप निम्न है-

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 \text{ जहाँ } a \neq 0$$

जैसे : $\frac{3}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{5}{3}$ तथा $\frac{5}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{5}$ है।

किसी परिमेय संख्या $\frac{(-2)}{7}$ के लिए यदि $\frac{(-2)}{7} \times \frac{(-7)}{2} = 1$ होता है।

अतः हम कह सकते हैं कि $\frac{(-2)}{7}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{(-7)}{2}$ है।

❖ **करो और सीखो**

निम्न परिमेय संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

अ) $\frac{3}{7}$ ब) $\frac{(-4)}{9}$ स) $\frac{5}{7}$

दो परिमेय संख्याओं के बीच की संख्या –

किन्हीं दो परिमेय संख्या के बीच अनन्त परिमेय संख्या होती है।

आइए, उदाहरण पर विचार कीजिए।

संख्या $\frac{(-1)}{20}$ और $\frac{3}{20}$ के बीच की संख्या कितनी परिमेय संख्या है?

स्पष्ट रूप से $\frac{0}{20}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20}$ परिमेय संख्या है।

यदि हम $\frac{(-1)}{20}$ को $\frac{(-100)}{2000}$ तथा $\frac{3}{20}$ को $\frac{300}{2000}$ के रूप में लिखते हैं तो

$\frac{(-1)}{20}$ और $\frac{3}{20}$ के बीच संख्या

$\frac{-99}{2000}, \frac{-98}{200}, \ldots\ldots, \frac{299}{2000}$ प्राप्त करते हैं।

पूर्णाङ्क संख्या :

..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

उदाहरण : परिमेय संख्याएँ $\frac{(-3)}{4}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच में 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम $\frac{(-3)}{4}$ और $\frac{2}{5}$ को समान हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में परिवर्तित करते हैं। $\frac{(-3)\times 5}{4\times 5} = \frac{(-15)}{20}$ और $\frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20}$

इसी प्रकार हम $\frac{-15}{20}$ और $\frac{8}{20}$ के मध्य निम्नलिखित परिमेय संख्या $\left(\frac{-15}{20}, \frac{-13}{20}, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \frac{7}{20}, \frac{8}{20}\right)$ प्राप्त करते हैं। आप इनमें से कोई भी पाँच संख्या ले सकते हैं।

$$\frac{-10}{20}, \frac{-7}{20}, \frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{5}{20}$$

❖ **करो और सीखो –**

$\frac{1}{2}$ एवं $\frac{2}{5}$ के मध्य की दो संख्या ज्ञात करें।

आइये , BODMAS के नियम पर आधारित सवालों को हल करना सीखते हैं।

उदाहरण : हल करें- $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

हल : $\frac{3\times2}{4\times5} + \frac{1}{4}$

$= \frac{6}{20} + \frac{1}{4}$

$\frac{6}{20} = \frac{6\times1}{20\times1} = \frac{6}{20}$

$\frac{1}{4} = \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{5}{20}$

$\frac{6}{20} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20}$

$= \frac{6+5}{20} = \frac{11}{20}$

BODMAS (कोकाभागुयोध) के नियम

को	=	कोष्ठक	: ( ), { }, [ ]
का	=	के लिए	: $(\ )^2$ या $\sqrt{\ }$
भा	=	भाग	: ÷
गु	=	गुणा	: ×
यो	=	योग	: +

❖ **करो और सीखो**

निम्न को सरल कीजिए (BODMAS के नियमों से) –

1) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$ 2) $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) निम्न से कौन-सा योज्य तत्समक है-

(I) +1 (II) -1 (III) 0 (IV) 10

(ब) निम्न से कौन-सा गुणात्मक तत्समक है-

(I) 1 (II) 0

(III) (a) और (b) दोनों (IV) इनमें से कोई नहीं

(स) सबसे छोटी अभाज्य संख्या है-

(I) 2 (II) 1 (III) 0 (IV) 3

(द) 7 का गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) होगा-

(I) $\frac{1}{7}$ (II) 7 (III) -7 (IV) इनमें से कोई नहीं

(प) कौन-सा युग्म अभाज्य युग्म है-

(I) 15,17 (II) 17,19 (III) 23,25 (IV) 53,55

(फ) $\frac{5}{6}$ का योज्य प्रतिलोम है-

(I) $\frac{-5}{6}$ (II) $\frac{5}{6}$ (III) $\frac{6}{5}$ (IV) 0

(भ) दो परिमेय संख्या के बीच में कितनी परिमेय संख्या होगी -

(I)1 (II) 10 (III) 100 (IV) अनन्त (अपरिमित)

(म) $\frac{11}{-6}$ का गुणात्मक प्रतिलोम क्या है -

(I) $\frac{-6}{11}$ (II) $\frac{-11}{6}$ (III) $\frac{-11}{-6}$ (IV) $\frac{11}{6}$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

अ) $\frac{2}{5} + \frac{(-3)}{4}$ ब) $\frac{(-5)}{3} + \frac{4}{5}$

स) $\frac{1}{4} + \frac{(-3)}{4}$ द) $\frac{4}{7} + \frac{(-8)}{7}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को हल करें (घटाइये) -

अ) $\frac{2}{7} - \frac{5}{7}$ ब) $\frac{(-5)}{3} - \frac{(-4)}{3}$

स) $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$ द) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$

4. निम्नलिखित परिमेय संख्या के गुणनफल ज्ञात करें।

अ) $\frac{3}{4} \times \frac{(-4)}{5}$ ब) $\frac{(-3)}{4} \times \frac{(-7)}{2}$

स) $\frac{-4}{1} \times \frac{2}{12}$ द) $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7}$

5. निम्न का मान ज्ञात कीजिए। (भागफल)

अ) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$ ब) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{1}$

स) $\frac{3}{4} \div \frac{(-7)}{5}$ द) $\frac{(-4)}{5} \div \frac{7}{2}$

6. निम्न का मान ज्ञात कीजिए। (BODMAS के नियमों से हल करें)

अ) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ब) $\frac{2}{3} + \frac{4}{1} \times \frac{2}{3}$

स) $\frac{4}{1} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{5}$ द) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम लिखिए।

अ) -2 ब) $\frac{3}{7}$ स) $\frac{(-8)}{3}$ द) $\frac{3}{5}$

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

अ) $\frac{2}{5}$ ब) $\frac{(-3)}{7}$ स) $\frac{8}{5}$ द) $\frac{(-2)}{7}$

9. रिक्त-स्थानों को पूर्ण करें।

(ऋणात्मक एक (-1), असीमित, शून्य, एक, धनात्मक, शून्य)

1) किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का योज्य प्रतिलोम .... होता है।

2) किसी परिमेय संख्या में उसका योज्य प्रतिलोम जोड़ने पर परिणाम .... प्राप्त होता है।

3) किसी परिमेय संख्या में उसके गुणात्मक प्रतिलोम का गुणनफल परिणाम .... प्राप्त होता है।

4) दो परिमेय संख्याओं के बीच .... परिमेय संख्या होती है।

5) किसी परिमेय संख्या में शून्य से गुणन करने पर परिणाम .... प्राप्त होता है।

6) संख्या 1 का योज्य प्रतिलोम .... है।

❖ **हमने सीखा –**

1) दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित (अनन्त) परिमेय संख्याएँ होती हैं। **परिमेय संख्याओं के गुणधर्म -**

(1) संवृत (2) सहाचर्य (3) तत्समक

(4) प्रतिलोम (5) क्रमविनिमेय

2) समान हर वाली परिमेय संख्याओं को योग एवं अन्तर ज्ञात करने के लिये समान हर को हर के स्थान पर रखते हुए अंशों के मध्य योग एवं अन्तर करते हैं।

3) असमान हर वाली परिमेय संख्याओं के योग एवं अन्तर के लिए हरों का लघुत्तम समापवर्त्य लेकर हल करते हैं।

4) परिमेय संख्याओं के गुणनफल ज्ञात करने के लिए अंश का गुणन अंश से तथा हर का गुणन हर के साथ कर निम्न रूप से लिखा जाता है।

जैसे : $\frac{1}{4} \times \frac{(-2)}{3} = \frac{1\times(-2)}{4\times3} = \frac{(-2)}{12}$

5) परिमेय संख्या के भाग में भाज्य में भाजक के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

जैसे : $\frac{2}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \times (\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम $)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{2\times4}{5\times1} = \frac{8}{5}$

6) जब दो संख्याओं का योगफल शून्य हो तो वे आपस में **योज्य प्रतिलोम** कहलाती हैं।

परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-a}{b}$ है और विलोमत भी सत्य है।

जैसे : $\frac{3}{8}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-3}{8}$ होता है

$= \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3-3}{8} = \frac{0}{8} = 0$

7) जब दो संख्याओं को गुणनफल 1 हो, तो वे आपस में **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाती हैं। परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{b}{a}$ है और विलोमत: भी सत्य है। जहाँ $a \neq 0$ है।

जैसे : $\frac{2}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{5}{2}$ है।

$$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$$

अध्याय 2

एक चर वाले रैखिक समीकरण

प्यारे विद्यार्थियों! आपने पिछली कक्षा में सरल समीकरण के बारे में अध्ययन किया था। जहाँ हमने बीजीय व्यजंकों एवं समीकरण के बारे में चर्चा की थी। आपको निम्न का स्मरण होगा -

बीजीय व्यंजकों के कुछ उदाहरण हैं –

$$2x, \quad 5x, \quad -4, \quad 8y-31, \quad xyz+x, \quad x^2y$$

समीकरणों के कुछ उदाहरण हैं –

$$5x=25, \; 2x-3=9, \; 3x-4=10, \; 6z-4=25$$

आपको स्मरण होगा कि समीकरणों में सदैव '=' चिह्न का प्रयोग होता है, जो व्यंजकों में नहीं होता। इस अध्याय में हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों के बारे अध्ययन करेंगे।

एक चर वाले रैखिक समीकरण के सम्बन्ध में बीजगणितम् में निम्न श्लोक प्राप्त होता है

यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं
तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव।
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्
त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वाऽपि संगुण्य भक्त्वा ॥

(बीजगणितम्, अथैकवर्णसमीकणम्, 1)

अर्थात्, ऐसे समीकरण जिसमें एक ही चर $(a, b, \ldots\ldots, x, y, z)$ हो तथा चर की अधिकतम घात 1 हो। **एक चर वाले समीकरण** कहलाते हैं।

बीजगणितम् में रैखिक समीकरण को हल करने के पूर्व कुछ बातों को ध्यान में रखने के लिए निम्न श्लोक मिलता है।

एकाव्यक्तं शोधयेत् अन्यपक्षात् रूपाण्यन्यस्य इतरस्माच्च पक्षात् ।

शेषाव्यक्तेन उद्धरेत् रूपशेषं व्यक्तं मानं जायते अव्यक्तराशेः ॥

अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह ,यावत्तावत् द्व्यादिनिघ्नं हृतं वा ।

युक्तोनं वा कल्पयेद् आत्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा ॥

(बीजगणितम्,एकवर्णसमीकरणम्, 2-3)

उपर्युक्त बीजगणितम् के श्लोक की पंक्ति से अर्थ स्पष्ट है कि एक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि -

1. समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।
2. समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

जैसे : $3x - 2 \quad = \quad 5$

↑ चर राशि ↑ समता चिह्न

यहाँ बायाँ पक्ष = $3x - 2$ एवं दायाँ पक्ष = 5 है।

पूर्व कक्षा में आपने उपर्युक्त सरल समीकरणों को हल करना भी सीखा। जिसमें चर राशि एक पक्ष में थी। **जैसे:** $2x + 1 = 4,\ x + 4 = 10,\ \ 10 - x = 3$

आइए, पूर्व अभ्यास को दोहराते हुए समीकरणों को हल करना सीखें।

उदाहरण : समीकरण $2x+1=9$ को हल कीजिए।

हल : **चरण 1 –** समीकरण के दोनों पक्षों से 1 घटाने पर

$$2x+1-1 = 9-1$$
$$2x = 8$$

चरण 2 – समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से भाग देने पर

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

अतः दी गई समीकरण का हल $x=4$ है।

आइये , उपर्युक्त समीकरणों का कुछ ओर अभ्यास करके उसके हल को देखें।

पूर्व उदाहरण समीकरण $2x+1=9$ को हम चार विधियों से हल कर सकते हैं जो निम्नवत हैं -

1) $2x+1=9$

दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर

$2x+1+2=9+2$

$2x+3=11$

$2x=11-3$

$2x=8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

2) $2x+1=9$

दोनों पक्षों से 3 घटाने पर

$2x+1-3=9-3$

$2x+(-2)=6$

$2x=6+2$

$2x=8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

3) $2x+1=9$

दोनों पक्षों का 2 से गुणा करने पर

4) $2x+1=9$

दोनों पक्षों का 3 से भाग करने पर

$$2(2x+1) = 2(9)$$

$$4x + 2 = 18$$

$$4x = 18 - 2$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{3}{1}$$

(व्रजगुणन करने पर)

$$1(2x+1) = 3 \times 3$$

$$2x + 1 = 9$$

$$2x = 9 - 1$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

इस प्रकार समीकरणों के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने, घटाने, शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करने से समीकरण का स्वरूप बदल जाता है लेकिन समीकरण का हल (उत्तर) में कोई अन्तर नहीं दिखता है। अतः हम समीकरणों में आवश्यकतानुसार इन सङ्क्रियाओं का सहारा लेते हैं।

अब हम ऐसे सरल समीकरणों को हल करना सीखेंगे, जिनमें दोनों पक्षों में चर राशि हों। निम्न समीकरण हल करें -

$$8x + 1 = 4x + 13$$

इस समीकरण का हल करने का अर्थ है।

इसका स्वरूप $x = \ldots\ldots$ बनाना है।

अतः बायें पक्ष में इकाई चर राशि लानी है तथा दायें पक्ष में अचर राशि रखनी है। इसके लिए दोनों पक्षों से पक्षान्तर है या समान सङ्क्रिया करेंगे। पक्षान्तर करने पर चिह्न परिवर्तित हो जाता है।

पक्षान्तर विधि —

उदाहरण : समीकरण $8x + 1 = 4x + 13$ की कीजिए।

हल : पक्षान्तर विधि : ($4x$ और 1 का पक्षान्तर करने पर)

या $8x - 4x = 13 - 1$

या $4x = 12$

दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर

या $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$

$x = 3$

तुला विधि :

उदाहरण : समीकरण $7x + 2 = 3x + 5$ हल ज्ञात करें।

हल : तुला विधि : $7x + 2 = 3x + 5$

दोनों पक्षों से 2 घटाने पर

या $7x + 2 - 2 = 3x + 5 - 2$

या $7x = 3x + 3$

दोनों पक्षों से $3x$ को घटाने पर

या $7x - 3x = 3x - 3x + 3$

या $4x = 3$

दोनों पक्षों का 4 से भाग देने पर

$\frac{4x}{4} = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4}$

उदाहरण : समीकरण हल करें - $\frac{x}{2} = \frac{x+1}{5}$

हल : दोनों पक्षों के हर 2 व 5 का लघुत्तम समापवर्त्य 10 से गुणा करने या वज्र गुणन (क्रॉस गुणा करने पर)

$\frac{x}{2} = \frac{x+1}{5}$

$5x = 2\,(x+1)$

$5x = 2x + 2$

$2x$ का पक्षान्तर करने पर -

$5x - 2x = 2$

$3x = 2$

दोनों पक्षों का 3 से भाग देने पर -

$\frac{3x}{3} = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}$

उदाहरण : समीकरण हल करें- $\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3}$

हल : $\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{3}$

वज्रगुणन करने पर

$3(x+1) = 2(x+2)$

$3x + 3 = 2x + 4$

$2x, 3$ का पक्षान्तर करने पर

$3x - 2x = 4 - 3$

$x = 1$

❖ करो और सीखो

निम्न समीकरणों को हल कीजिए –

1) $2x + 11 = 9$

2) $\frac{x}{2} = \frac{x+4}{3}$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) समीकरण $2x + 3 = 5$ का हल क्या होगा -

(I) 1 (II) 2 (III) 5 (IV) 4

(ब) समीकरण $y + 8 = 6$ में y का मान होगा -

(I) 2 (II) -2 (III) 14 (IV) 48

(स) $3x + 18$ में x का मान होगा -

(I) 6 (II) 18 (III) 54 (IV) सम्भव नहीं है।

(द) $\frac{x}{3} = 7$ में x का मान होगा -

(I) 21 (II) 3 (III) 7 (IV) $\frac{7}{3}$

(प) $5(x + 4) = 9(4x - 5)$ को हल करने पर x का मान होगा -

(I) 65 (II) 31 (III) $\frac{31}{65}$ (IV) $\frac{65}{31}$

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल करें।

1) $7x + 3 = 3x + 5$
2) $3(x + 1) = x + 5$
3) $3x + 4 = x + 9$
4) $\frac{x+1}{2} = \frac{x}{4}$
5) $\frac{x}{5} = \frac{x+1}{9}$
6) $\frac{x+1}{2} = \frac{x+2}{5}$
7) $\frac{x+4}{2} = \frac{x+3}{3}$
8) $\frac{x+8}{5} = \frac{x+3}{4}$

समीकरण के अनुप्रयोग –

दैनिक जीवन में कई समस्याओं, पहेलियों आदि का समाधान हम समीकरणों द्वारा हल कर, अज्ञात राशि का मान पता करते हैं। पूर्व कक्षा में आपने अज्ञात राशि का मान निकालना सीखा है। अज्ञात राशि, किसी संख्या को हम x मानकर हल करते थे।

आइए , गणितीय वाक्य बनाने के अभ्यास को दोहराते हैं।

रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

माना अज्ञात राशि (अज्ञात संख्या) x हो -

क्र.	समस्या कथन	गणितीय कथन
1	संख्या से 3 अधिक	$x+3$
2	संख्या से 4 कम	$x-4$
3	संख्या का 3 गुणा	$3x$
4	संख्या के 3 गुणा से 5 अधिक	$3x+5$
5	संख्या के 4 गुणा में 7 कम	....
6	संख्या से 7 अधिक	....
7	संख्या से 5 कम	....
8	संख्या के 7 गुणा में 7 कम	....

वाक्यों पर आधारित गणितीय समस्याओं को हल करने के पूर्व निम्नलिखित चरणों में कार्य किया जाता है।

1) दिये गये सवाल को ध्यान से पढ़ें तथा ज्ञात व अज्ञात राशि का पता करें।

2) अब अज्ञात राशि को x (चर राशि) के रूप में लिखें।

3) समस्या कथनों को गणितीय कथन (बीजीय पद एवं व्यंजक) के रूप में लिखें।

4) प्रश्न के शर्तों के अनुसार जो राशियाँ बराबर हों, उन्हें समीकरण के रूप में लिखें।

5) समीकरण को हल करें। चर का मान प्राप्त करते हैं।

6) उत्तर की जाँच, प्रश्नों की शर्तें जाँच कर करें।

उदाहरण : दो संख्याओं का योगफल 40 है। उनमें पहली संख्या, दूसरी संख्या से 10 अधिक है। वे संख्याएँ कौन-कौन सी हैं?

यह एक पहेली की तरह है, जिसमें आपको दोनों संख्याओं का पता नहीं है और उन्हें ज्ञात करने की शर्तें दी गई हैं।

1) पहली संख्या, दूसरी संख्या से 10 अधिक है।

2) दोनों संख्याओं का योगफल 40 है।

हल: उपर्युक्त प्रकार से उदाहरण का हल प्राप्त करते हैं।

माना पहली संख्या $= x$

तथा दूसरी संख्या = पहली संख्या से 10 अधिक या

या = पहली संख्या + 10

$= (x + 10)$

प्रश्नानुसार,

दोनों संख्याओं का योगफल 40 है।

पहली संख्या + दूसरी संख्या = 40

तब, $x + (x + 10) = 40$

$2x + 10 = 40$ (10 का पक्षान्तर करें)

$2x = 40 - 10$

$2x = 30$

$x = \frac{30}{2}$

$x = 15$

अर्थात् पहली संख्या = 15 , दूसरी संख्या = पहली संख्या + 10

= 15 + 10 = 25

अर्थात् प्राप्त अपेक्षित संख्या 15 व 25 है। जो दोनों शर्तों को भी पूरा करती है।

15 + 25 = 40 , पहली संख्या + दूसरी संख्या = 40

इस विधि की उपयोगिता के लिए हम कुछ और उदाहरणों के बारे में चर्चा करते हैं।

उदाहरण : किसी संख्या का 4 से गुणा करने पर 20 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना वह अज्ञात संख्या x है। संख्या का 4 से गुणा अर्थात् $4x$

प्रश्नानुसार,

$4x = 20$

$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग देने)

$x = 5$

अतः, वह अज्ञात संख्या 5 है।

उदाहरण : विष्णु की आयु जगदीश की आयु से 12 वर्ष कम है। यदि दोनों भाईयों की आयु का योग 50 है, तो विष्णु और जगदीश की आयु कितने-कितने वर्ष की है ?

हल : माना जगदीश की आयु x वर्ष है।

तब, विष्णु की आयु $= x - 12$ वर्ष होगी।

प्रश्नानुसार,

दोनों भाईयों की आयु का योग 50 है।

तब,

$$x + (x - 12) = 50$$

$$x + x - 12 = 50$$

$$2x - 12 = 50 \quad \text{(–12 का पक्षान्तर करने पर)}$$

$$2x = 50 + 12$$

$$2x = 62 \quad \text{(दोनों पक्षों 2 से भाग देने पर)}$$

$$x = 31$$

अर्थात् जगदीश की आयु $= x$ वर्ष यानि 31 वर्ष है।

एवं विष्णु की आयु $= x - 12 = 31 - 12 = 19$ वर्ष है।

उदाहरण : यदि पवन और जितेन्द्र की आय का अनुपात 5 : 3 है। यदि उनकी आय का अन्तर 2000 हो तो, दोनों की आय ज्ञात करें।

हल : पवन और जितेन्द्र की आय का अनुपात 5 : 3 है।

अतः हम पवन की आय $5x$ और जितेन्द्र की आय $3x$ मान सकते हैं।

प्रश्नानुसार,

$$5x - 3x = 2000 \quad \text{(अन्तर अर्थात् घटाव)}$$

$$2x = 2000$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2000}{2} \quad \text{(दोनों पक्षों का 2 से भाग देने पर)}$$

$$x = 1000$$

अतः पवन की आय $= 5x = 5 \times 1000 = 5000$ रु.

तथा जितेन्द्र की आय $= 3x = 3 \times 1000 = 3000$ रु.

प्रश्नावली 2.2

1. दो संख्याओं का योग 60 है। यदि पहली संख्या, दूसरी संख्या से 20 अधिक है तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए?
2. यदि राम की आयु का दो गुणा में 10 अधिक कर देने पर 40 प्राप्त होता है, तो राम की आयु ज्ञात कीजिए?
3. किसी संख्या का 3 गुणा कर देने पर 21 प्राप्त होता है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए?
4. यदि उपवस्त्र व धोती की लम्बाई का अनुपात 5 : 4 है। यदि दोनों लम्बाई को जोड़ने पर 36 मीटर प्राप्त होता है तो उपवस्त्र व धोती की लम्बाई (मीटर में) ज्ञात करें?
5. आशिष और राहुल की ऊँचाई का अन्तर 40 से.मी. है। यदि दोनों की ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 हो तो दोनों की ऊँचाई कितने से.मी. है?
6. किसी संख्या के 4 गुणा में 10 अधिक करने पर संख्या 50 प्राप्त होती है तो वह अज्ञात संख्या ज्ञात करें?
7. उत्सव व आराध्य की आयु का योग 60 है। यदि उत्सव की आयु आराध्य की आयु से 10 अधिक है, तो उत्सव एवं आराध्य की आयु ज्ञात कीजिये?
8. तीन क्रमागत पूर्णाङ्कों का योग 51 है तो पूर्णाङ्क ज्ञात कीजिए।
9. किसी संख्या के दोगुणा में 8 जोड़ने पर 32 प्राप्त होता है, वह संख्या ज्ञात करें।

➢ हमने सीखा –

1) यदि समीकरण की चर की घात एक हो तो इसे **रैखिक समीकरण** कहते हैं।

जैसे : $3x + 2 = 8$

↑ चर

यहाँ चर राशि x की घात 1 है।

2) यदि रैखिक समीकरण में केवल एक ही चर हो, तो इसे **एक चर वाले रैखिक समीकरण** कहते हैं।

3) समीकरण में दो पक्ष होते हैं। इसमें संख्याओं एवं चरों को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षांतरित किया जा सकता है। पक्षान्तरित करने पर चिह्न परिवर्तित हो जाते हैं। $8x + 1 = 5x + 2$

$5x$ एवं 1 का पक्षान्तर करने पर-

$$8x - 5x = 2 - 1$$

$$3x = 1$$

4) रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोगों से हम गणितीय कथन बनाकर अज्ञात राशि के मान ज्ञात करते हैं।

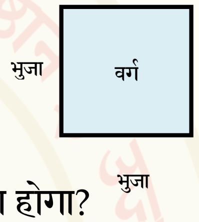
5) संख्याओं, आयु, परिमापों तथा मुद्रा के रूप में प्रयोग होने वाले सिक्के व नोटों पर आधारित अनेक प्रकार की समस्याएँ रैखिक समीकरणों का उपयोग कर हल की जा सकती है।

अध्याय 3

वर्ग एवं वर्गमूल

मेरे स्नेही बटुकों! आप पूर्व कक्षा में वर्ग की आकृति के बारे में अध्ययन कर चुके हो, वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें लम्बाई एवं चौड़ाई समान होती है। पूर्व कक्षा में परिमाप एवं क्षेत्रफल के अध्याय में आपने वर्ग का क्षेत्रफल निकालना सीखा है।

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा



जहाँ भुजा का अर्थ एक भुजा की लम्बाई होता है।

यदि वर्ग की एक भुजा 8 से.मी. है तो वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा?

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$= 8 \times 8 = 64$ से.मी.^{2}

निम्न सारणी को पूरा करें।

वर्ग की भुजा (से.मी.)	वर्ग का क्षेत्रफल (से.मी.^{2})
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
………	………………
………	………………
a	$a \times a = a^2$

क्या आप इसे पूरा कर

उपर्युक्त सारणी में संख्याएँ 4, 9, 16, 25 .... और इसी प्रकार दूसरी संख्याओं में क्या विशेषताएँ है?

चूँकि $4 = 2 \times 2 = 2^2$, $25 = 5 \times 5 = 5^2$ ...इत्यादि को उपर्युक्त रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं।

वर्ग -

लीलावती गणित में वर्ग करने की विधि निम्न श्लोक के प्रथम चरण में बताई गई है। **समद्विघातः कृतिः उच्यते इति प्रथमः प्रकारः ।**

(लीलावती,वर्गे करणसूत्रं वृत्तद्वयम्: 9 अ)

अर्थात्, जब किसी संख्या को स्वयं उसी से गुणा किया जाए तो उससे प्राप्त संख्या, उस संख्या का **वर्ग** कहलाती है। दूसरे शब्दों में समान दो अङ्कों का गुणनफल **वर्ग** कहलाता है।

उदाहरण : 3 का वर्ग ज्ञात करें?

हल : तब, $3 \times 3 = 9$

या निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$3^2 = 9$

↑

इसे हम 3 का वर्ग पढ़ते हैं।

उपर्युक्त में प्राकृत संख्या 9 को 3^2 (3 का वर्ग) से व्यक्त किया गया है। जहाँ 3 भी एक प्राकृत संख्या है। तब 9 एक वर्ग संख्या है।

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

यहाँ 3 का वर्ग 9 है।

व्यापक रूप में $A = B^2$ $(B \times B)$ है तो A की वर्ग संख्या B है।

क्या 17 वर्ग संख्या है?

निम्न संख्याओं और उनके वर्गों के बारे में विचार करते हुए, रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	………….....
7	………….....
8	………….....
9	………….....
10	………….....

उपर्युक्त सारणी में आप पाएंगे कि 1 से 100 के बीच की मात्र 10 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं, शेष संख्याएँ वर्ग संख्या नहीं है। संख्या 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 व 100 वर्ग संख्याएँ है तथा इन्हें **पूर्ण वर्ग संख्याएँ** भी कहते हैं।

❖ **करो और सीखो –**

दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए?

1) 10 से 20 .... 2) 30 से 40 ....

उदाहरण : 15 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : 15 का वर्ग

$15^2 = 15 \times 15 = 225$

अतः 15 का वर्ग 225 है।

उदाहरण : 12 के वर्ग का इकाई अङ्क क्या है?

हल : 12 का वर्ग

$12^2 = 12 \times 12 = 144$

अतः 12 के वर्ग का इकाई अङ्क 4 है।

लीलावती गणित में दिया गया उदाहरण प्रश्न:

सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य।

पञ्चोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चेद्वर्गविधानमार्गम्॥

हे मित्र यदि आप वर्ग करने की विधि जानते हो,तो - 9, 14 , 297 और 10005 का वर्ग बताओ?

हल: (विद्यार्थी स्वयं हल करें।)

वर्ग संख्याओं के बीच की संख्याएँ –

दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच कितनी संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं है।

$1^2 = 1$

$2^2 = \underline{2\ ,3}\ , 4$

$3^2 = \underline{5,6,7,8,}\ 9$

$4^2 = \underline{10, 11, 12, 13, 14, 15,}\ 16$

$5^2 = \underline{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24}, 25$

उपर्युक्त में 2^2 और 3^2 के बीच 5, 6, 7, 8 चार संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ नहीं है। इस प्रकार से 3^2एवं 4^2 के मध्य छ: संख्याएँ तथा 5^2 एवं 6^2 के मध्य आठ संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ नहीं है।

वे संख्याएं जो वर्ग संख्या नहीं है हम उन्हें रोचक विधि से भी ज्ञात कर सकते हैं।

- 1^2 और 2^2 के बीच संख्याएँ :
  $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ संख्याएँ
  अर्थात् अन्तर से एक कम = 3–1 = 2 संख्याएँ
- 2^2 और 3^2 के बीच संख्याएँ :
  $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ संख्याएँ
  अर्थात् अन्तर से एक कम 4 संख्याएँ
- 3^2 और 4^2 के बीच संख्याएँ :
  $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ संख्याएँ
  अर्थात् अन्तर से एक कम 6 संख्याएँ

- 4^2 और 5^2 के बीच संख्याएँ :

  $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ संख्याएँ

  अर्थात् अन्तर से एक कम 8 संख्याएँ

हम ध्यान पूर्वक देखेंगे तो पाएंगे दो वर्ग संख्याओं के अन्तर से एक कम है। वर्ग संख्या नहीं है।

अतः हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि प्राकृत संख्याएँ n और n+1 लेते हैं।

जब, $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 1 + 2n - n^2 = 2n + 1$

हम n^2 और $(n+1)^2$ के बीच संख्याएँ 2n पाते हैं। जो वर्ग संख्याओं के अन्तर से एक कम है।

- **करो और सीखो**

  5^2 और 6^2 के बीच कितनी संख्या है जो वर्ग संख्या नहीं है। (..........)

वर्ग संख्याओं के गुणधर्म –

वर्ग सारणी :-

नीचे 1 से 20 तक की संख्याओं की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है।

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	**11**	121
2	4	**12**	144
3	9	**13**	169
4	16	**14**	196

5	25	**15**	225
6	36	**16**	256
7	49	**17**	289
8	64	**18**	324
9	81	**19**	361
10	100	**20**	400

आप देखते हैं कि –

1) वर्ग के इकाई अङ्कों में (0, 1, 4 , 5, 6, 9) आता है। अतः यदि किसी संख्या में 2, 3, 7, 8 इकाई अङ्क आये तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है। आप आसानी से पूर्ण वर्ग संख्या पता कर सकते हैं।

2) सभी सम संख्याओं के वर्ग में सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग में विषम संख्या ही प्राप्त होते हैं।

3) यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 1 या 9 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अन्त में 1 आता है **उदाहरण** : 1, 9, 11, 19

अङ्क	वर्ग
1	1
9	81
11	121
19	361

4) यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 4 या 6 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अन्त में 6 आता है।

अङ्क	वर्ग
4	16
6	36
14	196
16	256

❖ **करो और सीखो –**

निम्न में कौन-कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग है चिह्नित (✓) करें।

अ) 16 ब) 17 स) 35 द) 49

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई अङ्क क्या हैं?

   अ) 4   ब) 13   स) 18   द) 11

2. नीचे दी गई संख्या के वर्ग ज्ञात करें?

   अ) 16   ब) 9   स) 35   द) 19

3. इकाई के अङ्कों को पहचान कर निम्न संख्याओं में पूर्ण वर्ग संख्या को चिह्नित करें।

   अ) 6400   ब) 2309   स) 342   द) 434

4. निम्नलिखित संख्याओं में से किस संख्या का वर्ग विषम संख्या होगा?

   अ) 431   ब) 2826   स) 7779   द) 82004

वर्गमूल – किसी संख्या का वर्गमूल वह संख्या होती है, जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो।

लीलावती गणित में वर्गमूल ज्ञात करने की एक अन्य विधि निम्न श्लोक में बताई गई है। अपने ज्ञान की वृद्धि हेतु निम्न श्लोक का अध्ययन कर सकते है।

त्यक्त्वाऽन्त्याद्विषमात्कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत्।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽऽप्तवर्गं फलं
पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥

(लीलावती, वर्गमूले करणसूत्रं वृत्तम् : 10)

उपर्युक्त श्लोक में किसी संख्या के वर्गमूल ज्ञात करने की रीति बताई गई है।

निम्न संख्या के वर्गों पर ध्यान दें।

$(4)^2 \quad = \quad 4 \times 4 \quad = \quad 16$

$(5)^2 \quad = \quad 5 \times 5 \quad = \quad 25$

$(3)^2 \quad = \quad 3 \times 3 \quad = \quad 9$

उपर्युक्त उदाहरण में देखते हैं कि

$(3)^2 \quad = \quad 3 \times 3 \quad = \quad 9$

यहाँ 3 का वर्ग 9 है। इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 9 का वर्गमूल 3 है।

$(3)^2 \quad = \quad 3 \times 3 \quad = \quad 9$

यहाँ 9 का वर्गमूल 3 है।

अर्थात् **वर्गमूल, वर्ग के प्रतिलोम सङ्क्रिया है।** वर्गमूल को "$\sqrt{\ }$" चिह्न (करणी चिह्न) द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण : 9 का वर्गमूल या $\sqrt{9} = 3$

❖ **करो और सीखो -**

वर्ग सारणी को देखकर निम्न का वर्गमूल क्या होगें?

अ) 49 ब) 121 स) 256

अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना –

निम्न सारणी में कुछ संख्याओं तथा उनके वर्गों के गुणनखण्ड दिए गए हैं।

संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड	वर्ग संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड
4	2×2	16	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
6	2×3	36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$
10	2×5	100	$2 \times 2 \times 5 \times 5$

आप देखते हैं कि संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड उस संख्या के वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड में दो बार आते हैं।

उदाहरण : 10 के अभाज्य गुणनखण्ड = 2×5

↓ 10 का वर्ग

100 के अभाज्य गुणनखण्ड = $2 \times 2 \times 5 \times 5$

2	**10**
5	**5**
	1

2	**100**
2	**50**
5	**25**
5	**5**
	1

10 का वर्ग

आइए, हम अभाज्य गुणनखण्ड विधि से वर्ग ज्ञात करना सीखते हैं।

उदाहरण : 64 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि 64 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$64 = \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2}$$

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

अभाज्य गुणनखण्डों के युग्म बनाने पर

$64 = (2^2 \times 2^2 \times 2^2)$ या $(2 \times 2 \times 2)^2$

या $\sqrt[2]{64} = 2 \times 2 \times 2$

$\sqrt[2]{64} = 8$

अतः 64 का वर्गमूल 8 है।

उदाहरण : क्या 125 पूर्ण वर्ग संख्या है?

हल : 125 के अभाज्य गुणनखण्ड

5	125
5	25
5	5
	1

$125 = \underbrace{5 \times 5} \times 5$

अभाज्य गुणनखण्ड में सभी युग्म में नहीं है।

अतः 125 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। 125 के अभाज्य गुणनखण्ड के युग्म बनाने पर हम देखते हैं कि केवल 5 एक संख्या है जिसका युग्म नहीं बन रहा है, अतः हमें युग्म को पूरा करने में 5 से गुणा करने की आवश्यकता है।

अतः $125 \times 5 = 625$

$625 = \underbrace{5 \times 5} \times \underbrace{5 \times 5}$

आप 125 को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए अपूर्ण युग्म संख्या से भाग देकर भी पूर्ण वर्ग संख्या बना सकते हैं।

$125 \div 5 = 25$

अतः $25 = 5 \times 5$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

या $25 = 5^2$

$\sqrt[2]{25} = 5$

उदाहरण : क्या 40 पूर्ण वर्ग संख्या है ?

हल : $40 = \underbrace{2 \times 2} \times 2 \times 5$

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

अभाज्य गुणनखण्ड में एक ही युग्म बना है। परन्तु अभाज्य गुणनखण्ड में 2 और 5 का युग्म नहीं है अतः 40 एक वर्ग संख्या नहीं है।

वैदिक वाङ्मय में वर्ग एवं वर्गमूल का चिन्तन :

प्रिय विद्यार्थियों ! वर्ग एवं वर्गमूल के क्रम यजुर्वेद के 18 वें अध्याय का 24 वाँ मन्त्र - 'एका च मे तिस्रश्च' में उद्धृत किया है जिससे वर्ग एवं वर्गमूल का भी क्रम बनता है । यजुर्वेद् मन्त्र का क्रम निम्न प्रकार है -

एका च मे तिस्रश्च मे तिस्रश्च मे पञ्च च मे पञ्च च मे सप्त च मे सप्त च मे नव च मे नव च म ऽ एकादश च म ऽ एकादश च मे त्रयोदश च मे त्रयोदश च मे पञ्चदश च मे पञ्चदश च मे सप्तदश च मे सप्तदश च मे नववश च मे नवदश च म एकवि ँ शतिश्च म ऽ एकवि ँ शतिश्च मे त्रयोवि ँ शतिश्च मे त्रयोवि ँ शतिश्च मे पञ्च वि ँ शतिश्च मे पञ्चवि ँ शतिश्च मे सप्त वि ँ शतिश्च मे सप्तवि ँ शतिश्च मे नववि ँ शतिश्च मे नववि ँ शतिश्च म ऽ एक त्रि ँ शच्च म ऽ एकत्रि ँ शच्च मे त्रयस्त्रि ँ शच्च मे यज्ञेन कल्पन्ताम् ॥

(यजुर्वेद 18 / 24)

अर्थात् एका च मे + तिस्रश्च मे : 1 + 3 = 4 । एक संख्या का वर्ग भी नहीं है । अतः एक न तो किसी का वर्ग है न किसी का वर्गमूल है । सब से छोटी वर्ग संख्या चार है और उसका वर्गमूल दो है । इन दोनों का सबसे प्रथम इससे बोध हुआ । यहीं से वर्गमूल का क्रम आरम्भ होता है और वर्ग बनते हैं । अत: एक कोष्ठक में एकपदी संख्याएँ क्रम लिख कर उनके सामने जो **दो संख्या का वर्ग आया उसमें मन्त्र में निर्दिष्ट संख्याओं का योग उत्तरोत्तर करने से अंकों के सामने उनके वर्ग बनते चले जाते हैं ।** उदाहरणार्थ दो संख्या का जो योग 1 + 3 = 4 प्रथम वर्ग का लिखा है । अब मन्त्र का दूसरा पद 'तिस्रश्च मे' है । प्रथम वर्ग में भी 'तिस्रश्च मे' पद था । जिससे 4 का योग प्राप्त हो गया था । अतः अब दूसरे तिस्रश्च में पूर्व का जो योग 4 का था वही लिया जाएगा और उसमें पञ्च च मे से 5 का योग करना होगा । अर्थात् 4 + 5 = 9 हुआ । यह अर्थ तीन संख्या के वर्ग का 'तिस्रश्च में' 'पञ्च च मे' इस मन्त्र से हुआ । इसी प्रकार संख्याओं की गणना एवं सम्बन्ध करना होगा । इसी क्रम को हम यहाँ स्पष्ट करके लिखते हैं ।

वर्गमूल की संख्या	मन्त्र से निर्माण का क्रम	गणितीय पक्ष	वर्ग संख्या
2	एका च मे तिस्रश्च मे +	4 = 3 + 1	4
3	पूर्व का योग पञ्च च मे +	9 = 5 + 4	9

4	पूर्व का योग सप्त च मे +	16 = 7 + 9	16
5	पूर्व का योग नव च +मे	25 = 9 + 16	25
6	पूर्व का योग एकादश च मे +	36 = 11 + 25	36
7	पूर्व का योग त्रयोदश च मे +	49 = 13 + 36	49
8	पूर्व का योग पञ्चदश च मे +	64 =15 + 49	64
9	पूर्व का योग सप्तदश च मे +	81 = 17+ 64	81
10	पूर्व का योग नवदश च मे +	100 = 19 +81	100
11	पूर्व का योग एक विंशतिश्च च मे +	121= 21 +100	121
12	पूर्व का योग त्रयोविंशतिश्च च मे+	144 = 23+121	144
13	पूर्व का योग पञ्चविंशतिश्च च मे +	169= 25 +144	169
14	पूर्व का योग सप्तविंशतिश्च च मे +	196 = 27+169	196
15	पूर्व का योग नवविंशतिश्च च +मे	225 = 29+169	225
16	पूर्व का योग एकत्रिंशाच्च मे+	256 =31+ 225	256
17	पूर्व का योग त्रयस्त्रिंशच्च च मे यज्ञेन + कल्पन्ताम्	289 = 33+256	289
18	....	324 = 35+289	324
19	....	361 = 37+324	361
20	....	400 = 39+361	400

विषमाङ्कों को क्रमशः पूर्व की संख्या के वर्ग योग में पुन: योग करने से वर्ग एवं वर्गमूल की सारणी बनती है । इस क्रम से मन्त्र द्वारा सभी संख्याओं का क्रमपूर्वक वर्ग ज्ञात होता है । यदि विषमाङ्कों को मन्त्र के निम्न प्रकार के पाठ से :--

तिस्रश्च मे	×	तिस्रश्च में	=	3	×	3	=	9
पञ्च च मे	×	पञ्च च मे	=	5	×	5	=	25
सप्त च मे	×	सप्त च मे	=	7	×	7	=	49
नव च मे	×	नव च मे	=	9	×	9	=	81
एकादश च मे	×	एकादश च मे	=	11	×	11	=	121
त्रयोदश च मे	×	त्रयोदश च मे	=	13	×	13	=	169
पञ्चदश च मे	×	पञ्चदश च मे	=	15	×	15	=	225
सप्तदश च मे	×	सप्तदश च मे	=	17	×	17	=	289
....		....		....				....

उपर्युक्त यजुर्वेद के मन्त्रानुसार 1 से 33 तक के विषमाङ्कों को परस्पर गुणन करने पर वर्ग प्राप्त होगा।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 8100 का वर्गमूल होगा -

(I) 900 (II) 90 (III) 9 (IV) सम्भव नहीं

(ब) $\sqrt{90000}$ का मान क्या है –

(I) 30 (II) 300 (III) 90 (IV) 81

(स) 900 का वर्गमूल होगा –

(I) 3 (II) 30 (III) 300 (IV) इनमें से कोई नहीं

(द) $\frac{256}{441}$ का वर्गमूल होगा-

(I) $\frac{21}{16}$ (II) $\frac{16}{21}$ (III) $\frac{13}{9}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

(प) 0.25 का वर्गमूल होगा -

(I) 5 (II) 5.0 (III) 0.5 (IV) 0.25

(फ) 196 का वर्गमूल होगा-

(I) 8 (II) 12 (III) 14 (IV) 18

(भ) 53^2 और 54^2 के बीच कितनी प्राकृत संख्या है -

(I) 106 (II) 108 (III) 107 (IV) 109

2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अङ्क क्या हो सकता है?

अ) 256 ब) 10000 स) 625 द) 289

3. निम्नलिखित संख्या में कौन-कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती हैं? (**सङ्केत :** इकाई के अङ्क को पहचानें)

अ) 441 ब) 257 स) 408 द) 102

4. निम्नलिखित संख्या में किस संख्या से गुणा किया जाए कि एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए?

अ) 90 ब) 60 स) 95

5. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

अ) 729 ब) 576 स) 900

हमने सीखा -

1) किसी संख्या का स्वयं उसी संख्या से गुणा किया जाए तो उससे प्राप्त संख्या **वर्ग** कहलाती है।

जैसे : 5 का वर्ग

या $5^2 = 5 \times 5 = 25$

यहाँ 5 का वर्ग 25 है।

अतः यदि एक प्राकृत संख्या $A = B^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। जहाँ B भी एक प्राकृत संख्या है तब A एक वर्ग संख्या है।

2) वे सभी वर्ग संख्याएँ जिनके अन्त में इकाई अङ्क के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6, 9 होते हैं।

3) किसी संख्या का **वर्गमूल** वह संख्या होती है, जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो। **वर्गमूल**, वर्ग का प्रतिलोम कहलाती है।

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

यहाँ 25 का वर्गमूल 5 है।

4) एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं।

धनात्मक वर्गमूल को सङ्केत ‘ $\sqrt{\ \ }$ ’ या करणी द्वारा व्यक्त किया जाता है।

जैसे : $4^2 = 16$

$\sqrt{16} = 4$ होता है।

5) दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के बीच अर्थात् n^2 और $(n+1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ होती हैं जो दो वर्ग संख्याओं $(n)^2$ और $(n+1)^2$ के अन्तर से 1 कम है जो वर्ग संख्याएँ नहीं है।

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

अन्तर से 1 कम $= 2n + 1 - 1$

$= 2n$

अध्याय 4

घन एवं घनमूल

प्रिय बटुकों! हमने घन शब्द का प्रयोग त्रिविमीय ठोस आकृतियों के अध्याय में किया था। हम जानते हैं वर्ग एक द्विविमीय आकृति है जिसकी ठोस या त्रिविमीय आकृति को **घन** कहते हैं।

क्या आप घन की ठोस आकृतियों के बारे में और कुछ जानते हैं?

आशीष – ठोस आकृतियों में लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई होती है।

बबिता – घन की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं या घन में लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई बराबर होती है।

गुरुजी – बहुत अच्छे! बिल्कुल सही।

आपने सही बताया घन एक ठोस आकृति है। जिसकी सभी भुजाएँ बराबर (समान) होती हैं। पिछले अध्याय में हमने चर्चा की है कि -जब किसी संख्या में स्वयं उसी संख्या से गुणा किया जाए, तो उससे प्राप्त संख्या, उस संख्या का **वर्ग** कहलाती है। इसी प्रकार,

घन -

लीलावती गणित में घन करने की विधि निम्न श्लोक के प्रथम चरण में बताई गई है ।

समत्रिघातश्च घन: प्रदिष्ट: इति प्रथम: प्रकार: ।

(लीलावती, घने करणसूत्रं वृत्तत्रयम् 11)

अर्थात् , जब किसी संख्या को स्वयं उसी से तीन बार गुणा किया जाए तो उससे प्राप्त संख्या, उस संख्या का **घन** कहलाती है। दूसरे शब्दों में समान तीन अङ्कों का गुणनफल **घन** कहलाता है।

आइए, उदाहरणों के माध्यम से घन ज्ञात करना सीखें।

उदाहरण : संख्या 2 का घन ज्ञात कीजिए।

हल : 2 का घन या 2^3

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

यहाँ 2 का घन 8 प्राप्त हुआ है।

सारणी 1 – नीचे दी गई सारणी पूर्ण करें।

संख्या	घन संख्या
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 =$ ....
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 =$ ....
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 =$ ....
7	$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$
8	$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$
9	$9^3 = 9 \times 9 \times 9 =$........
10	$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

हम जानते हैं

$3^2 = 9$ जहाँ $9 = 3 \times 3$

इस प्रकार, $3^3 = 27$ जहाँ $27 = 3 \times 3 \times 3$ होता है

सारणी में हम देखें तो पाएंगे कि सम संख्या के घन में सदैव सम संख्या एवं विषम संख्या के घन में सदैव विषम संख्या प्राप्त होती है।

सारणी 2 – इस सारणी में अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन नीचे दिए जा रहे हैं।

संख्या	घन संख्या
11	$11^3 = 1331$
12	$12^3 = 1728$
13	$13^3 = 2197$
14	$14^3 = 2744$
15	$15^3 = 3375$
16	$16^3 = 4096$
17	$17^3 = 4913$
18	$18^3 = 5832$
19	$19^3 = 6859$
20	$20^3 = 8000$

ऊपर दी गई सारणी को ध्यान से देखिए, किस-किस संख्या के घन में इकाई का वही अङ्क है जो मूल आधार संख्या में है। जहाँ आप पाएंगे कि जब किसी संख्या के अन्त के स्थान इकाई में 0, 1, 4, 5, 6, 9 तो घन संख्या के इकाई में वही अङ्क आता है।

❖ **करो और सीखो -**

नीचे दी गई संख्याओं की घन संख्याओं के इकाई का अङ्क बताइए?

अ) 35 ब) 44

उदाहरण : क्या 216 एक पूर्ण घन संख्या है? विचार कीजिए।

हल : 216 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$$216 = \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

आप यहाँ देखते हैं कि अभाज्य गुणनखण्ड में तीन-तीन समान संख्याओं का समूह बनाया जा सकता है। अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या है।

उदाहरण : क्या 432 एक पूर्ण घन संख्या है?

हल : अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

$$432 = 2 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}$$

यहाँ तीन समान संख्याओं के समूह बनाने के पश्चात् 2 शेष रह जाता है।

अतः 432 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित संख्याओं की घन संख्या ज्ञात कीजिए?

   अ) 12 ब) 17 स) 9 द) 13

2. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या पूर्ण घन नहीं है?

   अ) 100 ब) 243 स) 423 द) 512

घनमूल –

किसी संख्या का **घनमूल** वह संख्या है जिसे परस्पर तीन बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो।

लीलावती गणित में घनमूल ज्ञात करने की एक अन्य विधि निम्न श्लोक में बताई गई है। अपने ज्ञान की वृद्धि हेतु निम्न श्लोक का अध्ययन कर सकते हैं।

आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे पुनस्तथाऽन्त्याद् घनतो विशोध्य।
घनै पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजयेत् फलं तु॥
पङ्क्त्यां न्यसेत तत्कृतिमन्त्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं त्यजेत् तत्प्रथमात् फलस्य।
घनं तदाद्याद् घनमूलेवं पङ्क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च॥

(लीलावती, घनमूल करणसूत्रं वृत्तम् : 15)

उपर्युक्त श्लोक में किसी संख्या के घनमूल ज्ञात करने की रीति बताई गई है। जिस प्रकार पिछले अध्याय में वर्गमूल ज्ञात करना वर्ग की करने की विपरीत प्रक्रिया है। इसी प्रकार **घनमूल ज्ञात करना घन ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया है।**

हम जानते हैं -

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

यहाँ हम कहते हैं कि 8 का घनमूल 2 है।

इसे $\sqrt[3]{8} = 2$ से लिखा जाता है। अर्थात् **घनमूल, घन के प्रतिलोम सङ्क्रिया है।**

घनमूल को सङ्केत "$\sqrt[3]{\ }$" से दर्शाया जाता है।

निम्न सारणी को देखिए और विचार कीजिए।

संख्या का घन	घनमूल	संख्या का घन	घनमूल
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

किसी संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड विधि से घनमूल ज्ञात करना –

संख्या 3375 पर विचार करें, इसका घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात कीजिए।

5	3375
5	675
5	135
3	27
3	9
3	3
	1

$$3375 = \underbrace{3 \times 3 \times 3}\times\underbrace{5 \times 5 \times 5}$$

$$3375 = 3^3 \times 5^3$$

$$3375 = (3 \times 5)^3$$

$$3375 = 15^3$$

• किसी संख्या का विलोकनम् सूत्र से घनमूल ज्ञात करना

घनमूल ज्ञात करने की गुणनखण्ड विधि हम जानते हैं। यहाँ विलोकनम् उपसूत्र से 6 अङ्कों तक की पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना सीखेंगे।

सारणी को मुखाग्र याद कीजिये -

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संख्या का घन	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

घन संख्या की इकाई	घनमूल की इकाई
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9
0	0

स्पष्ट है कि 0, 1, 4, 5, 6, 9 संख्या की घनमूल की इकाई भी 0, 1, 4, 5, 6, 9 ही होती है एवं $\begin{matrix} 2 & \times & 2 \\ 8 & & 8 \end{matrix}$ तथा $\begin{matrix} 3 & \times & 3 \\ 7 & & 7 \end{matrix}$ की होती है।

उदाहरण : यदि दी गई संख्या 29791पूर्ण घन हो तो घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{29791} = 31$

कार्यविधि

1. संख्या में बायीं ओर से तीन-तीन अङ्कों के समूह बनाते हैं।

29	791
दायाँ पक्ष	बायाँ पक्ष

यहाँ दायें समूह में केवल दो अङ्क हैं। इसे भी एक समूह मानेंगे।

2. संख्या के अङ्कों में जितने समूह बनेंगे घनमूल में उतने अङ्क होंगे। अतः यहाँ घनमूल दो अङ्कों का प्राप्त होगा।

3. घनमूल की इकाई निश्चित करना - घन संख्या की इकाई 1 है अतः घनमूल की इकाई 1 होगा।

4. घनमूल की दहाई निश्चित करना- बायें समूह का निकटतम घनमूल की दहाई होगी। 29 का निकटतम घनमूल ज्ञात करने में हम देखते हैं कि -

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

5. $4^3 = 64, 29$ से अधिक है अतः उससे कम वाला अङ्क अर्थात् 3 दहाई होगा।

अतः 29791 का घनमूल 31 है।

उदाहरण : यदि दी गई संख्या 941192 का घनमूल विलोकनम् से ज्ञात कीजिये।

1. तीन-तीन अङ्कों के बायें से समूह बनायेंगे। दो समूह हैं अतः घनमूल में 2 अङ्क होंगे।

2. घनसंख्या की इकाई 2 है अतः घनमूल की इकाई 8 होगी।

3. बायें समूह 941 से घनमूल की दहाई निश्चित करेंगे।

$9^3 = 729$

$10^3 = 1000$

10^3, 941 से अधिक हो रहा है अतः 10 से कम अर्थात् 9 घनमूल की दहाई होगी अर्थात् $\sqrt[3]{941192} = 98$

❖ **करो और सीखो –**

1) 729 का घनमूल ज्ञात करें।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए ?

   अ) $\sqrt[3]{74088}$ ब) $\sqrt[3]{1728}$

   स) 8000 का घनमूल ज्ञात करें?

   द) 512 का घनमूल ज्ञात करें?

2. 64 का घनमूल ज्ञात करें तथा घनमूल का इकाई अङ्क बतायें?

3. 125 के घनमूल ज्ञात करें व घनमूल का इकाई का अङ्क बताइये?

4. विलोकनम् सूत्र से घनमूल ज्ञात कीजिए -

   (1) 3375   (2) 1728   (3) 1331   (4) 64000

   (1) 970299   (2) 68921   (3) 287496   (4) 2197

➢ **हमने सीखा –**

1) एक संख्या में स्वयं से ही तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या **घन** संख्या कहलाती है।

   उदाहरण : 1, 8, 27

   $$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

   यहाँ 3 का घन 27 है।

2) यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड तीन बार आता है तो यह संख्या एक **पूर्ण घन** कहलाती है।

3) किसी संख्या का **घनमूल** वह संख्या है जिसे परस्पर तीन बार गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त हो। घनमूल, घन ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया है।

उदाहरण : $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

यहाँ 27 का घनमूल 3 है।

4) सङ्केत "$\sqrt[3]{\ }$" घनमूल को व्यक्त करता है।

उदाहरण : $\sqrt[3]{27} = 3$ है।

अध्याय 5

घात एवं घाताङ्क

वेद भूषण तृतीय वर्ष के दो विद्यार्थी अभिषेक एवं अंकित आपस में प्रश्नोत्तर करते हैं। अभिषेक बताओ?

2011 की जनगणना में भारत की जनसंख्या कितनी थी?

अंकित : 121 करोड़ (लगभग)

अभिषेक पुन: प्रश्न करता है?

अभिषेक : सूर्य और पृथ्वी के मध्य कितनी दूरी है?

अंकित : लगभग 15 करोड़ कि.मी.।

अभिषेक : अब इनको संख्या के रूप में लिखकर बताओ?

अंकित : इस संख्या को लिखना कठिन है।

क्या इन संख्याओं को आसानी से लिखा या पढ़ा व समझा जा सकता है? हम ऐसी बड़ी संख्याओं को घात व घाताङ्क की सहायता से आसानी से लिख या पढ़ सकते हैं।

इस अध्याय में हम पूर्णाङ्क व परिमेय अङ्कों के आधार (घात) एवं घाताङ्क के बारे में अध्ययन करेंगे।

क्या आप संख्याओं को वर्ग व घन में लिखना जानते हैं ? आपको स्मरण होगा कि-

उदाहरण : 12 का घन लिखिए।

हल : 12^3

$12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$

↑

12 का घन

निम्न संख्याओं पर विचार कीजिए।

1) $2 \times 2 \times 2 = 8$

2) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

3) $4 \times 4 \times 4 = 64$

4) $5 \times 5 \times 5 = 125$

5) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

इन्हें आप इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

1) $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

2) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

3) $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

4) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

5) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

इसी प्रकार,

सौ (100) $= 10 \times 10 = 10^2$

एक हजार (1000) $= 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

एक लाख (100000) = 10 × 10 × 10 × 10 × 10 = 10^5

विशाल -

वाह ! क्या बात है। इसका मतलब 1 करोड़ को 10^7 लिखा जा सकता है। यह तो बहुत सरल है।

यहाँ 2^3 में आधार 2 एवं घाताङ्क 3 है। 5^3 में आधार 5 और घाताङ्क 3 है। 5^3 को हम 5 की घात 3 पढ़ते हैं।

अर्थात्

हम 10^7 को 10 की घात 7 पढ़ते हैं।

उदाहरण : 81 को घाताङ्क रूप में लिखिए।

हल : 81 = 3 × 3 × 3 × 3

अतः 81 = 3^4

यहाँ 3 आधार है व घाताङ्क 4 है। 3^4 को हम 3 की घात 4 पढ़ते हैं।

उदाहरण : निम्न को घाताङ्क के रूप में व्यक्त करें।

अ) 2 × 2 × 2 × 5 × 5

ब) 3 × 3 × 7 × 7 × 7 × 7

हल : अ) 2 × 2 × 2 × 5 × 5

= $2^3 \times 5^2$

हल : ब) $3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 3^2 \times 7^4$

उदाहरण : 2^3 और 3^2 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?

हल : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

आप जानते हैं $8 < 9$

अतः $2^3 < 3^2$

अर्थात् 2^3 व 3^2 में 3^2 बड़ी संख्या है।

उदाहरण : सरल कीजिए।

अ) 2×5^2 ब) $2^2 \times 5^2$

हल : अ) 2×5^2

$= 2 \times 5 \times 5$

$= 50$

हल : ब) $2^2 \times 5^2$

$= 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= 100$

ऋणात्मक पूर्णाङ्क की घाताङ्क -

अ) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

ब) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

स) $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

द) $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{16}{25}$

य) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-(2\times2\times2)}{3\times3\times3} = \frac{-8}{27}$

उपर्युक्त उदाहरणों को आप देखेंगे, तो पाएंगे कि किसी शून्येतर ऋणात्मक पूर्णाङ्क या परिमेय संख्या की घाताङ्क यदि सम संख्या है, तो सरल करने पर मान धनात्मक प्राप्त होता है तथा यदि घाताङ्क विषम संख्या है तो सरल करने पर मान ऋणात्मक प्राप्त होता है।

महर्षिसान्दीपनिराष्ट्रियवेदविद्याप्रतिष्ठानम्, उज्जयिनी
यत्र विश्वं भवत्येकनीडम्

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित को घाताङ्क रूप में लिखिए।

   1) $3 \times 3 \times 3 \times 3$

   2) $4 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2$

   3) $a \times a \times a \times a$

   4) $8 \times 8 \times t \times t \times t$

2. निम्नलिखित संख्या में बड़ी संख्या बताएँ।

   1) 2^5 या 5^2 2) 3^5 या 5^3

3. निम्न को सरल को करें।

   1) 2×3^2 2) $3^2 \times 2^2$

   3) $5^2 \times 2$ 4) $7^2 \times 2$

   5) 0×2^3 6) $5^2 \times 3^2$

4. मान ज्ञात कीजिए।

   1) $(-1)^5$ 2) $(-2)^3$

   3) $(-4)^2$ 4) $(-3)^6$

घाताङ्कों के नियम –

नियम 1 : एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणा

प्रथमसिद्धान्तो,

$अ^{म} \times अ^{न} = अ^{म+न}$ **म, न इत्यनयोः सर्वस्मिन् माने।**

(बीजगणितम्, प्रघातमापकगणितम् (क), पृ. 198)

उदाहरण : $2^5 \times 2^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $2^5 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^8 = 256$

$2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

ध्यान दीजिए यहाँ 2^5 एवं 2^3 में आधार अङ्क (2) समान है और घाताङ्कों 5 और 3 का योगफल 8 है।

उदाहरण : $a^2 \times a^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a$

$= a^6$

$a^2 \times a^4 = a^{2+4} = a^6$

यहाँ आधार समान है। हम जानते हैं आधार समान होने पर घाताङ्कों का योग होता है। हम व्यापक रूप से कह सकते हैं। एक शून्येतर संख्या a के लिए जहाँ m व n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}$

❖ **करो और सीखो –**

सरल कीजिए।

1) $3^4 \times 3^2$ 2) $7^7 \times 7^2$

नियम 2 : एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का भाग

उदाहरण : $3^5 \div 3^3$ को हल कीजिए।

हल : $3^5 \div 3^3 = \frac{3^5}{3^3} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3}$

$= 3 \times 3$

$= 3^2$

अतः,

$3^5 \div 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$

उदाहरण : $5^7 \div 5^4$ को ज्ञात करें।

हल : $5^7 \div 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5}$

$= 5 \times 5 \times 5$

$= 5^3$

अतः $5^7 \div 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

ध्यान दीजिए –

5^7 और 5^4 के आधार एक ही है और घाताङ्कों 7 एवं 4 का अन्तर 3 है। अत: हम कह सकते हैं कि एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं के भाग में घाताङ्क घटती है। हम व्यापक रूप से कह सकते हैं। एक शून्येतर संख्या a के लिए जहाँ m व n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, तो $\mathbf{a}^m \div \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m-n}$

नियम 3 : शून्य घाताङ्क वाली संख्या

अ^{0} $= \frac{\text{अ}^{\text{न}}}{\text{अ}^{\text{न}}} =$ **1 अतः कस्याप्यङ्कस्य शून्यघातः रूपसमोभवति।**

(बीजगणितम्, प्रघातमापकगणितम् (ख), पृ. 198)

किसी भी शून्येतर संख्या की घाताङ्क शून्य (0) होने पर उसका मान 1 होता है।

अर्थात् $\mathbf{a^0 = 1}$

उदाहरण : $3^5 \div 3^5$ को हल कीजिए।

हल : $3^5 \div 3^5 = \frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$

$= 3^{5-5} = 3^0$

अतः $3^0 = 1$

अतः किसी भी शून्येतर पूर्णाङ्क a के लिए $a^0 = 1$

नियम 4 : घातीय संख्या की घाताङ्क

किसी शून्येतर पूर्णाङ्क a के लिए $\mathbf{(a^m)^n = a^{m\times n} = a^{m.n}}$ होता है।

जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ है।

उदाहरण : $(7^2)^3$ को हल कीजिए।

हल : $(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2$

$= 7^{2+2+2} = 7^6$

या $(7^2)^3 = 7^{2\times3} = 7^6$

नियम 5 : अलग-अलग आधार परन्तु समान घाताङ्क वाली संख्याओं का गुणन

उदाहरण : $3^4 \times 2^4$ को हल कीजिए।

ध्यान दीजिए : यहाँ आधार अङ्क समान नहीं है परन्तु घाताङ्क समान है।

हल : $3^4 \times 2^4$

$= (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$= (3 \times 2)^4 \qquad = (6)^4$

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि यदि a व b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा n एक धन पूर्णाङ्क हो तो $\mathbf{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$

नियम 6 - अलग-अलग आधार किन्तु समान घाताङ्क वाली संख्याओं का भाग

उदाहरण : $5^4 \div 2^4$ को हल कीजिए।

हल : $5^4 \div 2^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^4$

अर्थात् $5^4 \div 2^4 = \frac{5^4}{2^4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$

तब निष्कर्ष निकलता है कि यदि a और b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा n एक धन पूर्णांक संख्या हो तब $\boldsymbol{a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$

नियम 7 - ऋणात्मक घाताङ्कों की घात किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए

$\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ जहाँ n एक धनात्मक परिमेय संख्या है a^{-n}, a^n का गुणात्मक प्रतिलोम है।

उदाहरण : 3^{-1} को हल कीजिए।

हल : $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (चूँकि $a^{-1} = \frac{1}{a}$)

इस प्रकार, $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न को घाताङ्कीय नियम से सरल कीजिए -

1) 10^{-3}

2) $5^4 \times 4^4$

3) $5^{10} \times 5^{15}$

4) $6^{15} \div 6^{10}$

प्रश्नावली 5.2

1. घाताङ्कों के नियमों का प्रयोग करते हुए सरल कीजिए और उत्तर को घाताङ्कीय रूप में लिखिए। (जब आधार समान हो।)

1)	$3^4 \times 3^5$	2)	$4^7 \times 4^2$	3)	$2^5 \times 2^{10}$
4)	$6^{12} \div 6^9$	5)	$a^b \div a^2$	6)	$2^{20} \div 2^{10}$
7)	$(7^4)^3$	8)	$(3^4)^2$	9)	$(4^5)^2$
10)	$(13)^0$	11)	$(13)^{0\times2}$	12)	$(-2)^0$

2. घाताङ्कों के नियमों का प्रयोग कर सरल करें और उत्तर को घाताङ्कीय के रूप में लिखिए। (जब आधार अलग अलग हो परन्तु घात समान हो।)

1)	$3^5 \times 4^5$	2)	$6^{10} \times 2^{10}$	3)	$4^2 \times 8^2$
4)	$2^5 \div 3^5$	5)	$3^4 \div 5^4$	6)	$2^7 \div 9^7$

3. ऋणात्मक घाताङ्कों के नियम का प्रयोग करते हुए सरल करें।

1)	3^{-4}	2)	2^{-2}	3)	5^{-1}	4)	8^{-3}

• बड़ी संख्याओं को घाताङ्कों में व्यक्त करना

वेद के निम्न मन्त्र में यशस्वी राजा पृथुश्रवा (पूर्व ऋचा) से प्राप्त वृहत (बड़ी से बड़ी) संख्याओं में पशुधन का विवरण दिया गया है।

षष्टिं सहस्राश्व्यस्यायुतासन मुष्ट्रानां विंशतिं शता।

दश श्यावीनां शता दश त्र्यरूपीणां दश गवां सहस्ता॥

(ऋग्वेद : 8/46/22)

अर्थात् ऋषि कहते हैं। मैंने साठ सहस्त्र तथा अयुत (दस सहस्त्र) अश्वों तथा बीस शत (दो सहस्त्र) ऊँटों को प्राप्त किया। श्याम वर्ण की दश शत (एक सदस्त्र) अश्विनियों तथा तीन स्थानों पर चिह्नित दस सहस्त्र गायें प्राप्त की। उपर्युक्त मन्त्र के अतिरिक्त **ऋग्वेद में 8/2/41 एवं 20/29/9 में** बड़ी से बड़ी संख्याओं के बारे में उल्लेख मिलता है।

आइए , निम्न को देखें एवं समझें -

$$75 = \frac{75}{10} \times 10 = 7.5 \times 10^1$$

$$750 = \frac{750}{100} \times 100 = 7.5 \times 10^2$$

$$7500 = \frac{7500}{1000} \times 1000 = 7.5 \times 10^3$$

यहाँ हमने 75, 750, 7500 को मानक रूप में व्यक्त किया है।

किसी संख्या को 1.0 या 1.0 से बड़ी या 10 से छोटी एक दशमलव संख्या और 10 के घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

- **किसी बड़ी से बड़ी संख्या को मानक रूप में लिखना –**

आइए,उदाहरणों द्वारा बड़ी से बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना सीखें-

$$6578 = 6.578 \times 1000 = 6.578 \times 10^3$$

$$31000 = 3.1 \times 10000 = 3.1 \times 10^4$$

$$300000 = 3 \times 100000 = 3 \times 10^5$$

$$2340000 = 2.34 \times 1000000 = 2.34 \times 10^6$$

इस प्रकार मानक रूप में,

- पृथ्वी का व्यास 127576000 मी. है। तब पृथ्वी के व्यास का मानक रूप में 1.27576×10^8 मी. है।
- पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 384000000 मी. है। तब मानक रूप 3.84×10^8 मी. है।

- **किसी छोटी से छोटी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना –**

आइए, उदाहरणों द्वारा छोटी से छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना सीखें। मानक रूप व्यक्त करें।

उदाहरण : मानक रूप व्यक्त करें- 0.0004

हल : $\frac{0.0004}{10000} = \frac{4}{10000} = \frac{4}{10^4}$

$= 4 \times 10^{-4}$

उदाहरण : लाल रक्त कणिकाओं का औसत व्यास 0.000007 मिमी

हल : तब मानक रूप में,

$0.000007 = \frac{7}{1000000}$

$= \frac{7}{10^6}$

$= 7 \times 10^{-6}$

> आपको स्मरण होगा $a^{-1} = \frac{1}{a}$
>
> या $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

उदाहरण : एक कागज की मोटाई 0.00016 है।

हल : तब मानक रूप में,

$0.00016 = \frac{16}{100000} = \frac{16}{10^5}$

$= 16 \times 10^{-5}$

या $\frac{1.6}{10000} = \frac{1.6}{10^4} = 1.6 \times 10^{-4}$

उदाहरण : निम्न मानक रूप को सामान्य संख्या में बदलिए।

1) 5.9×10^{-4} 2) 5.9×10^{4} 3) 2×10^{4}

4) 2.1×10^{-5} 5) 7×10^{-3}

हल : 1) $5.9 \times 10^{-4} = \frac{5.9}{10^4} = 0.00059$

2) $5.9 \times 10^{4} = \frac{5.9}{10} \times 10^4 = \frac{59 \times 10000}{100} = 59000$

3) $2 \times 10^{4} = 2 \times 10000 = 20000$

4) $2.1 \times 10^{-5} = \frac{2.1}{10^5} = 0.000021$

5) $7 \times 10^{-3} = \frac{7}{10^3} = 0.007$

❖ **करो और सीखो –**

निम्न को सामान्य संख्या में बदलिए।

1) 3×10^{-5} 2) 4.12×10^{5}

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 5^{-3} का मान होगा -

(I) 5 (II) 125 (III) $\frac{1}{125}$ (IV) इनमें से कोई नहीं

(ब) $(-7)^3$ का मान होगा-

(I) 243 (II) - 343 (III) - 49 (IV) 343

(स) यदि a=1 और b=2 तो $a^b + b^a$ का मान होगा -

(I) -1 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(द) यदि a=-1 और b=2 तो $a^b + b^a$ का मान होगा -

(I) $\frac{3}{2}$ (II)) $\frac{2}{3}$ (III)) $\frac{1}{2}$ (IV)) $\frac{-1}{2}$

(प) 0.00000015 का मानक रूप होगा-

(I) 0.5×10^{-6} (II)) 1.5×10^{-6}

(III) 0.5×10^{-7} (IV)) 1.5×10^{-7}

(फ) 0.00000065 का मानक रूप होगा-

(I) 65×10^{-6} (II)) 6.5×10^{-6}

(III) 6.5×10^{-5} (IV)) 65×10^{-5}

(भ) निम्न में से 7×10^{-3} का सामान्य रूप होगा-

(I)) 0.007 (II) 0.07 (III) 0.7 (IV) 7

(म) संख्या 1000 का मानक रूप होगा-

(I)) 1×10^{-1} (II) 1×10^{-2}

(III) 1×10^{-3} (IV) 1×10^{-4}

2. निम्नलिखित बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करें?

1) 700000 2) 2180000

3) 48000 4) 418000000

3. निम्नलिखित छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करें?

1) 0.00027 2) 0.00004

3) 0.0001 4) 0.0000418

4. निम्न मानक रूप को सामान्य संख्या में बद्लिए?

1) 2.4×10^{-4} 2) 3×10^{-3} 3) 7.1×10^{5}

4) 4.8×10^{3} 5) 2.46×10^{-5} 6) 1.3×10^{6}

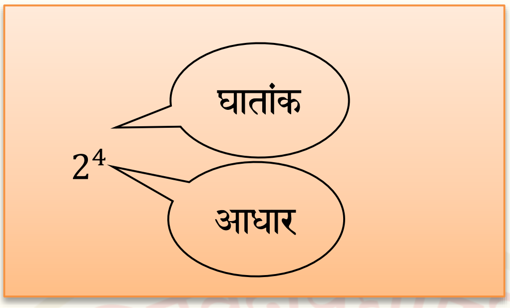
5. मानक रूप में व्यक्त करें?

अ) सूर्य का व्यास 14,00,00,000 मी. है।

ब) मानव के बालों की मोटाई का व्यास लगभग 0.0002 से.मी. होता है।

स) जीवाणु का माप 0.000005 मी. है।

- **हमने सीखा –**



हम 2^4 को 2 की घात 4 पढ़ते हैं।

1) बड़ी संख्याओं को सरल बनाने के लिए घाताङ्कों के प्रयोग से संख्या को पढ़ना व लिखना समझना आसान हो जाता है।

2) कुछ घाताङ्कीय रूप निम्नलिखित हैं।

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

यहाँ 10^3 में 10 आधार और घाताङ्क 3 है। इसे हम 10 की घात 3 पढ़ते हैं।

3) **घाताङ्कीय नियम** – किसी शून्येतर पूर्णाङ्क a और b तथा पूर्ण संख्याओं में m व n के लिए -

- **आधार समान एवं घाताङ्क अलग-अलग होने पर**

अ) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ब) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

स) $a^0 = 1$ द) $(a^m)^n = a^{mn}$

य) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (a^{-1}, a का गुणात्मक प्रतिलोम है)

- **आधार अलग-अलग एवं घाताङ्क समान होने पर -**

अ) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ ब) $a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n}$

- $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

- $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

4) वैज्ञानिक सङ्केतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिये 1.0 और 10.0 के बीच एक दशमलव संख्या (1.0 को सम्मिलित कर) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण :

- **बड़ी से बड़ी संख्या का मानक रूप**

अ) $48000000 = 4.8 \times 10^7$

ब) $3.1 \times 10^3 = \frac{31}{10} \times 1000 = 3100$

- **छोटी से छोटी संख्या का मानक रूप:**

अ) $0.000005 = \frac{5}{1000000} = \frac{5}{10^6} = 5 \times 10^{-6}$

ब) $2.3 \times 10^{-3} = 0.0023$

अध्याय 6

वैदिक गणित

वैदिक गणित के इस अध्याय में हम "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" सूत्र से दो एवं तीन अङ्कों की संख्या का गुणा करना, वर्ग एवं वर्गमूल के साथ-साथ भाग की पूर्व कक्षा में बताये गए सूत्रों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

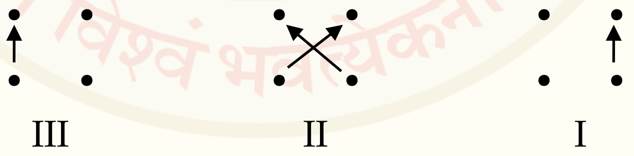
गुणन सङ्क्रिया – ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र

आइए, अब हम गुणा के एक ऐसे सामान्य सूत्र से आपका परिचय कराने वाले हैं। जिसकी मदद से आप कोई भी गुणा के सवालों को आसान तरीके हल कर सकते हैं।

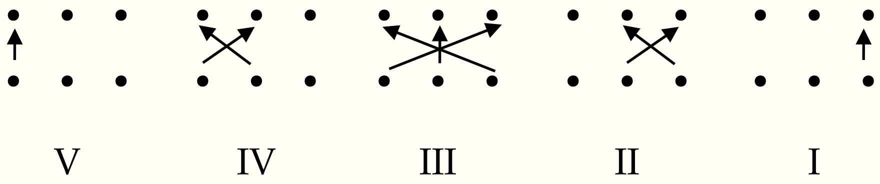
सूत्र का प्रथम शब्द 'ऊर्ध्व' का अर्थ ठीक ऊपर (ऊपर नीचे अङ्कों का गुणा) इसी प्रकार दूसरे शब्द 'तिर्यक' का अर्थ तिरछा (तिरछे लिखे अङ्कों का गुणा) है।

डॉटस्टिक विधि –

- दो अङ्कों वाली संख्या के गुणा –



- तीन अङ्कों की संख्याओं के गुणा –



उदाहरण : 32 और 15 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 – गुण्य 32 व गुणक 15 को निम्न तरह से लिखें।

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2 \\ \times\ 1\ \ 5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 – समूह बनना – दो अङ्कों का दो अङ्कों के गुणन में तीन समूह बनेंगे। जिसे III, II, I में दर्शाया गया है।

III	II	I
3	32	2
1	15	5

चरण 3 – गुणन क्रिया 3×1 / $3 \times 5 + 2 \times 1$ / 2×5

चरण 4 – गुणनफल 3 / 15 + 2 / 10

3 / 17 / 10

संख्या को क्रमवार लिखकर और एक बार में एक अङ्क लेकर उसे दायें से बायीं ओर जोड़ने से हमें परिणाम प्राप्त होता है।

3 / 17 / 10

+1 +1

= 480

अतः 32×15 का अभीष्ट गुणनफल = 480 प्राप्त होता है।

उदाहरण : 123 में 135 का गुणन ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से कीजिए।

हल : चरण 1 – 123 गुण्य व 135 गुणक को निम्न तरह लिखें।

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \times\,1\,3\,5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 – तीन अङ्कों का तीन अङ्कों के गुणन में पाँच समूह बनेंगे। जिसे निम्न रूप से दर्शाया V, IV, III, II एवं I है।

V	IV	III	II	I
1	12	123	23	3
1	13	135	35	5

चरण 3 – गुणनक्रिया व गुणनफल

गुणनक्रिया : $1{+}1/1{\times}3{+}1{\times}2/1{\times}5{+}2{\times}3{+}3{\times}1/2{\times}5{+}3{\times}3/3{\times}5$

गुणनफल : 1 / 3+2 / 5 + 6 + 3 / 10 + 9 / 15

योगक्रिया : 1 / 5 / 14 / 19 / 15

संख्या को क्रमवार लिखकर और फिर एक बार में एक-एक अङ्क को दायें से बायीं ओर जोड़ते जाने से हमें अन्तिम परिणाम प्राप्त होता है।

1 / 5 / 14 / 19 / 15

+1 +2 +1

= 1 6 6 0 5

अतः 123 × 135 का अभीष्ट गुणनफल 16605 है।

❖ **करो और सीखो –**

ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र के द्वारा गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1)
```
  2 3
× 3 1
─────

─────
```

2)
```
  1 2 5
× 2 0 1
───────

───────
```

निखिलम् (उपाधार) से गुणा –

यह आनुरूप्येण सूत्र से गुणा –

"निखिलम् " द्वारा किसी प्रश्न के बड़े विचलन प्राप्त हो जाते हैं। कि उनका गुणा कठिन हो जाता है जैसे 32 × 34 में यदि आधार 10 लेते हैं, तो इनका विचलन 22 व 24 का गुणा बड़ा हो जाता है। अतः निकटतम दहाई के आधार पर उपाधार का चयन करते हैं। जिससे उपाधार से विचलन छोटा प्राप्त होता है।

जैसे : 88 × 81 में उपाधार 8 × 10 = 80 लेते है एवं 32 × 27 में उपाधार 3 × 10 = 30 लेते है शेष विधि पूर्व की भाँति है।

उदाहरण : 32 × 33 का मान ज्ञात कीजिए।

चरण 1 : संख्या

```
  32 + 2
× 33 + 3
────────
     /
```

> **संकेत –**
>
> 1) आधार = 10, उपाधार = 3×10 = 30
>
> 2) उपाधार अंक = $\frac{\text{उपाधार}}{\text{आधार}} = \frac{30}{10} = 3$
>
> 3) उपाधार से विचलन = संख्या – आधार
>
> = 32–30 = +2/ = 33–30 = +3
>
> दाएँ पक्ष के विचलन का गुणा = 2 × 3 = 6

चरण 2 : हल दो खण्डों में होगा-

$$\begin{array}{r} 32 + 2 \\ \times\ 33 + 3 \\ \hline /\ 6 \end{array}$$

चरण 3 : बायें पक्ष में कोई एक संख्या और शेष संख्या का विचलन का योग करके उसे उपाधार अङ्क 3 से गुणा करेंगे।

$$\begin{array}{r} 32 + 2 \\ \times\ 33 + 3 \\ \hline 105\ / \ \ \end{array}$$

(जहाँ 32 + 3 = 35 या 33 + 2 = 35 एवं 3 × 35 = 105)

चरण 4 : चरण (1) व चरण (3) को समेकित व संक्रिया कर व्यवस्थित करना।

$$\begin{array}{r} 32 + 2 \\ \times\ 33 + 3 \\ \hline 105\ /\ 6 \end{array}$$ (तिरछी लाईन हटाने पर)

= 1056

अतः 32 × 33 अभीष्ट गुणनफल 1056 है।

उदाहरण : हल करें - 55 × 57

पूर्व उदाहरण के **चरण 4** का सीधा उपयोग करना।

हल :	संख्या	विचलन
	55	+ 5
	× 57	+ 7

5 × (55 + 7 या 57 + 5) / 5 × 7

5 × 62 / 35

310 / 35

= 3135

संकेत –

1) आधार = 10, उपाधार = 5×10 = 50

2) उपाधार अंक = 5

3) उपाधार से विचलन = +5 व +7

4) आधार 10 में शून्य से दाएँ पक्ष में एक अंक ही होगा।

5) दहाई का अंक बाएँ पक्ष में जोड़ने पर
= 310 + 3 = 313

उदाहरण : 66 × 67 को हल कीजिए।

हल :	संख्या	विचलन
	66	– 4
	× 67	– 3

7× (66 – 3) / (–3) × (–4)

7 × 63 / 12

441 / 12

= 4422

संकेत –

1) आधार = 10, उपाधार = 7×10 = 70

2) उपाधार अंक = 7

3) उपाधार से विचलन = –4 व –3

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए - 64×58

हल :

	संख्या	विचलन
	64	+ 4
×	58	– 2

6 × (64 – 2)/(– 2) × (+ 4)

6 × 62 / – 8

372 / – 8

371 + 1 / – 8

371 / 10 – 8

= 3712

> **संकेत –**
>
> 1) आधार = 10, उपाधार = 6×10 = 60
>
> 2) उपाधार अंक = 6
>
> 3) उपाधार से विचलन 64 = 64–60 = 4
>
> 58 = 58 – 60 = –2
>
> 4) आधार दाएँ पक्ष में विचलनों का गुणा
>
> = 4 × 2 = –8
>
> जो एक ऋणात्मक है अतः धनात्मक के लिए बाएँ पक्ष से 1 दर्शाए 10 को इकाई पक्ष में लेने पर 10 – 6 = 4 होगा।
>
> 5) अतः गुणनफल = 3712

❖ **करो और सीखो –**

आनुरूप्येण सूत्र द्वारा निम्न का गुणनफल ज्ञात करें।

1) 64 × 62 ______

2) 43 × 46 ______

3) 51 × 49 ______

प्रश्नावली 6.1

1. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का उपयोग कर गुणा कीजिए।

- दो अङ्कों का गुणा -

1) $\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 43 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 42 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 21 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

- तीन अङ्कों का गुणा -

4) $\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 301 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 401 \\ \times\ 104 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 312 \\ \times\ 121 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

2. आनुरूप्येण सूत्र के प्रयोग से गुणा कीजिए।

1) $\begin{array}{r} 66 \\ \times\ 63 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 32 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 73 \\ \hline \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 71 \\ \times\ 82 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

ध्वजाङ्क सूत्र –

यह अनुप्रयोग ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् एवं ध्वजाङ्क सूत्र पर आधारित है। इस विधि से भाग सङ्क्रिया का प्रत्येक प्रश्न बड़ी सरलता से किया जा सकता है। सङ्क्रिया प्रारम्भ करने से पूर्व प्रश्न लिखते समय निम्न बिन्दु ध्यान रखने योग्य हैं।

1) सर्वप्रथम भाजक को सुविधाजनक दो भागों में विभाजित करते हैं, भाजक के इकाई युक्त भाग का ध्वजाङ्क और शेष भाग को मुख्याङ्क अथवा संशोधित भाजक कहते हैं। ध्वजाङ्क में केवल इकाई अथवा इकाई युक्त कई अङ्क हो सकते हैं।

2) भाग सङ्क्रिया की पूर्व विधियों के समान इस विधि में निर्धारित स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करते हैं।

   अ) प्रथम खण्ड में भाजक के दोनों भाग लेंगे। मुख्याङ्क नीचे अर्थात् आधार स्थान पर तथा ध्वजाङ्क उसके ऊपर अर्थात् घाताङ्क के स्थान पर लिखेंगे।

   ब) ध्वजाङ्क में जितने अङ्क हो, भाज्य के उतने ही अन्तिम अङ्क (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा उसके शेष अङ्क मध्य खण्ड में लिखेंगे।

   स) ध्वजाङ्क विधि के लिए 524 ÷ 23 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

	प्रथम खण्ड	मध्यम खण्ड	तृतीय खण्ड
ध्वजाङ्क	3	5 2	4
मुख्याङ्क	2		
		भागफल	शेषफल

विधि –

1) मध्यखण्ड के लिए भाज्य के सबसे बायें अङ्क में मुख्याङ्क का भाग देने पर भाग का जो प्रथम अङ्क आता है उसे क्षैतिज रेखा के नीचे भागफल के निर्धारित स्थान पर लिखा जाता है।

2) प्राप्त शेषफल को बायें ओर से दूसरे अङ्क से पहले और नीचे लिखा जाता है। जो नया भाज्य बन जाता है।

3) नये भाज्य से निम्न सूत्र से संशोधित भाज्य प्राप्त होता है।

 संशोधित भाज्य = नया भाज्य – भागफल अङ्क × ध्वजाङ्क

4) संशोधित भाज्य में मुख्याङ्क का फिर भाग देने से पिछली क्रियाओं की पुनरावृत्ति होती है।

आइए, विधि को निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण : ध्वजाङ्क सूत्र का प्रयोग कर भागफल ज्ञात कीजिए –

$552 \div 23$

हल :

ध्वजाङ्क	3	5	5	2
मुख्याङ्क	2		1	1
		2	4	0

सङ्केत –

1) मध्यखण्ड के 5 में 2 का भाग दीजिए।

2) भागफल का प्रथम अङ्क 2, क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

3) शेषफल = 1 लिखा मध्य खण्ड के 5 से पहले और नया भाज्य = 15 प्राप्त हुआ।

4) संशोधित भाज्य = नया भाज्य – प्रथम भागफल × ध्वजाङ्क

= 15 – 2 × 3 = 9

5) 9 में मुख्याङ्क 2 का भाग दिया। भागफल का दूसरा अङ्क 4, क्षैतिज रेखा के नीचे लिखेंगे।

6) शेषफल = 1 तृतीय खण्ड के 2 से पहले और नया भाज्य = 12 मिलेगा।

7) संशोधित भाज्य = नया भाज्य – द्वितीय भागफल × ध्वजाङ्क

= 12 – 4 × 3 = 0

8) भागफल = 24 , शेषफल = 0

उदाहरण : ध्वजाङ्क विधि से 4096 में 64 का भाग देकर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

ध्वजाङ्क 4			
मुख्याङ्क 6	4 0 9	6	
	4	1	
	6 4	0	

सङ्केत –

1) भाज्य = 40 में 6 का भाग देने पर भागफल = 6 एवं शेषफल = 4 प्राप्त हुआ है।

2) संशोधित भाज्य = 49 – 6 × 4 = 25।

3) 25 में मुख्याङ्क 6 का भाग दिया। भागफल का दूसरा अङ्क 4 क्षैतिज रेखा में नीचे लिखेंगे।

4) शेषफल = 1 को तृतीय खण्ड 6 से पहले और नया भाज्य = 16 प्राप्त हुआ।

5) पुन: संशोधित भाज्य = $16 - 4 \times 4 = 0$

6) अतः भागफल = 64, शेषफल = 0

प्रश्नावली 6.2

1. ध्वजाङ्क सूत्र के उपयोग से भाग कीजिए।

1)	$1764 \div 42$	2)	$7396 \div 82$	3)	$992 \div 62$
4)	$945 \div 21$	5)	$6417 \div 24$	6)	$5004 \div 42$
7)	$459 \div 23$	8)	$4167 \div 42$	9)	$7008 \div 24$

पिछले अध्यायों में आपने वर्ग एवं वर्गमूल का अध्ययन किया है।

आइए, वैदिक विधि से किसी संख्या का वर्गमूल निकालना सीखते हैं।

आपको पूर्व अभ्यास के बारे में स्मरण होगा कि -

- यदि आप 2 का वर्ग ज्ञात करें तो आपको 4 मिलेगा और यदि आपने 4 का वर्गमूल निकाला तो 2 मिलेंगे।
- यदि आपने 3 का वर्ग ज्ञात करें तो आपको 9 मिलेगा और यदि 9 का वर्गमूल निकाला तो आपको 3 मिलेंगे।

अर्थात् $2^2 = 2 \times 2 = 4$ तथा $\sqrt[2]{4} = 2$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$ तथा $\sqrt[2]{9} = 3$

सामान्य तौर पर किसी संख्या का वर्गमूल ($\sqrt[2]{9} = 3$) निकालना अधिक कठिन कार्य काम समझा जाता है। जबकि वैदिक सूत्र (विलोकनम्) से अवलोकन की मदद मिलती है।

वर्गमूल ज्ञात करने की विधि –

1) सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं।

2) एक पूर्ण वर्ग का अन्त में चरमाङ्क (इकाई अङ्क) 0, 1, 4, 5, 6 और 9 से होता है।

3) यदि संख्या का अन्त 2, 3, 7 या 8 से होता है तो यह पूर्ण वर्ग नहीं है।

4) पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या सम होती है तथा शून्यों के पूर्व संख्या वर्ग संख्या हो।

5) जिस संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या विषम होती है, तो यह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।

6) चरमाङ्क अङ्क अर्थात् इकाई का अङ्क।

7) यदि संख्या पूर्ण वर्ग हो तो उसके वर्गमूल के अङ्कों की संख्या ज्ञात करेंगे।

8) वर्गमूल के इकाई के अङ्क का पता लगाएंगे।

सारणी - 1

संख्या का चरमाङ्क (इकाई अङ्क)	वर्गमूल का चरमाङ्क (इकाई अङ्क)
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

उपर्युक्त सारणी के अतिरिक्त हम एक अन्य सारणी को ध्यान से देखते हैं जिसकी सहायता से आप किसी संख्या का वर्गमूल कुछ ही क्षणों में ज्ञात कर सकते हैं।

सारणी - 2

संख्या	निकटतम वर्गमूल
1 – 3	1
4 – 8	2
9 – 15	3
16 – 24	4
25 – 35	5
36 – 48	6
49 – 63	7
64 – 80	8
81 – 99	9

सूत्र विलोकनम् से 3–4 अङ्कों की संख्या के सही वर्गमूल ज्ञात करने के नियम –

1) दायें ओर से शुरू करते हुए दो-दो अङ्कों का समूह बनाए।

2) संख्या के इकाई अङ्क को देखें और अपना उत्तर **सारणी** 1 से जाँचे जिससे आपको अपने उत्तर का इकाई अङ्क को तय करने में सहायता मिलेगी।

3) अब दूसरे समूह को देखें **सारणी** 2 को देकर अपने वर्गमूल के दहाई का अङ्क ज्ञात करें।

उदाहरण : 2116 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : दायें से दो-दो अङ्कों का समूह बनाए।

21 16

समूह 2 **समूह 1**

- यहाँ की इकाई का अङ्क 6 है तो वर्गमूल का अन्त 4 या 6 से होगा। (सारणी 1 देखें)
- अब दूसरे समूह को देखें चूँकि 16 < 21 < 25 तो दहाई का अङ्क 4 (सारणी 2 देखें)
- अब आपके पास दो विकल्प हैं $\sqrt[2]{2116} = 44$ या 46

हम जानते हैं $45^2 = 2025$ चूँकि 2116 > 2025 अतः अपेक्षित वर्गमूल 45 से अधिक होगा इसलिए

$$\sqrt[2]{2116} = 46$$

उदाहरण : 5184 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : दायें से दो-दो अङ्कों का समूह बनाएँ।

51 84

समूह 2 **समूह 1**

- पहले जोड़े को इकाई अङ्क 4 है तो वर्गमूल का अन्त (इकाई अङ्क) 2 या 8 होगा।
- अब दूसरे समूह को देखें चूँकि 49 < 51 < 64 तो दहाई का अङ्क 7 (सारणी 2 देखें)

- अब हमारे पास दो विकल्प हैं। $\sqrt[2]{5184} = 72$ या 78

हम जानते हैं $75^2 = 5625$ चूँकि $5184 < 5625$ अतः अपेक्षित वर्गमूल 75 से कम होगा इसलिए

$$\sqrt[2]{5184} = 72$$

उदाहरण : 9216 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 92 16

समूह 2 **समूह 1**

- पहले समूह का इकाई अङ्क 6 है तो वर्गमूल का अन्त (इकाई अङ्क) 4 या 6 होगा।
- अब दूसरे समूह को देखें चूँकि $81 < 92 < 100$ तो दहाई का अङ्क 9 (सारणी 2 देखें)
- अब हमारे पास दो विकल्प हैं $\sqrt[2]{9216} = 94$ या 96

हम जानते हैं $95^2 = 9025$ चूँकि $9216 > 9025$ अतः अपेक्षित वर्गमूल 95 से अधिक होगा इसलिए -

$$\sqrt[2]{9216} = 96$$

प्रश्नावली 6.3

1. सूत्र विलोकनम् से वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   1) $\sqrt[2]{169}$ 2) $\sqrt[2]{324}$ 3) $\sqrt[2]{2025}$

   4) $\sqrt[2]{1024}$ 5) $\sqrt[2]{9025}$ 6) $\sqrt[2]{400}$

➢ **हमने सीखा –**

1) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् शब्द् 'ऊर्ध्व' एवं 'तिर्यक' दो शब्दों से मिलकर बना है। ऊर्ध्व का अर्थ ठीक ऊपर या नीचे लिखे अङ्क एवं तिर्यक का अर्थ तिरछे-तिरछे अङ्कों का गुणनफल है।

2) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से गुणा करते समय संख्याओं का समूहीकरण करते हैं, दो अङ्क का दो अङ्क से गुणा करते समय तीन समूह एवं तीन अङ्क का तीन अङ्क से गुणा करते समय समूह पाँच बनते हैं।

3) आनुरूप्येण सूत्र से गुणा करना सीखा।

4) ध्वजाङ्क सूत्र से भागफल ज्ञात करने की सामान्य विधि का अध्ययन किया।

5) विलोकनम् सूत्र द्वारा 3 – 4 अङ्क वाली संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना सीखा।

अध्याय 7

चतुर्भुजों को समझना

प्रिय बटुकों! आपने ने पूर्व कक्षा में अलग-अलग प्रकार के आकृतियों का अध्ययन किया है। आपको वक्रों के बारे में भी स्मरण होगा। वक्र - घुमावदार आकार या आकृति वक्राकार कहलाती हैं।

यह खुली आकृति है।

यह सरल बन्द वक्र आकृति है। (वृत्त)

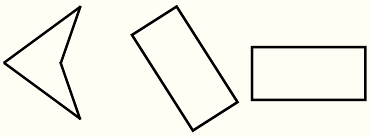
यह एक बन्द आकृति है।

यह एक बन्द वक्र आकृति है परन्तु सरल नहीं है।

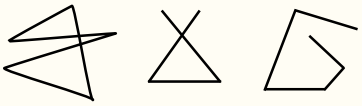
आपने मित्रों से भी इस प्रकार की अन्य आकृति बनाकर चर्चा करें।

बहुभुज –

बहुभुज संस्कृत के दो शब्दों से मिलकर बना है। यानि “बहु + भुज” से बना है, जिसमे “बहु” का अर्थ “अनेक” एवं “भुज” का अर्थ “भुजा” होता है केवल रेखाखण्डों से बना सरल बन्द वक्र **बहुभुज** कहलाता है।

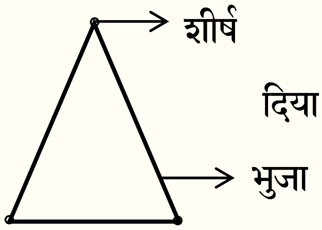


वक्र जो बहुभुज है।



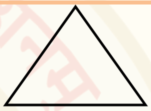
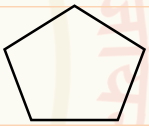
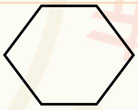
वक्र जो बहुभुज नहीं है।

एक बहुभुज की भुजाएँ एवं शीर्षों की पहचान –



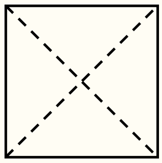
दिया गया बहुभुज 'त्रिभुज' है, जिसमें 3 भुजा एवं 3 शीर्ष हैं।

इस प्रकार से बहुभुजों का वर्गीकरण

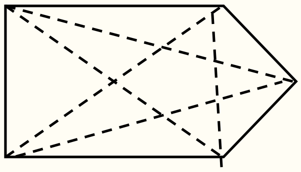
भुजा या शीर्षों की संख्या	वर्गीकरण	आकृति
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पञ्चभुज	
6	षट्भुज	
⋮	⋮	⋮
n	n - भुजा	

विकर्ण –

किसी बहुभुज का विकर्ण उसके किन्हीं दो शीर्षों (क्रमागत शीर्षों को छोड़कर) को मिलाने पर प्राप्त रेखाखण्ड होता है।



चतुर्भुज में 2 विकर्ण होते हैं।

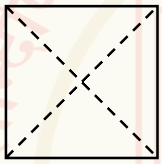


पञ्चभुज में .... विकर्ण होते हैं।

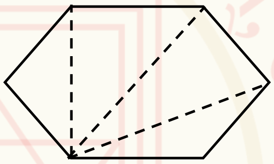
उत्तल और अवतल बहुभुज –

उत्तल बहुभुज –

ऐसा बहुभुज जिसमें सभी आन्तरिक कोण 180^0 से कम होते हैं या जिसका कोई भी विकर्ण बाह्य न हो। **उत्तल बहुभुज** कहलाता है।



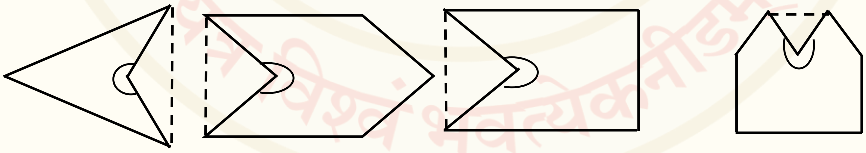
चतुर्भुज में 2 विकर्ण होते हैं।



षट्भुज में .... विकर्ण होते हैं।

अवतल बहुभुज –

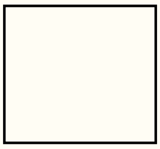
ऐसा बहुभुज जिसका एक या एक से अधिक आन्तरिक कोण 180^0 से बड़े (ज्यादा) होते हैं, या जिसका कोई भी विकर्ण बाह्य हो, **अवतल बहुभुज** कहलाता है।

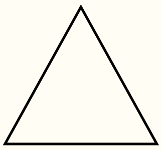


यहाँ दिया गया आन्तरिक कोण 180^0 से बड़ा है और यहाँ एक विकर्ण बाह्य है।

सम बहुभुज –

वह बहुभुज जिसमें समान भुजाएँ और समान कोण हों। **समबहुभुज** कहलाता है। **जैसे :** वर्ग समबाहु त्रिभुज





यहाँ 4 भुजाएँ व 4 कोण समान हैं।   यहाँ तीनों भुजाएँ व तीनों कोण समान हैं।

विषम बहुभुज –

वह बहुभुज जिसमें भुजा एवं कोण असमान हों। **विषम बहुभुज** कहलाता है।

जैसे :

यहाँ 4 कोण (90^0) समान हैं परन्तु भुजाएँ समान नहीं हैं। यह एक विषम बहुभुज है।

प्रश्नावली 7.1

1. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें।

   1) बहुभुज...............................से बना सरल बन्द वक्र होता है।

   (रेखा / रेखाखण्ड)

   2) पाँच भुजाओं से बने बहुभुज..........................कहलाता है।

   (चतुर्भुज / पञ्चभुज)

   3) ऐसा बहुभुज जिसके सभी कोण व भुजा समान हो .... कहलाता है।

   (समबहुभुज / विषम बहुभुज)

   4) किसी बहुभुज के शीर्षों को जोड़ने (क्रमागत शीर्षों को छोड़कर) वाले रेखाखण्ड...................कहलाता है। (विकर्ण / त्रिभुज)

   5) ऐसा बहुभुज जिसमें विकर्ण बाह्य हो.................कहलाता है।

   (उत्तल / अवतल)

   6) ऐसा बहुभुज जिसका प्रत्येक आन्तरिक कोण 180^0 से छोटा हो और सभी विकर्ण आन्तरिक हों .... बहुभुज कहलाता है।

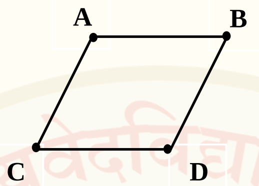
   (उत्तल / अवतल)

2. बहुभुज के नाम बताइये जिसमें निम्न भुजा दी हो।

   अ) 4 भुजा   ब) 6 भुजा   स) 8 भुजा

चतुर्भुज –

चार भुजाओं से घिरी बन्द आकृति को **चतुर्भुज** कहते हैं। चतुर्भुज एक बहुभुज है। जिसमें चार किनारे (भुजा) एवं चार शीर्ष (कोने) होते हैं।



यहाँ चित्र में AB, BC, CD एवं DA चार भुजाएँ है।

जिससे चतुर्भुज ABCD निर्माण हुआ है।

चतुर्भुज की विशेषता है –

1) प्रत्येक चतुर्भुज में चार भुजाएँ होती हैं।

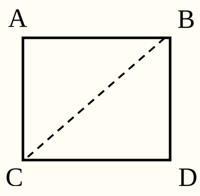
2) प्रत्येक चतुर्भुज में चार कोण होते हैं।

3) प्रत्येक चतुर्भुज में चार शीर्ष होते हैं।

4) प्रत्येक चतुर्भुज में चारों अन्त कोणों का योग 360^0 होता है।

चतुर्भुज का कोण योग गुण :

आइये, एक चतुर्भुज के योग गुण को समझते हैं। चतुर्भुज के चारों कोणों का योग $360°$ होता ही इसकी जाँच चतुर्भुज विकर्ण के द्वारा करते हैं। चतुर्भुज का एक विकर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।



उपर्युक्त चतुर्भुज ABCD में BD विकर्ण है। तब आप देखते हैं कि विकर्ण BD के खींचने पर दो त्रिभुजाकार (ΔABD, ΔBCD) बनते हैं। हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है। दोनों त्रिभुज के कोणों का योग करते हैं-

$\Delta ABD + \Delta BCD = 180^0 + 180^0 = 360^\circ$

$\angle ABD + \angle ADB + \angle A + \angle BDC + \angle DBC + \angle C = 360^0$

$\angle A + \angle ABD + \angle DBC + \angle C + \angle ADB + \angle BDC = 360^0$

जहाँ $\angle ABD + \angle DBC = \angle B$

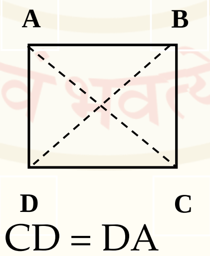
$\angle ADB + \angle BDC = \angle D$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

अर्थात, चतुर्भुज के चारों कोरों का योग 360^0 होता है।

चतुर्भुज के प्रकार –

1) **वर्ग** – ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ एवं चारों कोण समान हो (समकर्ण हो), तो यह चतुर्भुज **वर्ग** कहलाता है।



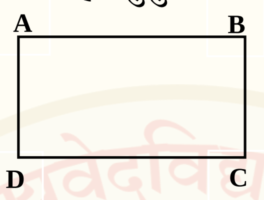
यहाँ चारों भुजा AB = BC = CD = DA

चारों कोण $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

वर्ग के विकर्ण परस्पर लम्ब समद्विभाजक होते हैं।

यहाँ विकर्ण AC और BD है।

2) **आयत –** ऐसा चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाएँ बराबर (समान) हो एवं चारों कोण 90^0 (अंश) हो तो यह चतुर्भुज आयत कहलाता है।



यहाँ सम्मुख भुजाएँ AB = DC एवं CB = DA

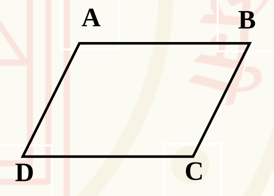
चारों कोण $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

3) **समान्तर चतुर्भुज –** ऐसा चतुर्भुज जिसमे सम्मुख भुजाएँ समान एवं समान्तर हो तथा सम्मुख कोण समान (बराबर) हो तो यह चतुर्भुज **समान्तर चतुर्भुज** कहलाता है। समान्तर भुजाओं को ` ॥ ' चिह्न द्वारा दर्शाया जाता हैं।

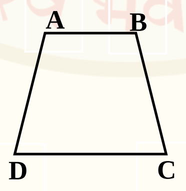
यहाँ सम्मुख भुजाएँ

AD ॥ BC एवं AB ॥ DC

सम्मुख कोण $\angle A = \angle C$ एवं $\angle B = \angle D$



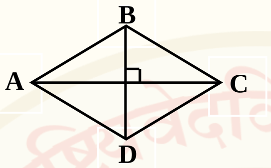
4) **समलम्ब चतुर्भुज –** ऐसा चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म (जोड़ा) समान्तर हो, तो वह चतुर्भुज **समलम्ब चतुर्भुज** कहलाता है।



यहाँ सम्मुख भुजाएँ

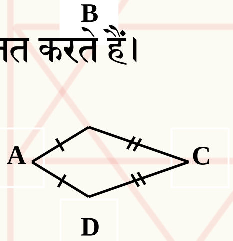
AB | | DC

5) **समचतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज जिसमें चारों भुजाएँ समान होती हैं और दोनों विकर्ण एक-दूसरे को 90^0 अंश पर समद्विभाजित करते हैं साथ ही विकर्ण अतुल्य होते है। तब वह **समचतुर्भुज** कहलाता है।



यहाँ विकर्ण AC और BD एक दूसरे को 90^0 यह समद्विभाजित करते हैं।

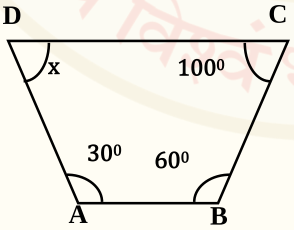
6) **पतंग** – ऐसा चतुर्भुज जिसमें अलग-अलग आसन्न भुजाओं के दो युग्म होते हैं जिनकी लम्बाई समान होती है। पतंग कहलाता है। तथा विकर्ण एक-दूसरे को 90^0 समद्विभाजित करते हैं।



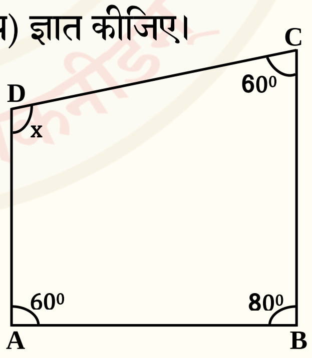
आइए , चतुर्भुज में कोणों पर आधारित सवालों का हल करना सीखें।

1) निम्नाङ्कित आकृतियों में x का (कोण की माप) ज्ञात कीजिए।

(अ)



(ब)



हल : (अ) आकृति में,

हम जानते हैं, चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = 360^0 है।

तब, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$30^0 + 60^0 + 100^0 + x = 360^0$

या $190^0 + x = 360^0$

या $x = 360^0 - 190^0 = 170^0$

$x = 170^0$

हल : (ब) दिया है, आकृति में $\angle A = 60^0$ दिया है।

हम जानते हैं, चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 है।

तब, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$60^0 + 80^0 + 60^0 + x = 360^0$

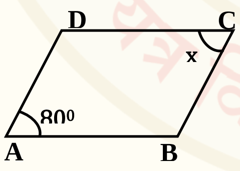
या $200^0 + x = 360^0$

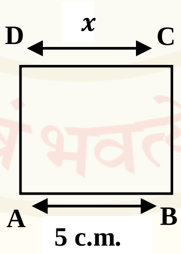
या $x = 360^0 - 200^0 = 160^0$

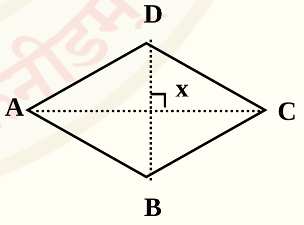
$x = 160^0$

उदाहरण : दी गई चतुर्भुज की आकृतियों को पहचान कर परिभाषा या गुण का प्रयोग मान ज्ञात कीजिए -

अ) ब) (स)







हल : अ) दी गई आकृति (अ) एक समान्तर चतुर्भुज है।

ज्ञात करना है – x (कोण x^0 का मान)

तब हम जानते हैं, **समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं** अतः -

$\angle A = \angle C$

$80^0 = x$

अतः आकृति (अ) में x का मान 80^0 है।

हल : ब) दी गई आकृति (ब) एक वर्गाकार है।

दिया है – जहाँ AB = 5 से.मी.

ज्ञात करना है - DC = ? (भुजा DC का माप)

तब हम जानते हैं, वर्ग की सभी भुजाएँ समान होती हैं। अतः,

DC = 5 से.मी.

अतः, आकृति (ब) में भुजा DC = 5 से.मी. है।

हल: स) दी गई आकृति (स) एक समचतुर्भुज की आकृति है।

ज्ञात करना है - $x =$ (कोण x का मान)

तब हम जानते हैं, **समचतुर्भुज में विकर्ण एक दूसरों को 90^0 पर समद्विभाजित करते हैं।** अतः,

$\angle x = 90^0$

अतः, आकृति (स) में कोण $x = 90^0$ है।

प्रश्नावली 7.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) एक समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो ....कहलाता है-

(I) आयत (II) समचतुर्भुज

(III) समलम्ब चतुर्भुज (IV) पतंग

(ब) वह समान्त चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ समान हो एवं विकर्ण एक-दूसरे से लम्ब समद्विभाजक होते है-

(I) वर्ग (II) समलम्ब चतुर्भुज

(III) समचतुर्भुज (IV) आयत

(स) जिस चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समान्तर हो................ चतुर्भुज कहलाता है-

(I) समचतुर्भुज (II) समान्तर

(III) समलम्ब (IV) आयत

(द) चतुर्भुज के चारों अन्त:कोणों की मापों का योगफल कितना होता है-

(I) 360^0 (II) 540^0 (III) 180^0 (IV) 90^0

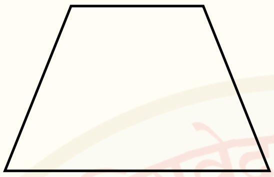
(य) पञ्चभुज में विकर्णों द्वारा कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं।

(I) 3 (II) 4 (III) 2 (IV) 1

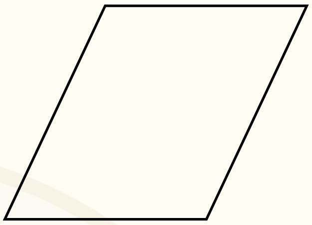
2. निम्नांकित चतुर्भुज की आकृति को पहचानें -

(वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज, पतंग, समचतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज)

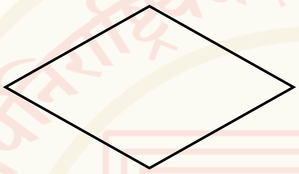
क)



ख)

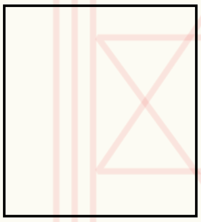


ग)

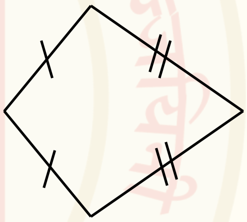


घ)

ङ)

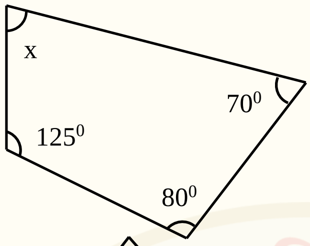


च)

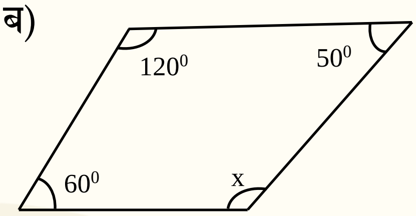


3. निम्न चतुर्भुज कि आकृति को पहचान कर अज्ञात कोणों (x) का मान ज्ञात कीजिए।

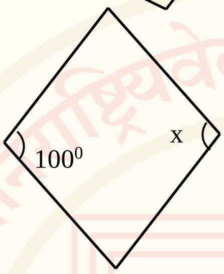
अ)



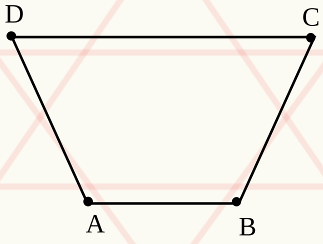
ब)



स)



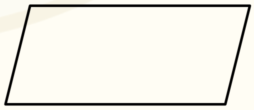
द)



4. दी गई निम्न आकृति क्या समान्तर चतुर्भुज की है ? यदि नहीं तो कारण बताइये।

1.

2.



5. सत्य है या असत्य बताइये।

अ) सभी वर्ग, आयत होते हैं।

ब) आयत की सभी भुजाएँ बराबर होती है।

स) समचतुर्भुज की आकृति पतंग के समान होती है।

द) सभी समान्तर चतुर्भुज, वर्ग होते हैं।

6. समान्तर चतुर्भुज एवं समलम्ब चतुर्भुज में अन्तर बताइये।

➢ **हमने सीखा –**

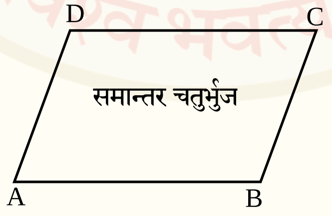
1) **बहुभुज** – रेखाखण्डों से बनी सरल बन्द आकृति **बहुभुज** कहलाती है। जैसे – त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज आदि

2) **बहुभुज के प्रकार** – उत्तल बहुभुज, अवतल बहुभुज, सम बहुभुज, विषम बहुभुज

3) **चतुर्भुज** – चार भुजाओं से घिरी हुई बन्द आकृति चतुर्भुज कहलाती है। एक चतुर्भुज की भुजाओं व कोणों की प्रकृति के आधार पर विशेष नाम दिए है।

चतुर्भुज व गुण –

1) **समान्तर चतुर्भुज** – एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म समान एवं समान्तर होता है।

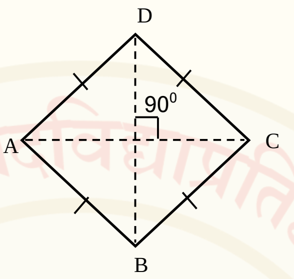


गुण – अ) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

ब) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

स) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

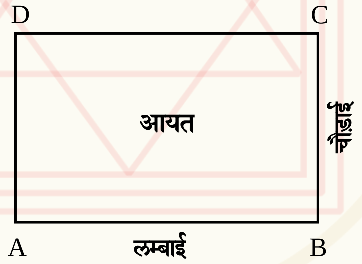
2) **समचतुर्भुज** – एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान माप की होती हैं।



गुण – अ) समान्तर चतुर्भुज की सभी गुण होते हैं।

ब) विकर्ण एक दूसरे को 90^0 पर समद्विभाजित करते हैं।

3) **आयत** – एक समान्तर चतुर्भुज जिसमें प्रत्येक कोण समकोण है।

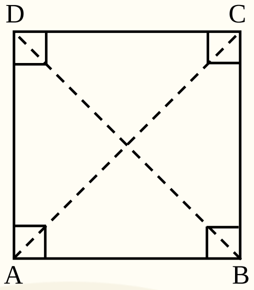


गुण – अ) समान्तर चतुर्भुज के सभी गुण

ब) प्रत्येक कोण समकोण 90^0 होता है।

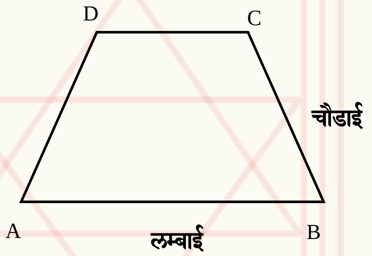
स) विकर्ण बराबर माप के होते हैं।

4) **वर्ग** – एक आयत जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।



गुण – समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा आयत के सभी गुण होते हैं।

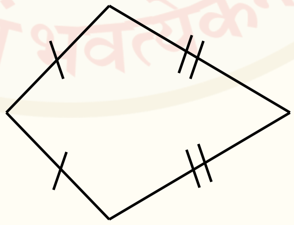
5) **समलम्ब चतुर्भुज** – इस चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का कम से कम एक युग्म (जोड़ा) समान्तर होता है।



यहाँ सम्मुख भुजाएँ AB ∥ DC

6) **पतंग** – एक चतुर्भुज जिसमें दो आसन्न भुजाओं का युग्म बराबर होते हैं।

अ) विकर्ण एक दूसरे को 90° पर विभाजित करते हैं।



अध्याय 8

बीजीय व्यंजक एवं सर्वसमिकाएँ

प्रिय बटुकों ! हमने सरल समीकरण के अध्यायों में चर एवं अचर राशि के बारे में चर्चा की थी, जहाँ हमनें समझा था कि ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित हो **चर राशि** कहलाती है। हम चर राशि व्यक्त करने के लिए अक्षरों a, b, x, y ... इत्यादि का प्रयोग करते हैं। इसके दूसरी और अचर राशि जिसका मान परिवर्तित न हो **अचर राशि** है इसके उदाहरणों में 4, –10, 100 इत्यादि हैं। आप सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। आपने पहेलियों और समस्याओं का समाधान करने में गणितीय कथन बीजीय व्यंजक के रूप में लिखा है। $x + 2$, $3x + 4$, $x + 5$ इत्यादि।

इस अध्याय में हम विस्तार से बीजीय व्यंजकों एवं सर्वसमिका का अध्ययन करेंगे।

बीजीय व्यंजक –

हम चर और अचर राशि को संयोजित कर बीजीय व्यंजक बनाते हैं। इसके लिए हम योग, व्यवकलन (घटाव), गुणा और विभाजन की सङ्क्रियाओं का प्रयोग करते हैं। हम $\boldsymbol{x + 5}$, $\boldsymbol{2x + 1}$, $\boldsymbol{3x - 2}$ जैसे व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं।

व्यंजक $x + 5$ में 'चर' x में 5 जोड़कर प्राप्त किया जाता है व्यंजक $2x + 1$ में चर x में 2 का गुणा करके फिर इस गुणनफल में अचर 1 को जोड़कर प्राप्त किया। इस प्रकार से $3x - 2$ व्यंजक में चर x का 3 गुणे में अचर (–2) को जोड़कर प्राप्त किया जाता है। $3x + (-2) = 3x - 2$

नोट : बीजीय व्यंजक में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती हैं।

बीजीय व्यंजक के पद –

एक बीजीय पद में एक से अधिक भी कई चर $(l, m, n, x, y, z \; \ldots\ldots)$ एवं अचर राशि होती है किसी भी बीजीय व्यंजक के छोटे-छोटे भाग होते हैं।

जैसे : $5x + 4$ पर विचार करते हैं।

इसमें पहले हम 5 व x का गुणा कर $5x$ बनाते है और इसमें 4 जोड़ते हैं। इसी प्रकार, $3y^2 + 2z$ हम 3 में, y और y का गुणा करके $3y^2$ बनाते हैं। फिर अलग से 2 व z का गुणा करके 2z बनाया $3y^2$ व 2z को बनाने के बाद हमने जोड़ दिया इस प्रकार $3y^2 + 2z$ बनता है।

व्यंजक के छोटे-छोटे भाग जो पहले अलग से बनाये जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं उसे **बीजीय व्यंजक के पद** कहलाते हैं।

जैसे : $4xy$, $3y^2 + 2z$, $3yz + 2x$

जिस व्यंजक में केवल एक पद होता है। उसे **एकपद** कहते हैं। दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** कहलाता है एवं तीन पदों वाला व्यंजक **त्रिपद** कहलाता है। इस प्रकार से बहुपद में पदों की संख्या एक या एक से अधिक कुछ भी हो सकती है। बहुपद के विषय में हम आगे की कक्षा में चर्चा करेंगे।

एकपद के उदाहरण : $3y^2, 3xy$, $4x$, $5xyz$, $5y^2z$

द्विपद के उदाहरण : $3x + y, 3xy + 2z$, $3y^2 + 4z, 3y^2 - z^2$

त्रिपद के उदाहरण : $a + b + c$, $3a + 3x + z, a + y + b, x^2 + y + z$

बीजीय पद के गुणनखण्ड –

बीजीय व्यंजक का एक पद कई चरों व अचरों का गुणनफल हो सकता है। एक व्यंजक के तथा पदों के गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं।

जैसे : $3y^2 + 2xz$

पद	चर	अचर
$\mathbf{3y^2, 2xz}$	x, y, z	$3, 2$

$3y^2 \quad + \quad 2xz$

$= \quad 3 \times y \times y + 2 \times x \times z$

इसी प्रकार $10x^2y$ के गुणनखण्ड $= 2 \times 5 \times x \times y$

❖ **करो और सीखो -**

व्यंजक	पदों की संख्या	पद	पद के गुणनखण्ड	चर	अचर
$\mathbf{2x + 3z}$	2	$2x, 3z$	$2x = 2 \times x$ $3z = 3 \times z$	x, z	2,3
$\mathbf{a + 3b + c}$					
$\mathbf{2x^2 + t^2}$					

गुणांक –

किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणनखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है। गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

जैसे : $3xy$ में xy का गुणांक = 3

$3xy$ में $3x$ का गुणांक = y

$3xy$ में 3 का गुणांक = xy

$10x^2y$ में x^2 का गुणांक = $10y$

उदाहरण : निम्नलिखित व्यंजकों में y का गुणांक क्या है ?

हल : $3x - 4y$, $3x + y + z$, $2x^2y + z$

व्यंजक	गुणनखण्ड वाला पद	गुणांक
$\mathbf{3x - 4y}$	$-4y$	$-y$
$\mathbf{3x + y + z}$	y	1
$\mathbf{2x^2y + z}$	$2x^2y$	$2x^2$

❖ **करो और सीखो –**

निम्नलिखित व्यंजक $3x^2y^3 + 4xy + 15$ में गुणांक का सही मिलान कीजिए।

1) x^2y^3 का गुणांक : 4

2) $3x^2$ का गुणांक : x

3) xy का गुणांक : 3

4) $4y$ का गुणांक : y^3

समान और असमान पद –

जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हों तो वे पद **समान पद** कहलाते हैं। इसके विपरीत जब बीच गुणनखण्ड भिन्न भिन्न हो तो वे पद **असमान पद** कहलाते हैं।

आइये, उदाहरण से समझते हैं।

$2xy$, $7x$, $12x$, $5x^2$, $-3x$, $9y^2$, $-4xy$, $-4x^2$

इनमें समान पद इस प्रकार हैं।

1) $7x$, $12x$ व $-3x$

2) $5x^2$ व $-4x^2$

3) $2xy$ व $4xy$

इसके विपरीत $4xy$ और $9y^2$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखण्ड हैं, वे असमान पद हैं। इस प्रकार $12x$ व $-4x^2$ भी असमान पद है।

❖ **करो और सीखो -**

समान पदों का सही-मिलान कीजिए।

1.	a^2b	:	$15a^2bc$
2.	a^2bc	:	$-3a/b$
3.	$\frac{2a}{b}$	:	$4a^2b$

बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन –

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में बीजीय पदों के योग एवं व्यवकलन ज्ञात करने के सम्बन्ध में निम्न श्लोक मिलता है।

अव्यक्त वर्ग घनवर्ग वर्ग पञ्चगत षड्गतादीनाम ।

तुल्यानां सङ्कलितव्यवकलिते पृथगतुल्यानाम्॥

(ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त , कुट्टकाध्याय :41)

उपर्युक्त श्लोक में बताया गया है कि अव्यक्तों के वर्ग, घन, वर्गवर्ग, पञ्चधात षड्घात, आदि समान जातियों (समान पदों) का योग और व्यवकलन (अन्तर)होता है।

"योगोऽन्तरं तेषु समान जात्यो र्विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च "

(बीजगणितम् ,अव्यक्तसङ्कलनव्यवकलने सूत्रम् ,7)

उपर्युक्त बीजगणितम् के श्लोक में भारकायचार्य के अनुसार योग और अन्तर समान पदों में होता है। बीजीय व्यंजकों समान पदों को योग (या व्यवकलन) एक अन्य समान पद होता है। जिनका गुणांक, समान पदों के गुणांकों के योग (या व्यवकलन) के बराबर होता है और जो पद समान नहीं है उन्हें छोड़ दिया जाता है।

योग -

उदाहरण : $8xy$ और $3xy$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $8xy + 3xy = (8+3)\,xy = 11xy$

उदाहरण : $11ab$ में से $6ab$ को घटाइए।

हल : $11ab - 6ab = (11-6)\,ab$

$= 5ab$

उदाहरण : $3x + 4y$ में $x + 2y$ को योगफल ज्ञात करें।

हल : $(3x + 4y) + (x + 2y)$

समान पद को व्यवस्थित करने पर-

$= \quad (3x + x) + (4y + 2y)$

$= \quad 4x + 6y$

उदाहरण : $8x + 4y + z$ में $3y + 2z$ को जोड़िये।

हल : $(8x + 4y + z) + (3y + 2z)$

समान पदों को व्यवस्थित करने पर -

$= \quad 8x + 4y + 3y + z + 2z$

$= \quad 8x + 7y + 3z$

वैकल्पिक रूप से :

$$\begin{array}{rrrrrr} & 8x & + & 4y & + & z \\ + & & & 3y & + & 2z \\ \hline & 8x & + & 7y & + & 3z \\ \hline \end{array}$$

व्यवकलन -

उदाहरण : $8x + 5a$ में से $3x + 2a$ को घटाइये।

हल : $8x + 5a - (3x + 2a)$

$= \quad 8x + 5a - 3x - 2a$

समान पदों को व्यवस्थित करने पर

$= \quad 8x - 3x + 5a - 2a$

$= \quad 5x + 3a$

उदाहरण : $3a + b - 3c$ में से $2a - c$ को घटाइये।

हल : $3a + b - 3c - (2a - c)$

$= \quad 3a + b - 3c - 2a + c$

समान पदों को व्यवस्थित करने पर

$$= 3a - 2a + b - 3c + c$$

$$= a + b - 2c$$

➢ **ध्यान दीजिए –**

बीजीय पदों के चिह्नों पर उसी प्रकार कार्य किया जाता है जैसे कि संख्याओं के चिह्नों के साथ किया जाता है।

आइये , निम्न उदाहरणों को ध्यान से देखें एवं समझे।

उदाहरण : $-(-7) = +7$

$-(-2a) = 2a$

$-(5 - x) = -5 + x$

$-(a - b) = -a + b$

बीजीय पदों के गुणन –

ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में बीजीय पदों के गुणनफल ज्ञात करने के सम्बन्ध में निम्न श्लोक मिलता है।

सदृशद्विवधो वर्गस्त्र्यादिवधस्तद् गतोऽन्यजातिवधः।

अन्योऽन्यवर्णघातो भावितकः पूर्ववच्छेषम्॥

(ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त ,कुट्टकाध्याय, 42)

अर्थात् , समान दो अव्यक्त राशि का गुणन उस राशि का वर्ग होता है। तीन समान अव्यक्तकों का गुणन घन होता है।समान चार अव्यक्त राशि का गुणन वर्ग वर्ग (चतुर्घात) होता है। विभिन्न राशि होने पर वहीं पद रखा जाता है ।

$$\boldsymbol{x \times x = x^2} \qquad \boldsymbol{x \times x \times y = x^2 y}$$

$$\boldsymbol{x \times x \times x = x^3} \qquad \boldsymbol{x \times y \times y \times z = xy^2 z}$$

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त के अतिरिक्त बीजगणितम्(अव्यक्तादि गुणने करणसूत्रे, 8) में अव्यक्त राशि के गुणन के बारे में बताया है।

उदाहरण : $3xy$ और $2y$ का गुणा कीजिए।

हल : $(3xy) \times (2y)$

$= \quad 3 \times 2 \times x \times y \times y$

$= \quad 6xy^2$

उदाहरण : $(x + y)$ का $(2x + 3y)$ से गुणा कीजिए।

हल : $(x + y)(2x + 3y)$

$= \quad x(2x + 3y) + y(2x + 3y)$

$= \quad (x \times 2x) + (x \times 3y) + (y \times 2x) + (y \times 3y)$

$= \quad 2x^2 + 3xy + 2xy + 3y^2$

(दो समान पदों को एकत्रित (जोड़) कर दिया जाता है)

$= \quad 2x^2 + (3xy + 2xy) + 3y^2$

$= \quad 2x^2 + 5xy + 3y^2$

❖ **करो और सीखो –**

गुणा करें।

1) $(xy) \times 4xy$ 2) $(2x + y) \times (a + b)$

3) $(x^2y)xz$ 4) $(3x + y)(5x)$

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) $8xy$ बीजीय व्यंजक है-

(I) एकपदी (II) द्विपदी (III) त्रिपदी (IV) कोई नहीं

(ब) $2x^2 - x + 1$ बीजीय व्यंजक है-

(I) एकपदी (II) द्विपदी (III) त्रिपदी (IV) कोई नहीं

(स) $x = 2$ रखने पर व्यंजक $x^2 - 2$ का मान होगा-

(I) 2 (II) 4 (III) 8 (IV) 10

(द) $\frac{x}{2}$ व्यांजक का संख्यात्मक गुणांक होगा-

I) x (II) 1 (III) 7 (IV) y

(प) $8m^2+3n^2+1$ में से $3m^2 - n^2 - 4$ घटाने पर प्राप्त होाग-

(I) $5m^2+2n^2+5$ (II) $5m^2+4n^2+5$

(III) $5m^2+2n^2+3$ (IV) $5m^2 - 2n^2 - 3$

2. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को एकपदी, द्विपद एवं त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

$4x^2$, $3a + b$, $3t^2$, $4x + z$, $a + b + c$, $2c + a + x$,
$P + 3x$, $9x - 2z$, $2z^2y^2$, $9x - y + 2$, $10x^2y^2z$,
$4x - 12y^2z$, $4x + 3a^2b + c$

3. दिए गए पदों में गुणांक बताइये ?

1) $10x^2y^2z$ में z का 2) $9xy^2z$ में xy^2 का

3) $-\frac{8}{7}y^2z$ में y^2 का
4) $5xy$ में y का
5) $3xy + 4z$ में $3x$ का
6) $4x + 3yz$ में $3y$ का
7) $-4x^2y + z$ में x^2 का

4. निम्नलिखित में समान पदों को सही-मिलान कीजिए।

1) $7a^2b$: $15x^2y^2z^2$
2) $5x^2y^2z^2$: $5nm$
3) $\frac{3p}{q}$: $\frac{-7p}{q}$
4) $2nm$: $-11a^2b$
5) $8xyz$: $\frac{4a^2}{b^2}$
6) $\frac{2a^2}{3b^2}$: $2xyz$

5. निम्न बीजीय व्यंजकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

1) $(x + 2y)$ और $(3x + y)$
2) $8a^2t$ और $12a^2t$
3) $(7y + 8z)$ और $(y - 2z)$
4) $8pq$ और $7qp$
5) $(x + 3a^2b)$ और $(x + y + 2a^2b)$

6. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को घटाइये। (व्यवकलन)

1) $11a^2bc$ में से $3a^2bc$
2) $7pq^2$ में से $-3pq^2$
3) $3x + 3y$ में से $x + y$
4) $3x + 4y$ में से $x + y$

7. निम्नलिखित युग्मों के प्रत्येक व्यंजक का गुणन कीजिए।

1) $8xy , 2x$
2) $(4x + y) , 5x$
3) $10x , (3x + 2)$
4) $(3x + y), (x + y)$

5) $(a + b), (a + 2b)$ 6) $-4x, 2x$

सर्वसमिकाएँ –

सर्वसमिका एक ऐसी समिका है, जो चरों के प्रत्येक मानों के लिए सत्य होती है।

मानक सर्वसमिकाएँ –

लीलावती गणित में निम्न श्लोक के प्रथम चरण किसी संख्या के वर्ग करने की सामान्य विधि से सर्वसमिका 1 एवं 2 बनती है ।

खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा।

(लीलावती गणित,वर्गे करणसूत्रं वृत्तद्वयम् , 9 (स))

अर्थात् जिस संख्या का वर्ग ज्ञात करना हो उसके दो खण्ड करें, उन खण्डों के गुणनफल के द्विगुणित को उन खण्डों के वर्ग-योग के साथ जोड़ने से सम्पूर्ण संख्या का वर्ग प्राप्त होता है।इससे प्राप्त सर्वसमिका को गणित की भाषा में निम्न रूप से लिखते हैं।

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \pm 2\mathbf{ab}$$

आइये, **सर्वसमिका 1 एवं 2** को बनाने का अभ्यास करें।

$$x \times x = x^2$$

इस प्रकार,

$$(a+b) \times (a+b) = (a+b)^2$$

सर्वप्रथम $(a+b)\ (a+b)$ का गुणनफल अथवा $(a+b)^2$ के बारे चर्चा करते हैं ।

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\ (a+b)\\ &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\end{aligned}$$

$= \quad a^2 + 2ab + b^2$ (क्योंकि ab = ba)

अतः $\quad (\boldsymbol{a+b})^2 \quad = \quad \boldsymbol{a^2 + b^2 + 2ab}$ **(प्रथम सर्वसमिका)**

इसके बाद $(a-b)\,(a-b)$ में गुणनफल अथवा $(a-b)^2$ के बारे में चर्चा करते हैं।

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

अतः $\quad (\boldsymbol{a-b})^2 \quad = \quad \boldsymbol{a^2 + b^2 - 2ab}$ **(द्वितीय सर्वसमिका)**

लीलावती गणित के निम्न श्लोक से **सर्वसमिका** 3 के बनने का सन्दर्भ मिलता है ।

तयोर्योगान्तराहतिः॥3॥

वर्गान्तरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता।

(लीलावती गणित, तज्ज्ञानाय करणसूत्रं,पृ.174)

अर्थात् दो राशियों के अन्तर वर्ग में उन्हीं दो राशियों के द्विगुणित घात जोड़ देने से उन दोनों राशियों का वर्गयोग होता है और दो राशियों के योगान्तर घात उन राशियों का वर्गान्तर के बराबर होता है।इस प्रकार सर्वत्र बुद्धि मानों को जानना चाहिये।

आइये, $(a+b)\,(a-b)$ के गुणनफल विचार करें।

$$(a+b)\,(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

अतः $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$ **(तृतीय सर्वसमिका)**

उपर्युक्त तीनों सर्वसमिका में गुणन के द्वारा बायाँ एवं दायाँ पक्ष प्राप्त किया गया है। आप सत्यापित कर सकते हैं और किसी भी मान के लिए सर्वसमिका के दोनों पक्षों में मान समान है।

सर्वसमिका का उपयोग –

द्विपद व्यंजकों के गुणा और संख्याओं के गुणन में सर्वसमिका का उपयोग करने से गुणा सरल हो जाता है।

उदाहरण : सर्वसमिका 1 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{ab}]$ की सहायता से हल करें।

1) $(2x+y)^2$ 2) $(102)^2$

हल 1 : $(2x+y)^2$

हम जानते हैं -

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{ab}$$

$$a = 2x \ , \ b = y$$

$$(2x + y)^2 = (2x)^2 + y^2 + 2 \times 2x \times y$$

$$= 4x^2 + y^2 + 4xy$$

हल 2 : $(102)^2 = (100 + 2)^2$

हम जानते हैं

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{ab}$$

$(100 + 2)^2 \quad = \quad 100^2 + 2^2 + 2 \times 100 \times 2$

$= \quad 10000 + 4 + 400$

$= \quad 10404$

उदाहरण : सर्वसमिका 2 $[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}]$ के उपयोग से हल करें।

1) $(4x - 3y)^2$ 2) $(98)^2$

हल 1 : $(4x - 3y)^2$

हम जानते हैं -

$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}$

$a = 4x\,,\ b = 3y$

$(4x - 3y)^2 = (4x)^2 + (3y)^2 - 2 \times 4x \times 3y$

$= 16x^2 + 9y^2 - 24xy$

हल 2 : $(98)^2 = (100 - 2)^2$

$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}$

$= 10000 + 4 - 400$

$= 10004 - 400$

$= 9604$

उदाहरण : सर्वसमिका 3 $[(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2]$ के उपयोग से हल करें।

1) $(3x - 4y)\,(3x + 4y)$ 2) $16x^2 - 25y^2$

हल 1 : $(3x - 4y)\ (3x + 4y)$

हम जानते हैं -

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

$a = 3x$, $b = 4y$

$$(3x - 4y)\ (3x + 4y) = (3x)^2 - (4y)^2$$

$$= 9x^2 - 16y^2$$

हल 2 : $16x^2 - 25y^2$

हम जानते हैं

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

$$16x^2 - 25y^2 = (4x)^2 - (5y)^2$$

$a = 4x,$ $b = 5y$

$$= (4x + 5y)\ (4x - 5y)$$

❖ **करो और सीखो।**

उचित सर्वसमिका का उपयोग कर सरल करें।

1) $(3x + y)\ (3x + y)$ या $(3x + y)^2$

2) $(4x - 2)^2$

3) $(3a - b)(3a - b) = (3a - b)^2$

4) $x^2 - y^2$

5) $(5x + 2)\ (5x - 2)$

प्रश्नावली 8.2

1. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए गुणनफल ज्ञात कीजिए।

सर्वसमिका 1 : $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ के प्रयोग से

1) $(x+4)(x+4)$ 2) $(3x+2)(3x+2)$

सर्वसमिका 2 : $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ के प्रयोग से

3) $(3x-4)(3x-4)$ 4) $(4x-y)(4x-y)$

सर्वसमिका 3 : $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ के प्रयोग से

5) $(2x+4)(2x-4)$ 6) $(3y+2)(3y-2)$

2. सर्वसमिका का उपयोग करते हुए वर्गों को ज्ञात कीजिए।

1) $(2+y)^2$ 2) $(P+4)^2$ 3) $(2x+3y)^2$

4) $(2x-y)^2$ 5) $(2p-3)^2$ 6) $(y-3x)^2$

7) 102×98 8) $(104)^2$ 9) $(99)^2$

3. 107×93 का मान ज्ञात करें।

➢ **हमने सीखा –**

1) बीजीय व्यंजक चरों एवं दूसरों से बनाते है। व्यंजकों को बनाने के लिए चरों और अचरों पर $+$, $-$, $\times$, $\div$ की सङ्क्रियाएँ करते हैं।

जैसे : (1) $2x+1$ (2) $4xy$

2) व्यंजक पदों से मिलकर बनते हैं पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है।

3) चरों के गुणनखण्ड को **बीजीय गुणनखण्ड** कहते हैं।

4) पद का गुणांक उसका संख्यात्मक गुणनखण्ड होता है या कभी-कभी पद का कोई भी एक गुणनखण्ड पद के शेष भाग का **गुणांक** कहलाता है।

जैसे : $10xy$ में xy का गुणनखण्ड = 10

$10xy$ में x का गुणनखण्ड = 10y

5) एक पद वाला बीजीय व्यंजक एकपद , दो पद वाला व्यंजक द्विपद, तीन पद वाला व्यंजक त्रिपदीय (त्रिपद) कहलाता है।

जैसे :

एकपद	:	$4xy,\ a^2b$
द्विपद	:	$(x+y),\ 4x+2y$
त्रिपद	:	$3x+y+z,\ a+b+c$

6) वे पद जिसमें बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे हो, **समान पद** कहलाते हैं तथा भिन्न-भिन्न होने पर **असमान पद** कहलाते हैं।

7) दो समान पदों वाले बीजीय व्यंजक को जोड़ा या घटाया जाता है जो पद समान नहीं होता है उसे छोड़ दिया जाता है।

8) एकपद का एकपद से गुणा करने पर एकपद प्राप्त होता है

जैसे : $2x \times 3y = 6xy$

9) दो द्विपद के गुणा में द्विपद से प्रत्येक पद को दूसरे द्विपद से गुणा करेंगे। फिर वितरण नियम का उपयोग करते हुए एकपद का द्विपद से गुणा करेंगे।

10) सर्वसमिका एक ऐसी समिका है जो चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

11) मानक सर्वसमिकाएँ -

प्रथम	$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$
द्वितीय	$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$
तृतीय	$(a+b)\,(a+b)$	$=$	a^2-b^2

अध्याय 9

राशियों की तुलना

प्रतिशत –

आपको स्मरण होगा कि अनुपात का अर्थ दो या दो से अधिक समान राशियों में तुलना करते हैं। यदि रमन के पास 4 पेन एवं आशा के पास 8 पेन्सिल है, तो उनके पेन एवं पेन्सिल का अनुपात 4 : 8 अर्थात् सरल रूप में 1 : 2 होगा। इस हम प्रतिशत के रूप में भी प्रदर्शित कर सकते हैं। **प्रतिशत का अर्थ है 100 में से कितना** यदि 2 में से 1 है तो 100 में से 50 होगा।

अर्थात् $\frac{1}{2}$ में हर को 100 बनाया जाता है।

$$= \frac{(1\times50)}{(2\times50)}$$

$$= \frac{50}{100}$$

$$= 50\%$$

इसे हम 50% पढते हैं।

आइये , हम ऐसे कुछ और उदाहरण लेकर प्रतिशत को विस्तार से समझते हैं।

उदाहरण : एक डलिया में आम और सेवफल रखे हैं जिसमें 14 आम और 6 सेवफल हैं अर्थात् कुल डलिया में 20 फल रखे हैं।

हल : आम के फलों की संख्या, सेवफल के फल की संख्या का तुलना (अनुपात)

= 14 : 6

या = 7 : 3

इसी प्रकार, सेवफल और आम की संख्या की तुलना करने पर 3 : 7 प्राप्त होगा।

यह तुलना प्रतिशत में भी करके देखते हैं।

हल : फलों की कुल संख्या = 20

20 फलों में सेवफल की संख्या = 6 है।

1 नग फल में सेवफल की संख्या = $\frac{6}{20}$

100 नग फलों में सेवफल की संख्या = $\frac{6}{20} \times 100\ \%$

= $6 \times 5\ \%$

= 30%

डलिया में आम तथा सेवफल हैं। इसलिए -

आम का प्रतिशत + सेवफल का प्रतिशत = 100%

या आम का प्रतिशत + 30% = 100%

या आम का प्रतिशत = 100 – 30 = 70%

अतः डलिया में 70 प्रतिशत आम तथा 30 प्रतिशत सेवफल हैं।

❖ **करो और सीखो –**

एक कम्पास बॉक्स में 12 बालपेन तथा 8 पेंन्सिल रखे हैं। तब बताइये कम्पास बॉक्स में बालपेन कितने प्रतिशत हैं।

उदाहरण : वेद् प्रतिष्ठान उज्जैन की एक पाठशाला में पौधारोपण के अन्तर्गत 25% जामुन, 15% नीम तथा शेष पीपल के पौधे लगाए गए हैं ? यदि पौधों की संख्या 80 हो, तो

1) जामुन के पौधों की संख्या कितनी है ?
2) नीम के पौधों की संख्या कितनी है ?
3) जामुन एवं नीम के पौधों का अनुपात क्या है ?
4) पीपल के पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

हल : दिया है - कुल पौधों की संख्या 80 है ?

1) जामुन के पौधों की संख्या = 80 का 25%

$$= 80 \times \frac{25}{100}$$

$$= 80 \times \frac{1}{4}$$

$$= 20$$

अतः जामुन के पौधों की संख्या 20 है।

2) नीम के पौधों की संख्या = 80 का 15%

$$= 80 \times \frac{15}{100}$$

$$= 80 \times \frac{3}{20}$$

$$= 4 \times 3 = 12$$

अतः नीम के पौधों की संख्या 12 है।

3) जामुन एवं नीम की पौधों का अनुपात = 20 : 12

या = 5 : 3

4) पीपल के पौधों की संख्या = कुल पौधे–(नीम के पौधे+जामुन के पौधे)

$= 80 - (20 + 12)$

$= 80 - 32$

$=$ 48 पौधे

अतः पीपल के पौधों की संख्या 48 है।

प्रश्नावली 9.1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) 1200 का 50% होगा

(I) 60 (II) 600 (III) 6000 (IV) 120

(ब) 40 का कितना प्रतिशत 16 है -

(I) 20% (II) 40% (III) 60% (IV) 80%

(स) x का 40% = 200 तो x का मान होगा -

(I) 240 (II) 800 (III) 500 (IV) 5

2. निम्न अनुपात को प्रतिशत में बदलिए।

अ) 1 : 3 ब) 2 : 5

3. मौनी बाबा वेद पाठशाला में कुल 70 विद्यार्थियों में से 20% वेद भूषण तृतीय वर्ष के विद्यार्थी हैं। बताइये कितने विद्यार्थी वेद भूषण तृतीय वर्ष में अध्ययन करते हैं।

4. गणेश के खेत में कुल 100 वृक्ष हैं जिनमें 30% वृक्ष छायादार तथा शेष फलदार वृक्ष हैं तो बताओ गणेश के खेत में फलदार वृक्षों की संख्या कितनी हैं।

5. शुक्ल यजुर्वेद के 50 विद्यार्थियों के समूह में अपनी-अपनी पसन्द मिठाई की को पूछा गया। जहाँ 20% विद्यार्थी गुलाब जामुन, 10% विद्यार्थी रसगुल्ले पसन्द करते हैं।

अ) गुलाब जामुन पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितने प्रतिशत है ?

ब) रसगुल्ले पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितने प्रतिशत है ?

वृद्धि प्रतिशत अथवा ह्रास (कमी) प्रतिशत ज्ञात करना –

आपको दैनिक जीवन में प्राय: निम्नलिखित सूचनाएँ मिलती होगी -

जैसे : अ) अंकित मूल्य पर 15% की कमी

ब) पेट्रोल के मूल्य में 10% की वृद्धि

उदाहरण : एक गेंद का मूल्य 20 है एक वर्ष बाद गेंद के मूल्य में 30% वृद्धि हो गई है तो गेंद का नया मूल्य बताइये ?

आराध्य कहता है - सबसे पहले तो मूल्य में वृद्धि ज्ञात करेंगे जो कि 20 रु. का 30% है और फिर नया मूल्य ज्ञात करेंगे।

20 रु. का 30% = $20 \times \frac{30}{100}$

= 6

नया मूल्य = पूराना मूल्य + वृद्धि

= 20 + 6

= 26 रु.

इसके विपरीत एक गेंद 20 रु. की है। गेंद की अधिक बिक्री (विक्रय मूल्य) करने के लिए उसके मूल्य को 10% घटा दिया गया तो गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

मूल्य में कमी = 20 का 10%

= $20 \times \frac{10}{100}$ = 2

नया मूल्य = पूराना मूल्य – कमी

= 20 – 2

= 18

बट्टा ज्ञात करना –

जब सामान्यतः कोई व्यापारी अपने ग्राहक को कोई समान बेचता है, तो अंकित मूल्य पर छूट देता है, इसी छूट को **बट्टा** कहते हैं। बटुकों ! छूट का शब्द आपने समान की खरीदारी करते समय दुकान वाले से सुना होगा।

जैसे : 1) इस शर्ट पर आपको 20% की छूट है।

2) इस धोती के अंकित मूल्य पर 10% का कंसेशन छूट (बट्टा) दी जाएगी।

इसलिए,

बट्टा (छूट) = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

ध्यान रहे : बट्टा (छूट) हमेशा अंकित मूल्य पर ही दिया जाता है।

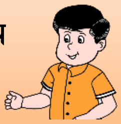
उदाहरण : 50 रु. अंकित मूल्य वाले बिस्किट के पैकेट को 40 में विक्रय (बेच) कर दिया जाता है तो बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना होगा।

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= 50 – 40 रु.

= 10 रु.

ध्यान देवें- यहाँ बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना होगा।



50 रु. अंकित मूल्य पर 10 रु. बट्टा है।

तो 10 रु. अंकित मूल्य पर कितना प्रतिशत बट्टा होगा ?

बट्टा प्रतिशत $= \frac{10}{50} \times 100$

बट्टा प्रतिशत = 20 %

❖ **करो और सीखो –**

यदि किसी वस्तु का अंकित मूल्य 60 रु. एवं विक्रय मूल्य 40 रु. है तो बट्टा एवं बट्टा प्रतिशत ज्ञात करें।

उदाहरण : एक कुर्ता की अंकित मूल्य 400 रु. है। यदि व्यापारी 20% की छूट देता है तो कुर्ते पर बट्टे की राशि एवं विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : अंकित मूल्य = 400 रु.

बट्टे की राशि = अंकित मूल्य का 20%

$= 400 \times 20\%$

$= 400 \times \frac{20}{100}$

= 80 रु.

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – बट्टा

= 400 – 80

= 320

अतः कुर्ते पर बट्टे की राशि 80 रु. एवं विक्रय मूल्य 320 रु. है।

उदाहरण : अंकित मूल्य पर 20% बट्टा (छूट) देने के बाद एक दुपट्टा 400 रु. में बेचा गया। दुपट्टा का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : विक्रय मूल्य = 400 रु.

चूँकि 20% का बट्टे देने का अर्थ है कि 100 रुपये के अंकित मूल्य पर 20 रुपये का बट्टा है अतः विक्रय मूल्य = 100 – 20 = 80 रुपये

चूँकि 80 रुपये विक्रय मूल्य है तो दुपट्टे का अंकित मूल्य 100 रु.

इसलिए, 1 रुपये विक्रय मूल्य है तो दुपट्टे का अंकित मूल्य = $\frac{100}{80}$ रु.

इसलिए, 400 रुपये विक्रय मूल्य है तो दुपट्टे का अंकित मूल्य

$$= \frac{100}{80} \times 400$$

= 500 रुपये

अतः दुपट्टे का अंकित मूल्य = 500 रु. हैं।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)
(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार का स्वायत्तशासी संस्थान)

प्रश्नावली 9.2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) अंकित मूल्य 350 रुपये वाली एक कुर्सी 300 रुपये में उपलब्ध हो तो बट्टे की राशि क्या होगी -

(I) 20 (II) 30 (III) 40 (IV) 50

(ब) 250 किलोग्राम टमाटर में से 10% टमाटर सड़ गया, जिसे हटा दिया गया। कितना टमाटर शेष बचा -

(I) 240 कि.ग्रा.(II) 225 कि.ग्रा.(III) 200 कि.ग्रा.(IV) 275 कि.ग्रा.

(स) वर्षा ऋतु में मन्दी के कारण 500 रूपये में मिलने वाले उपवस्त्र के मूल्य में 30% कमी की गयी तो नया मूल्य है -

(I) 300 (II) 350 (III) 410 (IV) 260

2. यदि किसी वस्तु पर निम्न अंकित मूल्य तथा विक्रय मूल्य दिया हो तो निम्न का बट्टा राशि ज्ञात कीजिए ?

अ) अंकित मूल्य = 500 रु. , विक्रय मूल्य = 450 रु.

ब) अंकित मूल्य = 600 रु. , विक्रय मूल्य = 480 रु.

स) अंकित मूल्य = 750 रु. , विक्रय मूल्य = 710 रु.

द) अंकित मूल्य = 890 रु. , विक्रय मूल्य = 780 रु.

3. एक वस्तु का अंकित मूल्य 1500 रु. और उसे 1000 रु. विक्रय कर दिया जाता है ? बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना होगा।

4. एक टूथपेस्ट का मूल्य 60 रु. है। मूल्य में 20% की वृद्धि होने पर टूथपेस्ट का नया मूल्य क्या होगा ?

5. एक साबुन का सेट 80 रु. का है। साबुन के सेट की अधिक बिक्री के लिए सेट का मूल्य 20% घटा दिया जाता है तो साबुन सेट का नया मूल्य क्या होगा ?

6. अंकित मूल्य पर 30% छूट (बट्टा) देने पर एक पञ्चपात्र का सेट 140 रु. में बेचा गया, पञ्चपात्र के सेट का अंकित मूल्य क्या होगा ?

स्मरणीय बिन्दु -

मूलधन :

जब कोई व्यक्ति किसी साहूकार या महाजन या बैंक से कुछ धन उधार लेता हैं, तो यह उधार लिया गया धन **मूलधन** (principal)कहलाता है। इसे 'p' से दर्शाते हैं।

ब्याज :

उधार लिया गया धन जब एक निश्चित समय के बाद लौटाया जाता है तो मूलधन के अतिरिक्त कुछ और धन देना पड़ता है यह अतिरिक्त धन ही **ब्याज** (interest) कहलाता है।

मिश्रधन :

मूलधन और ब्याज के योग को **मिश्रधन** (amount)कहते हैं। इसे 'a' से दर्शाते हैं।

समय :

धन जितनी अवधि के लिए उधार लिया जाता है उसे **ब्याज का समय** (Time) कहते हैं। इसे 't' से दर्शाते हैं। समय की गणना केवल वर्ष में की जाती है।

दर :

प्रति 100 रुपए मूलधन पर प्रतिवर्ष दी जाने वाली रकम को **ब्याज की दर (Rate)** कहा जाता है। इसे 'r' से दर्शाते हैं।

साधारण ब्याज :

'जब ब्याज केवल मूलधन पर निश्चित समय के लिए एक ही दर पर लगाया जाता है, तब उसे **साधारण ब्याज** (simple interest) कहते हैं।' इसे 'S.I.' से दर्शाते हैं।

सूत्र: **साधारण ब्याज** $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

या $S.I. = \frac{p \times r \times t}{100}$ **या** $S.I. = p \times r\,\% \times t$

जहाँ **मिश्रधन = मुलधन + ब्याज**

या $A = P + S.I.$

उदाहरणार्थ: राजेश 1200 रुपये 3% की दर से उधार लेता है यदि उस धन राशि को 2 वर्ष एवं 6 माह में चुकाना चाहता है। उसे कितना ब्याज चुकाना होगा ?

राजेश गुरुजी के पास जाता है कहता है –

गुरुजी 2 वर्ष 6 माह का ब्याज की गणना कैसे होगी ?

गुरुजी – समय को वर्षों में बदलें, एक वर्ष में 12 माह होते हैं।

माह को वर्षों में बदलने के लिए 12 से भाग देंगे।

उधार धन (मूलधन) = 1200 रु.

ब्याज की दर = 3% वार्षिक

समय = 2 वर्ष 6 माह

$= 2 \text{ वर्ष} + \frac{6}{12} \text{ वर्ष}$

$= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \text{ वर्ष या } \frac{5}{2} \text{ वर्ष}$

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{\mathbf{100}}$

$= 1200 \times \frac{3}{100} \times \frac{5}{2}$

= 90 रु.

मिश्रधन = **मूलधन + ब्याज**

= 1200 + 90

= 1290 रु.

उदाहरण : 2500 रु. का 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 4 वर्ष का साधारण ब्याज क्या होगा ?

हल : दिया है : मूलधन = 2500 रु., दर = 5%, समय = 4 वर्ष

तब हम जानते हैं –

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{\mathbf{100}}$

$= \frac{2500 \times 5 \times 4}{100} = 500$ रु.

❖ **करो और सीखो –**

साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

यदि मूलधन = 500 रु., दर = 5% वार्षिक, समय = 1 वर्ष 6 माह

चक्रवृद्धि ब्याज –

ऐसा ब्याज जिसमें मूलधन के साथ-साथ ब्याज पर भी ब्याज जुड़ता है इसे **चक्रवृद्धि ब्याज** (compound interest)कहते हैं। जिस अवधि के बाद ब्याज की गणना करके उसे मूलधन में जोड़ा जाता है। उसे चक्रवृद्धि अवधि कहते हैं। दूसरे शब्दों में "जब ब्याज का परिकलन पिछले वर्षों की राशि पर किया जाता है, तो इस ब्याज का संयोजन अथवा चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।" चक्रवृद्धि ब्याज को C.I. से दर्शाते हैं।

वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने का सूत्र :

❖ **चक्रवृद्धि मिश्रधन** = $\text{मूलधन}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$

या A = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$

❖ **चक्रवृद्धि ब्याज** = $\text{मूलधन}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मूलधन}$

या C.I. = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n} - P$

जहाँ, A = मिश्रधन, P = मूलधन, R = दर, n = समय

उदाहरण : यदि चक्रवृद्धि ब्याज दर 10000 रु., 1 वर्ष के लिए उधार लिया जाए तो 2% वार्षिक दर से कुल कितना धन वापस लौटाना (मिश्रधन) होगा।

हल : दिया है - मूलधन = 10000 रु., दर = 2%, समय = 1 वर्ष

हम जानते है,

मिश्रधन = $\mathbf{P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}}$

= $10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{1}$

= $10000\left(\frac{100+2}{100}\right)^{1}$

= $10000\left(\frac{102}{100}\right)$

= 10200 रु.

अतः 1 वर्ष बाद 10200 रुपये ब्याज वापस लौटाना होगा।

उदाहरण : यदि 20000 रु., 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया जाए तो 3% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज कितना देना होगा।

हल : दिया है - मूलधन = 20000, दर = 3% वार्षिक, समय = 2 वर्ष

मिश्रधन = $\mathbf{P\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}}$

= $20000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{2}$

= $20000\left(\frac{100+3}{100}\right)^{2}$

= $10000\left(\frac{103}{100}\right)^{2}$

= $20000\times\frac{103}{100}\times\frac{103}{100}$

= 21218 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज = **मिश्रधन – मूलधन**

C.I. = A – P

$= 21218 - 20000$

$= 1218$ रु.

यत्र विश्वं भवत्येकनीडम् महर्षिसान्दीपनिराष्ट्रियवेदविद्याप्रतिष्ठानम्, उज्जयिनी

प्रश्नावली 9.3

1. साधारण ब्याज की ज्ञात कीजिए।

   1) मूलधन = 1500, दर = 1%, समय = 2 वर्ष 6 माह

   2) मूलधन = 2000, दर = 2%, समय = 1 वर्ष 6 माह

   3) मूलधन = 3000, दर = 3%, समय = 3 वर्ष 6 माह

   4) मूलधन = 10000, दर = 4%, समय = 2 वर्ष

   5) मूलधन = 800, दर = 3%, समय = 5 वर्ष

2. चक्रवृद्धि ब्याज पर लिये गये धन का मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

   1) मूलधन = 50000, दर = 2%, समय = 1 वर्ष

   2) मूलधन = 40000, दर = 3%, समय = 2 वर्ष

   3) मूलधन = 60000, दर = 3%, समय = 1 वर्ष

   4) मूलधन = 80000, दर = 4%, समय = 2 वर्ष

3. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

   1) मूलधन = 20000, दर = 3%, समय = 1 वर्ष

   2) मूलधन = 40000, दर = 4%, समय = 2 वर्ष

4. 30000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 5% वार्षिक दर से संयोजित करने पर कुल राशि एवं ब्याज ज्ञात कीजिए।

5. महेश में 70000, 3 वर्ष के लिए 4% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया है। तो चक्रवृद्धि ब्याज की राशि क्या होगी ?

➢ हमने सीखा –

1) अंकित मूल्य पर दी गई छूट **बट्टा** कहलाती है।

बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

2) प्रतिशत बट्टा = $\frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$

3) साधारण ब्याज = $\frac{(\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय})}{100}$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

4) जब समय-समय पर संचित हुए ब्याज को मूलधन में मिलाकर इस मिश्रधन पर ब्याज की गणना की जाती है तो इसे **चक्रवृद्धि ब्याज** कहते हैं।

5) जब ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तो कुल राशि

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

जहाँ P = मूलधन, R = दर, n = समय

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n - P$$

compound interest(C.I.) = A – P

अध्याय 10

सीधा और प्रतिलोम समानुपात

आप दैनिक जीवन में कई स्थितियों का सामना करते हैं। जहाँ आपको यह ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है कि एक स्थिति में परिवर्तन होने से दूसरी राशि में भी परिवर्तन हो रहा है।

उदाहरण :

1) बैंक खाते में आप जितनी धनराशि जमा करते जाएंगे, आपके खाते में उतनी ही धनराशि बढ़ती जाएगी।
2) एक काम को पूरा करने में 15 दिन लगते हैं। यदि काम करने वाले व्यक्तियों की संख्या बढ़ा दी जाए तो काम कम समय में पूर्ण होगा।
3) खरीदी गई वस्तुओं की संख्या जितनी अधिक होगी, उनका मूल्य भी उतना ही अधिक होगा।
4) एक ही मूल्य की जितनी अधिक वस्तुएँ होगी, उनका मूल्य भी उतना ही अधिक होगा।
5) बैंक खाते में आप जितनी धनराशि, अधिक समय के लिये जमा करेंगे, उसका ब्याज भी उतना अधिक होगा।

➢ **ध्यान दीजिए –**

एक राशि के परिवर्तन करने पर दूसरी राशि में हो रहे परिवर्तन की गणना को ज्ञात करते है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए हम कुछ विचरण

(Variation) जिसमें सीधा तथा प्रतिलोम समानुपात की अवधारणा का अध्ययन करेंगे।

सीधा अनुपात –

जब दो राशि इस प्रकार सम्बन्धित हो कि एक का मान बढ़ाने पर दूसरे का मान बढ़े या एक मान घटाने पर दूसरे का भी मान घटे, तो उन दोनों राशियों में **सीधा सम्बन्ध** होता है।

यदि दो राशि में **सीधा सम्बन्ध** है तो आर्यभट्टीयम् के निम्न श्लोक के द्वारा हम अज्ञात राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं।

त्रैराशिकफलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा ।

लब्धं प्रमाणभाजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात् ॥

(आर्यभट्टीयम्, गणितपाद : 26)

अर्थात् त्रैराशिक को फल राशि को इच्छा राशि से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल को प्रमाण से भाग देने पर इच्छा फल प्राप्त होता है।

$$\textbf{इच्छाफल} = \frac{\text{फल} \times \text{इच्छा राशि}}{\text{प्रमाण}}$$

आर्यभट्टीयम् के अतिरिक्त भास्कराचार्य जी द्वारा रचित लीलावती गणित में भी त्रैराशिके करणसूत्रम् बताया गया है।

उदाहरण : दीपावली पर पाठशाला में रंगाई का कार्य चल रहा है। मजदूरों ने 3 दिन में 15 कमरों की पुताई की। यदि पाठशाला के कुल 20 कमरों की पुताई के कार्य में कितने दिन लगेंगे ?

अभिषेक – 3 दिन में 15 कमरों की पुताई हुई है तो 20 कमरों की पुताई में लगने वाला समय की गणना करते हैं।

अङ्कित – **दिनों की संख्या :: पुताई किए गए कमरों की संख्या**

दिनों की संख्या		पुताई किए गए कमरों की संख्या
3		15
x		20

यहाँ दिनों की संख्या तथा कार्य की मात्रा में समानुपाती सम्बन्ध है अर्थात् कार्य की मात्रा अधिक होने लगने वाला समय (दिन) भी अधिक होगा। कार्य पूर्ण होने में लगे मजदूरों एवं दिनों की संख्या में सीधा सम्बन्ध है।

$$3 : x :: 15 : 20$$

बाह्य पदों का गुणनफल = आन्तरिक पदों का गुणनफल

$$3 \times 20 = 15 \times x$$

$$\frac{3 \times 20}{15} = x$$

या $x = 4$

अभिषेक – हाँ सही है। पूरे विद्यालय में (20 कमरों की) 4 दिन में पुताई कर देंगे।

आयुष – तो बताइये मजदूरी की संख्या तथा कार्य पूर्ण होने में लगे समय में कोई सम्बन्ध है ?

अभिषेक – मुझे तो लगता है कि ज्यादा मजदूर होंगे तो कार्य जल्दी पूरा होगा। चलो गुरुजी से पूछते हैं।

आयुष – गुरुजी संख्या तथा कार्य पूर्ण होने में लगे मजदूरों की और दिनों की संख्या में सीधा सम्बन्ध है।

गुरुजी – हाँ सीधा सम्बन्ध है।

दो चरों में सम्बन्ध इस प्रकार होते हैं कि एक चर में बढ़ाने से दूसरा चर बढ़ता है तथा घटाने पर घटता है **सीधा सम्बन्ध** कहलाता है परन्तु कभी-कभी एक चर बढ़ने पर दूसरा चर घटता है तथा पहले चर के घटाने पर दूसरा चर बढ़ जाता है। यह सम्बन्ध **प्रतिलोम सम्बन्ध** कहलाता है।

❖ **करो और सीखो –**

निम्नलिखित कथनों को पढ़कर पता कीजिए कि यह सीधा/प्रतिलोम सम्बन्ध है।

क.	**कथन**	**सम्बन्ध (सीधा / प्रतिलोम)**
1)	एक कुर्ते का 3 मीटर कपड़े का मूल्य 300 रु. है। इस प्रकार के 5 मीटर के कपड़े का मूल्य तब बताइये कुर्ते के कपड़े और मूल्य के बीच कौन-सा सम्बन्ध है ?	....
2)	एक काम में 2 मजदूर एक काम को 20 दिन में काम पूर्ण करते हैं। यदि मजदूरों की संख्या और काम पूर्ण करने वाले दिनों के बीच सम्बन्ध है।	....
3)	पानी की टंकी में से पानी निकाल लेने पर टंकी में पानी की मात्रा के बीच किस प्रकार का सम्बन्ध है ?	....

उदाहरण : यदि 4 कलम की कीमत 20 रूपये है तो 40 रु. के कितने कलम खरीदी जा सकती है।

हल : मान लीजिए कलम की संख्या x है।

जिनकी कीमत 40 रु. है। यहाँ कलम की संख्या तथा कलम की कीमत के मध्य सीधा सम्बन्ध है।

कलम की संख्या	::	**कलम की कीमत**
↑ 4		20 ↑
x		40

$$4 : x :: 20 : 40$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$4 \times 40 = 20 \times x$$

$$\frac{4 \times 40}{20} = x$$

या $x = 8$

अतः 40 रु. के 8 कलम खरीदी जाएगी।

उदाहरण : एक पैसेंजर रेलगाड़ी एक समान चाल से 50 किमी की दूरी 20 मिनट में तय करती है तो 100 किमी की दूरी को कितने मिनट में तय करेगी।

हल : मान लीजिए यहाँ रेलगाड़ी 100 किमी की दूरी को x समय में तय करेगी।

यहाँ तय की दूरी और समय के मध्य सीधा सम्बन्ध है अर्थात् दूरी बढ़ने के साथ रेलगाड़ी द्वारा लिया गया समय भी उसी अनुपात में बढ़ता है।

रेलगाड़ी द्वारा तय की दूरी::   रेलगाड़ी के द्वारा लिया गया समय

$50 : 20 \quad :: \quad 100 : x$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$50 \times x = 20 \times 100$$

$$x = \frac{20 \times 100}{50}$$

या x = 40 मिनट

अतः रेलगाड़ी 100 किमी की दूरी को 40 मिनट में तय करेगी।

प्रश्नावली 10.1

1. अगर 7 किलो टमाटर का मूल्य 35 रुपये है तो हमें 10 किलो टमाटर के लिए कितना भुगतान करना होगा ?
2. यदि 3 क्विंटल सोयाबीन कीमत 6,000 रुपये है तो 4,000 रुपये में कितने क्विंटल सोयाबीन खरीदेंगे ?
3. दो मोबाइल की कीमत 10,000 रुपये है तो 5 ऐसे मोबाइल खरीदने के लिए कितने रुपयों की आवश्यकता होगी ?
4. यदि 2 किलो शक्कर का मूल्य 80 रुपये है, तो 160 रुपये में कितने किलो शक्कर खरीदेंगे ?
5. एक गाड़ी 2 लीटर पेट्रोल में 100 किलोमीटर की दूरी तय करती है तो 5 लीटर पेट्रोल में गाड़ी कितने किलोमीटर दूरी तय करेगी ?
6. यदि 16 पेन्सिल का मूल्य 64 रुपये है तो 144 रुपये में कितने पेन्सिल खरीदें जाएँगी -

प्रतिलोम सम्बन्ध –

लीलावती गणित में प्रतिलोम सम्बन्ध पर आधारित प्रश्नों को उत्तर जानने के लिए निम्न श्लोक बताया गया है।

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धिः फलस्य तु।

व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ।।

(लीलावती गणित, उदाहरण 102)

अर्थ: जहाँ इच्छा की वृद्धि में फल की कमी हो तथा इच्छा की कमी में फल की वृद्धि हो, वहाँ गणितज्ञों को व्यस्त त्रैराशिक जानना चाहिए।

भाव: जब एक राशि के मान बढ़ने एवं घटने पर क्रमश: दूसरी राशि के मान घटे या बढ़े, तब इस प्रकार की अवधारणा वाले गणितीय प्रश्नों को त्रैराशिक नियम से हल करते है।

दो चर में सम्बन्ध इस प्रकार हो कि एक चर के मान बढ़ाने, पर दूसरे चर का मान घट जाता है। या एक चर का मान घटाने पर, दूसरे चर का मान बढ़ जाता है, तो यह सम्बन्ध **प्रतिलोम सम्बन्ध** कहलाता है। इसमें एक चर, दूसरे चर का व्युत्क्रमानुपाती कहलाता है।

जैसे : एक काम को पूरा करने में 5 व्यक्तियों को 15 दिन लगते है उसी काम को 10 व्यक्तियों को कितने दिनों में पूरा करेंगे।

उपर्युक्त प्रश्न को पढ़कर आपने विचार किया होगा कि यहाँ व्यक्तियों कि संख्या बढ़ाने पर वहीं काम कम दिन में पूरा कर लिया जायेगा। अर्थात् एक चर को बढ़ाने पर दूसरा चर कम हो रहा है। यहाँ दोनों राशियों के मध्य प्रतिलोम सम्बन्ध है।

उदाहरण : एक खेत की खरपतवार का काम 4 मजदूर 8 दिन में पूरा करते है यदि उसी काम को 16 मजदूर करें तो काम कितने दिन में पूरा किया जायेगा।

हल : यहाँ मजदूर की संख्या तथा खरपतवार के कार्य पूर्ण करने में लगा समय के मध्य प्रतिलोम (व्युत्क्रम) सम्बन्ध है।

मजदूरों की संख्या **कार्य पूर्ण करने में दिया समय (दिनों में)**

↑ 4	8 ↓
16	x

माना की कार्य करने में लगने वाले दिन x है।

$$16 : 4 \quad :: \quad 8 : x$$

$$\frac{16}{4} = \frac{8}{x}$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों को गुणनफल

$$16 \times x = 4 \times 8$$

$$x = \frac{4 \times 8}{16}$$

या $$x = \frac{32}{16}$$

अतः 16 मजदूर के द्वारा कार्य पूर्ण करने में 2 दिन लगेंगे।

उदाहरण : एक टंकी को 2 पाइप 6 घण्टे में भरते है। उसी टंकी को 3 पाइप द्वारा भरने में कितना समय लगेगा ?

हल : मान लीजिए यहाँ टंकी को भरने में x समय (घण्टे) लगेगा।

पाइप की संख्या अधिक करने पर पानी की टंकी भरने में कम समय लगेगा।

अतः यह एक प्रतिलोम सम्बन्ध की स्थिति है।

पाइपों की संख्या :: **समय**

↑ 2	6 ↓
3	x

मान लीजिए यहाँ टंकी को भरने में x समय (घण्टे) लगेगा।

$$3 : 2 \quad :: \quad 6 : x$$

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{x}$$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों को गुणनफल

$$3 \times x = 2 \times 6$$

$$x = \frac{2 \times 6}{3}$$

या $x = 4$

अतः 3 पाइपों के द्वारा टंकी भरने में 4 घण्टे लगेंगे।

प्रश्नावली 10.2

1. एक गाड़ी एक स्थान तक पहुँचने में 20 कि.मी./घण्टा की चाल से दूरी तय करती है तो बताइये 60 कि.मी. की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा ?

2. एक छात्रावास में 100 विद्यार्थी हैं और उनके भोजन की सामग्री 20 दिन के लिए पर्याप्त है यदि समूह में 25 विद्यार्थी और आ जाए (कुल 125) तो यह भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी ?

3. एक गौशाला में 20 गायों के लिए 6 दिन के लिए पर्याप्त भोजन है यदि इस गौशाला में 10 गाय और आ जाए तो भोजन कितने दिन तक पर्याप्त रहेगा ?

4. 5 व्यक्ति एक कार्य को पूर्ण करने में 15 दिन लगते हैं। उसी काम को पूरा करने में 15 व्यक्तियों को कितने दिन लगेंगे ?

5. भारत में स्वच्छता अभियान के अन्तर्गत 15 स्वयंसेवकों अपने गाँव को 4 दिन में स्वच्छ कर सकते हैं यदि उसी गाँव को 3 दिन में स्वच्छ कर सकते हैं यदि उसी गाँव को 3 दिन में स्वच्छ करना हो तो कितने स्वयंसेवक की आवश्यकता होगी ?

➢ **हमने सीखा –**

1) जब दो राशि इस प्रकार सम्बन्धित हों कि एक का मान बढ़ने या घटने पर दूसरे का मान भी उसी अनुपात में बढ़े या घटे तो वे **समानुपाती (सीधा) या अनुत्क्रमानुपाती** कहलाती हैं।

2) जब दो राशियाँ इस प्रकार से सम्बन्धित हों कि एक का मान बढ़ाने या घटाने पर दूसरे का मान भी उसी अनुपात में क्रमश: घट या बढ़ जाता है तो **प्रतिलोम सम्बन्ध या व्युत्क्रमानुपाती** कहलाती हैं।

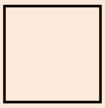
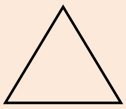
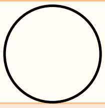
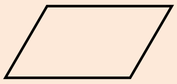
अध्याय 11

क्षेत्रमिति

प्रिय बटुकों ! हम अध्ययन कर चुके हैं कि किसी बन्द समतल आकृति (द्विविमीय आकृति) की सीमा के चारों ओर की दूरी उसका **परिमाप** कहलाता है और उस आकृति द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को उसका **क्षेत्रफल** कहते हैं। हम द्विविमीय आकृतियों में त्रिभुज, वर्ग, आयत इत्यादि के विभिन्न समतल आकृति के परिमाप व क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम द्विविमीय आकृति से बने ठोस आकृति में घन, घनाभ और बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

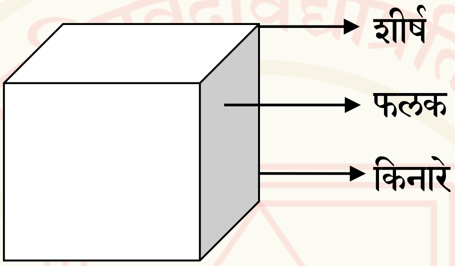
मानव शुल्ब सूत्र 10.2.5.5. एवं 10.3.2.11 में क्षेत्रफल ज्ञात करने की रीति के बारे में बताया गया हैं।

आपको पूर्व कक्षा में किये द्विविमीय आकृति के क्षेत्रफल के सूत्र स्मरण होंगे।

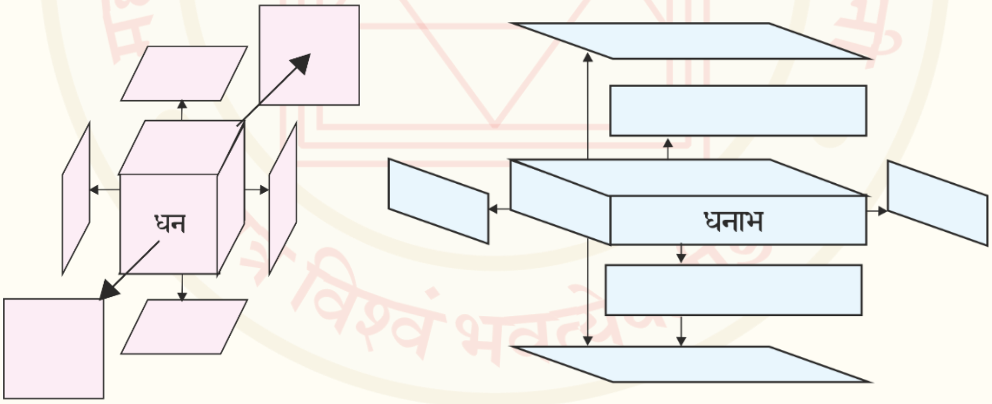
क्र.	आकृति	आकार	क्षेत्रफल
1)		वर्ग	भुजा × भुजा $a \times a$
2)		आयत	लम्बाई × चौड़ाई $\ell \times b$
3)		त्रिभुज	$\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई $\frac{1}{2} \times b \times h$
4)		वृत्त	π (त्रिज्या)^2 πr^2
5)		समान्तर चतुर्भुज	आधार × ऊँचाई $b \times h$

> क्या आप उपर्युक्त समतल आकृतियों (2D) के परिमापों के सूत्र लिख सकते हो ?

आप ठोस आकृतियों के फलक, किनारे, शीर्ष देखकर आसानी से पहचान कर सकते हैं।



आपने देखा होगा कुछ आकारों में दो या दो से अधिक फलक या पृष्ठ एक जैसे (सर्वांगसम) होते हैं।



निम्न आकृतियों में एक जैसे (सर्वांगसम) फलकों को पहचानें।

घन एवं घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

भोला और अथर्व ने अपनी वेद की पुस्तक एवं अन्य पुस्तकों को रखने के लिए कार्ड बोर्ड का क्रमशः घन एवं घनाभ का आकार बनाया जिस पर वे रंगीन कागज चिपकाना चाहते हैं। भोला ने 4 से.मी. वाला घन एवं अथर्व 3 से.मी. लम्बाई, 4 से.मी. चौड़ा व 5 से.मी. वाला घनाभ तैयार किया। वे इस समस्या में हैं कि बाजार से कितना कागज खरीदकर लाया जाए ?

भोला और अथर्व के बीच चर्चा -

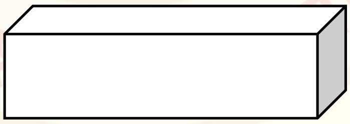
भोला – क्यों न हम प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल अलग अलग निकाल कर जोड़ लें। तभी

अथर्व – भैय्या (भोला) इसे ही पृष्ठीय क्षेत्रफल कहते हैं।

गुरुजी – बिल्कुल ठीक चर्चा कर रहे हैं।

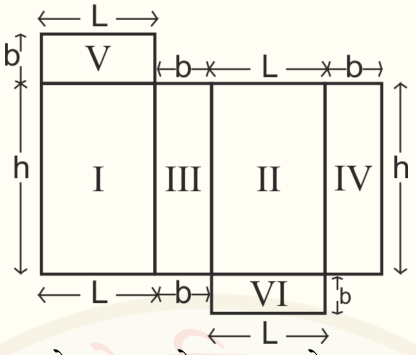
आप किसी ठोस के सम्पूर्ण पृष्ठों द्वारा घेरा गया क्षेत्र उस आकृति का **पृष्ठीय क्षेत्रफल** कहलाता है।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल –



घनाभ

अथर्व द्वारा बनाये घनाभकार बॉक्स को काटकर खोलने पर निम्न दर्शाया गया चित्र प्राप्त होता है। आप देखते हैं कि घनाभ में हमें दो-दो सर्वांगसम फलकों के तीन जोड़े प्राप्त होते हैं। जहाँ लम्बाई ℓ, चौड़ाई b एवं ऊँचाई h से दर्शाया गया है।



घनाभ का क्षेत्रफल = क्षेत्रफल1 + क्षेत्रफल2 + क्षेत्रफल 3 + क्षेत्रफल4 + क्षेत्रफल5 + क्षेत्रफल6

= ऊँ.× ल. + ऊँ.× ल. + चौ.× ऊँ. +चौ.× ऊँ. +ल.× चौ. + ल.× चौ.

$= h \times l + h \times l + b \times h + b \times h + l \times b + l \times b$

$= 2hl + 2bh + 2lb$

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \mathbf{2(lb + bh + hl)}$

जहाँ l, b व h क्रमश: लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई है।

इस अथर्व के द्वारा बनाये गये घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2(3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3)$ वर्ग से.मी.

$= 2(12 + 20 + 15)$

$= 2(47)$

= 94 वर्ग से.मी.

कमरे का चारों ओर पुताई हेतु घनाभ का तल (फर्श) एवं छत को छोड़ना होता है। केवल चारों दीवारों का ही क्षेत्रफल ज्ञात करना होता है। इसलिए **घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल** कहते हैं। अर्थात्

घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल – छत एवं फर्श का क्षेत्रफल

$= 2(lb + bh + hl) - 2lb$

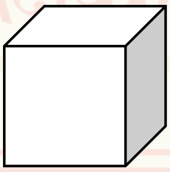
$= 2bh + 2lh$

घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times (b + l) \times h$

या **घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत(फर्श) का परिमाप × ऊँचाई**

यहाँ छत एवं फर्श का क्षेत्रफल ऊँचाई से स्वतन्त्र होता है केवल लम्बाई और चौड़ाई पर निर्भर करता है।

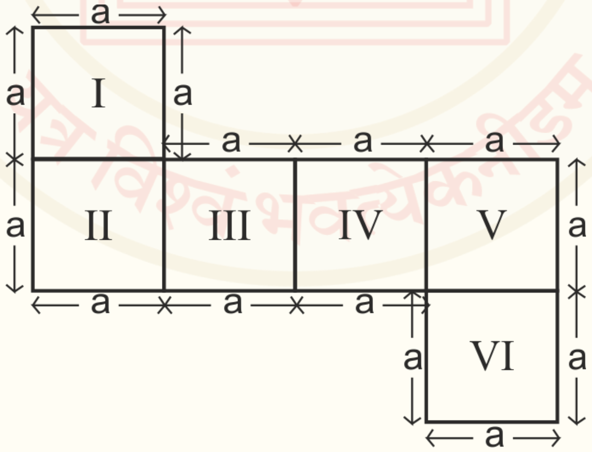
घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल –



घन

आप जानते हैं घन, वर्ग का त्रिविमीय आकार है अर्थात् सभी भुजाएँ समान होती हैं घन में छः फलक होते हैं।

घन के एक फलक का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = $(\text{भुजा})^2$ होता है तथा सभी छः फलक वर्गाकार होते हैं प्रत्येक भुजा को a से निरूपित करते हैं।



अतः **घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल** = $6 \times$ एक वर्गाकार फलक का क्षेत्रफल

इस प्रकार,

भोला द्वारा बनाये गये घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (भुजा)²

= $6 \times (4)^2$ (भुजा = 4 से.मी.)

= 6×16

= 96 वर्ग से.मी.

उदाहरण : शुभम ने सावन को जन्मदिन का उपहार देने के लिए घनाकार बॉक्स में उपहार की पैकिंग की यदि उस घनाकार की एक भुजा 5 से.मी. है। बॉक्स के बाहरी पृष्ठ पर रंगीन कागज चिपकाने के लिए आवश्यक कागज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : दिया है : घन की एक भुजा (a) = 5 से.मी.

हम जानते हैं,

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

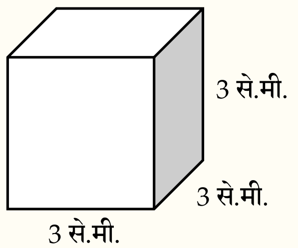
= $6 \times (5)^2$ (a = 5 से.मी.)

= 6×25 = 150 वर्ग से.मी.

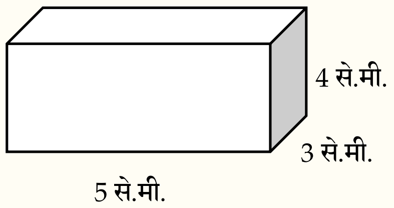
अतः लगने वाला आवश्यक रंगीन कागज का क्षेत्रफल 150 वर्ग से.मी. है।

उदाहरण : निम्न आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

1)



2)



हल : 1) दी गई आकृति का आकार घन है।

दिया है – घन की भुजा = 3 से.मी.

हम जानते हैं

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$

$= 6 \times (3)^2$

$= 6 \times 9 = 54$ वर्ग से.मी.

2) दी गई आकृति का आकार घनाभ है।

दिया है - घनाभ की लम्बाई $(l) = 3$ से.मी. , चौड़ाई $(b) = 5$ से.मी. ,

ऊँचाई $(c) = 4$ से.मी.

हम जानते हैं,

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\ (lb + bh + hl)$

$= 2\ (3 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 3)$

$= 2\ (15 + 20 + 12)$

$= 2\ (47)$

$= 94$ वर्ग से.मी.

उदाहरण : एक घनाभ के आकार का सूटकेस है जिसकी लम्बाई 30 से.मी., चौड़ाई 40 से.मी. तथा ऊँचाई 20 से.मी. है। यदि सूटकेस को ऊपर से तिरपाल या कपड़े से ढकना है तो कितने से.मी. कपड़े की आवश्यकता होगी।

हल : दिया है –

सूटकेस की लम्बाई $l = 30$ से.मी., चौड़ाई $b = 40$ से.मी., ऊँचाई $h = 20$ से.मी.

अतः **सूटकेस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 $(lb + bh + hl)$**

$= 2\ (30 \times 40 + 40 \times 20 + 20 \times 30)$

$= 2(1200 + 800 + 600)$

$= 2\ (2600)$

= 5200 वर्ग से.मी.

अतः सूटकेस पर कपड़े ढकने के लिए 5200 वर्ग से.मी. कपड़े की आवश्यकता होगी।

उदाहरण : एक पाठशाला का कक्ष घनाभ आकार का है जहाँ कक्ष की लम्बाई 5 मी., चौड़ाई 6 मी. व ऊँचाई 4 मी. है। यदि उस कक्ष की चार दिवारों पर रंगाई कराने का 3 रु. वर्ग प्रति मीटर है तो उस कक्ष के चार दिवारों पर रंगाई कराने का खर्च कितना होगा।

हल : दिया है - कक्ष की लम्बाई = 5 मी. , चौड़ाई = 6 मी., ऊँचाई = 4 मी.

हम जानते हैं

कक्ष की चारों दीवार का पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत (आधार) का परिमाप × कमरे की ऊँचाई

$= 2\ (l + b) \times h$

$= 2\ (5 + 6) \times 4$

$= 2\ (11) \times 4$

$= 22 \times 4$ = 88 वर्ग मीटर

यदि रंगाई करवाने का खर्च प्रति वर्ग मीटर $= 3$ रु.

इसलिए ,

कमरे की चारों दिवारों पर रंगाई करवाने का खर्च $= 88 \times 3$ रु.

$= 264$ रु.

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित सूत्रों को लिखकर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

(अ) घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

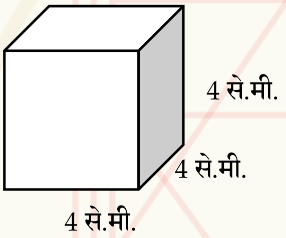
(ब) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

(अ) घन के एक फलक का क्षेत्रफल = ...

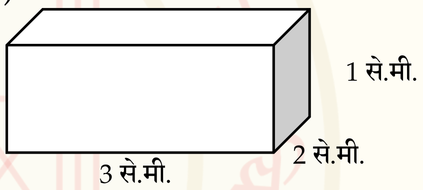
(ब) घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = ...

2. निम्नांकित आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1)

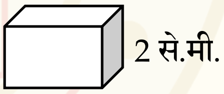


2)



3. एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

जिसकी एक भुजा 2 से.मी. हो।



4. राहुल ने 2 मी. × 3 मी. × 4 मी. माप वाली एक पेटी पर पेंट किया यदि पेटी को बाहर से पेट किया तो बताइये उसके कितने पृष्ठीय क्षेत्रफल को पेंट किया है।

5. एक साबुन की बॉक्स में 100 साबुन है यदि बॉक्स का माप 10 से.मी. × 20 से.मी. × 10 से.मी. है तो साबुन के बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

6. गणेश के कमरे की आन्तरिक माप 12 मी., 10 मी. एवं 7 मी. है तो कमरे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें। यदि गणेश 2 रु. प्रति वर्ग मीटर के

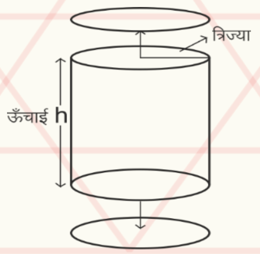
हिसाब से चारों दीवारों पर पेंट करवाना चाहता है तो चारों दिवारों पर पेंट का खर्च कितना आएगा।

7. एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी लम्बाई 3 मी., चौड़ाई 10 मी. एवं ऊँचाई 4 मी. है।

8. एक ऐसे घन की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 600 से. मी.^{2} है।

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

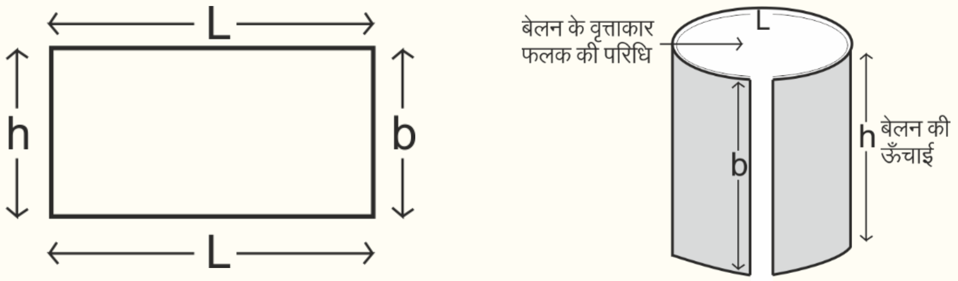
एक पाइप, गोलाकार खम्बा, ट्यूबलाईट आदि लम्बवृत्तीय बेलन के उदाहरण हैं। लम्बवृत्तीय बेलन में वृत्ताकार फलकों के केन्द्रों को मिलाने वाला रेखाखण्ड आधार पर लम्ब होगा आवश्यक है।



बेलन के दोनों के वृत्ताकार फलकों को छोड़कर बचा हुआ पृष्ठ वक्रपृष्ठ कहलाता है। आइए, एक गतिविधि के माध्यम से बेलन के वक्र पृष्ठ का सूत्र ज्ञात करते हैं।

गतिविधि –

एक आयताकार कागज लेकर उसकी लम्बाई व चौड़ाई अंकित कर दीजिए चित्रों के अनुसार सिरों को मोड़कर अतिव्यापन के टेप के सहायता से चिपकाए। इस प्रकार एक बेलन का वक्रपृष्ठ का निर्माण होगा।



आयताकार कागज की लम्बाई l, बेलन का वृत्ताकार आधार परिधि $(2\pi r)$ से सम्पादित हो गई है और चौड़ाई (b) ने बेलन की ऊँचाई (h) का रूप ले लिया है।

अतः बेलन का वक्रपृष्ठ = आयताकार कागज का क्षेत्रफल

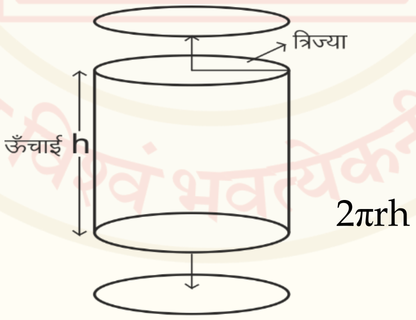
$= l \times b \qquad (l = 2\pi r, b = h)$

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$

बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल = $2\pi rh$ वर्ग इकाई

यदि बेलन के दोनों वृत्ताकार फलकों को बेलन के वक्रपृष्ठ में सम्मिलित कर लिया जाए, तो यह बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ कहलाता है। यहाँ,



बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

= बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल + दोनों वृत्ताकार फलकों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = $2\pi r\,(h + r)$ वर्ग इकाई

जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$

उदाहरण : एक बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 14 से.मी. व ऊँचाई 7 से.मी. हो (जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$)

हल : दिया बेलन की त्रिज्या = 14 से.मी. , बेलन की ऊँचाई = 7 से.मी.

हम जानते हैं,

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = $2\pi r\,(r + h)$

$= 2 \times \pi \times 14\,(7 + 14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14\,(21)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 21$

= 1848 वर्ग से.मी.

अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल 1848 वर्ग से.मी. है।

उदाहरण : पुल पर लगने वाले एक खोखले पाइप का वक्रपृष्ठ ज्ञात करें। जिसकी त्रिज्या 2 मी. व ऊँचाई 21 मी. हो।

हल : दिया है - खोखले सीमेंट के पाईप की त्रिज्या = 2 मी. व ऊँचाई = 21 मी. है

तब हम जानते हैं , **खोखले पाइप (बेलन) का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल = $2\pi rh$**

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 21$

= 264 वर्ग मीटर

अतः खोखले पाईप का वक्रपृष्ठ 264 वर्ग मीटर है।

प्रश्नावली 11.2

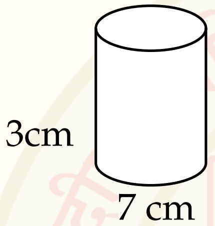
1. निम्नलिखित सूत्रों को लिखकर रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिये।

(अ) बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल = ...

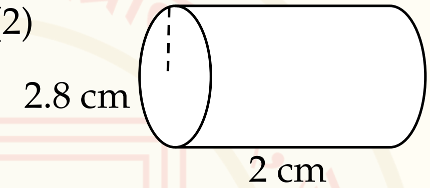
(ब) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = ...

2. निम्न बेलन आकार आकृतियों के वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(1)



(2)

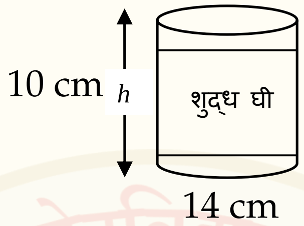


3. उस बेलन वक्र पृष्ठ क्या होगा ? जिसकी ऊँचाई 14 से.मी.एवं त्रिज्या 4 से.मी. है।

4. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी त्रिज्या 21 से.मी. है एवं ऊँचाई 2 से.मी. है।

5. एक कम्पनी अपने शुद्ध घी को ऐसे बेलनाकार में पैक करती है। जिसका व्यास 14 से.मी. और ऊँचाई 10 से.मी. है। कम्पनी बर्तन के चारों और लेबल लगाती है। (जैसे चित्र में दर्शाया गया है) यदि लेबल बर्तन के तेल और शीर्ष से दोनों और से 1 से.मी. की दूरी पर चिपकाया जाता है तो लेबल का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(**सङ्केत** - ऊँचाई के लिए दी गई लेबल की ऊँचाई में से बर्तन के दोनों ओर की छोड़ें गये लेबल की ऊँचाई घटानी होगी)



6. एक बेलन का व्यास 14 से.मी. व ऊँचाई 5 से.मी. है तो बेलन का वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. एक ऐसे बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 से.मी. और कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 से. मी.^{2} है।

➢ **हमने सीखा –**

1) एक ठोस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल उस आकृति के फलकों के क्षेत्रफलों के योग के समान रहता है।

2) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$

(जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई व h = ऊँचाई है)

3) घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

(जहाँ a = घन की एक भुजा)

4) बेलन का वक्रपृष्ठ = $2\pi rh$

जहाँ r = बेलन की आधार की त्रिज्या

h = बेलन की ऊँचाई

जहाँ π का मान लेते हैं $\pi = \frac{22}{7}$

4) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल =

= बेलन का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल + दोनों वृत्ताकार कक्षों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

भारतीय गणितज्ञों का परिचय एवं उनका योगदान

❖ ब्रह्मगुप्त (Brahmagupta)

ब्रह्मगुप्त एक विश्वविख्यात गणितज्ञ थे। इनका जन्म राजस्थान राज्य में आयु पर्वत तथा लूणी नदी के बीच स्थित भीनमाल नामक गांव में ईस्वी सन् 598 में हुआ था। इनके पिता का नाम जिष्णु था, इन्होंने प्राचीन 'ब्रह्मपितामहसिद्धान्त' के आधार पर 'ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त' तथा 'खण्डखाद्यक' नामक ग्रन्थ लिखा। इनका एक अन्य ग्रन्थ 'ध्यानग्रहोपदेश' नाम से भी प्राप्त होता है। 'ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त' नामक अपने ग्रन्थ की रचना ब्रह्मगुप्त ने मात्र 30 वर्ष की अल्पायु में किया। इस ग्रन्थ में कुल 221 अध्याय हैं। सम्पूर्ण ग्रन्थ के दो अध्यायों में गणित विषयों तथा शेष के 19 अध्यायों में ज्योतिष संबंधी विषयों का सन्निवेश किया है। इस ग्रन्थ के 12 वें अध्याय प्रसिद्धि 'गणिताध्याय' के नाम से विख्यात है। इस प्रसिद्ध ग्रन्थ का अनुवाद T. Olebrooke ने अंग्रेजी में किया जो 1927 में लंदन से छपा। ब्रह्मगुप्त ने अपने ग्रन्थ में गणित संबंधी प्रमुख नियमों यथा जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग, वर्ग तथा वर्गमूल, घन तथा घनमूल, भिन्नों को जोड़ना, घटाना आदि, त्रैराशिक नियम, व्यस्त त्रैराशिक, भाण्ड, प्रतिभाण्ड, मिश्रक व्यवहार (त्रिभुज, चतुर्भुज आदि क्षेत्रों के क्षेत्रफलों को जानने की रीति चिति व्यवहार (ढालू खाई का घनफल जानने की रीति), खात व्यवहार (खाई का क्षेत्रफल निकालना), क्राकचिक व्यवहार (आरा चलाने वालों का उपयोगी गणित) राशि व्यवहार (अन्न के ढेर के परिमाण जानने

की विधि, छाया व्यवहार (दीप स्तम्भ तथा उसकी छाया से संबंधित प्रश्न) इत्यादि का वर्णन किया है। आचार्य ब्रह्मगुप्त ने इसके अतिरिक्त 'गणक' का वर्णन किया है गणित की 20 क्रियाओं तथा 8 व्यवहारों को गणक कहा है।

20 परिकर्म- सङ्कलित, व्यवकलित, प्रत्युत्पन्न, भागहार वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल, भागजाति, प्रभागजाति, भागानुबन्ध जाति, भागापवाह जाति, भागमाता जाति त्रैराशिक, व्यस्त त्रैराशिक, पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक, एकादशराशिक तथा भाण्डप्रतिभाण्ड ।

व्यवहार- मिश्रक, श्रेढी, क्षेत्र, खात, चिति, क्राकचिक राशिक और छाया।

'ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त' के 18 वें अध्याय को 'कुट्टकाध्याय' के नाम से जाना जाता है। इसमें 103 श्लोक हैं। कुट्टक समीकरण (Indeterminate equation) बीजगणित का ही अंग है। ब्रह्मगुप्त ने कुट्टक निकालने के अनेक विधियों का वर्णन किया है। ब्रह्मगुप्त ने रैखिक समीकरण का सिद्धान्त दिया-

अव्यक्तान्तरभक्तं व्यस्तं रूपान्तरं समेऽव्यक्तः ।

वर्गाव्यक्ता शोध्याः यस्मात् रूपाणि तदधस्तात् ।।

(ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त, 18.43)

वर्गचतुर्गुणितानां रूपाणां मध्यवर्गसहितानाम् ।

मूलं मध्येनोनं वर्गद्विगुणोद्धृतं मध्यः ।। **(ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त,** 18.44)

❖ **अवधेश नारायण सिंह** (1901-1954) :

भारतीय गणितज्ञ अवधेश नारायण सिंह ने लखनऊ विश्वविद्यालय से गणित की शिक्षा प्राप्त की और उसके बाद उन्होंने कलकत्ता विश्वविद्यालय के गणित विभाग में कार्यभार ग्रहण किया। 1954 में उनकी मृत्यु हो गई। अपनी मृत्यु के समय वे दत्त और सिंह के तीसरे खण्ड को पूरा करने के काम में लगे हुये थे जिसमे ज्यामिति, त्रिकोणमिति और कलन के इतिहास को सम्मिलित किया गया था, साथ ही उसमें माया वर्ग, श्रृंखला और क्रम संचय और संयोजन सिद्धान्त एवं अन्य विषयों को सम्मिलित करना था जिसका उल्लेख प्रस्तावना में किया गया है। जब पुस्तक को 1961 में पुनर्मुद्रित किया गया तब भी तीसरे खण्ड को सम्मिलित नहीं किया गया। ऐसा लगता है कि 1958 में उनकी मृत्यु से पहले स्वामी विद्यारण्य ने तीसरे खण्ड की पाण्डुलिपि को कृपा शङ्कर को दी। एक प्रतिलिपि 1979 में एस सी गुप्ता द्वारा एस. एन. सिंह से प्राप्त की गई थी जो अवधेश नारायण सिंह के पुत्र हैं। बाद में शुक्ला ने तीसरे खण्ड का एक संशोधित संस्करण सात लेखों की एक श्रृंखला के रूप में इण्डियन जर्नल ऑफ हिस्ट्री ऑफ साइंस में 1980-1994 के दौरान प्रकाशित किया।

❖ **राम वर्मा मारुथम्पुरन**

भारतीय गणितज्ञ राम वर्मा मारुथम्पुरन जी ने अखिलेश्वरैया के साथ मिलकर ज्येष्ठदेव लिखित युक्तिभाष्य (मलयालम) के गणित खण्ड का प्रकाशन विस्तृत गणितीय व्याख्या के साथ मलयालम में 1948 में किया जिसने युक्तिभाष्य पर आगे के सभी कार्यों का आधार तैयार किया। विज्ञान के इतिहास के लिए

भारतीय राष्ट्रीय आयोग का गठन 1965 में भारतीय राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी द्वारा किया गया था। आयोग सक्रिय रूप से भारत में विज्ञान के इतिहास पर अनुसन्धान को बढ़ावा देता है। 1971 में, अकादमी ने एक संक्षिप्त विज्ञान इतिहास प्रकाशित किया था। यह इस क्षेत्र में एक ऐतिहासिक प्रकाशन डी. एम. बोस, एस एन सेन और बी. बी. सुब्बाराप्पा द्वारा सम्पादित था। वर्ष 2009 में सुब्बाराप्पा ने पर्याप्त परिवर्धन के साथ एक संशोधित संस्करण प्रकाशित कराया। 1966 में, अकादमी ने इण्डियन जर्नल ऑफ हिस्ट्री ऑफ़ द साइंस का प्रकाशन आरम्भ किया जो बहुत सफल रहा है और भारत के प्रमुख जर्नल में गिना जाता है।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in